

文章编号: 1004-4353(2022)01-0025-06

具有捕食者 Allee 效应的 Leslie-Gower 模型的动力学分析

方侃, 曾怀杰, 陈晓英
(福州大学 至诚学院, 福州 350001)

摘要: 研究了在 Leslie-Gower 模型中加入捕食者 Allee 效应后的模型动力学行为变化. 研究表明: 加入捕食者 Allee 效应后, 模型的所有正解是一致有界的, 唯一的正平衡点是全局渐近稳定的, 但两个边界平衡点是不稳定的. Allee 效应虽然不会改变正平衡点的稳定性, 但其延长了正平衡点趋向稳定状态的时间, 同时也改变了原点的性态, 即 Allee 效应不利于系统的稳定性.

关键词: Leslie-Gower 模型; Allee 效应; 稳定性; 捕食者; 一致有界

中图分类号: O175.12

文献标识码: A

Dynamics of the Leslie-Gower model with Allee effect in predator

FANG Kan, ZENG Huaijie, CHEN Xiaoying
(Zhicheng College, Fuzhou University, Fuzhou 350001, China)

Abstract: Dynamic behaviors of the Leslie-Gower model with Allee effect in predator are studied to show the influence of Allee effect. It is shown that positive solutions of this system are all uniformly bounded, and the only positive equilibrium of the system is globally asymptotically stable while the two boundary equilibrium points are all unstable with the Allee effect. The result indicates that Allee effect doesn't change the stability of the positive equilibrium but makes the system take a longer time to reach its steady-state solution, and it also changes the dynamic behaviors of the original point, which is to say that the Allee effect makes the system become unstable.

Keywords: Leslie-Gower model; Allee effect; stability; predator; uniformly bounded

0 引言

Leslie-Gower 模型是目前最为重要的捕食食饵模型之一. 2001 年, A.Korobeinikov^[1]通过构造李雅普诺夫函数证明了模型(1)的唯一正平衡点是全局渐近稳定的, 但其边界平衡点(1,0)是不稳定的. 2011 年, 李忠^[2]研究了具有反馈控制的修正 Leslie-Gower 和具有 Holling-Ⅱ 功能性反应的捕食系统, 得到了该系统解的持久性和全局吸引性的充分条件. 2017 年, 陈江彬^[3]研究了具有反馈控制和 Holling-Ⅲ 类功能反应的修正 Leslie-Gower 捕食系统, 得到了保证系统永久持续生存和全局吸引的充分性条件.

收稿日期: 2021-12-13

基金项目: 福建省自然科学基金面上项目(2019J01651); 福建省教育厅中青年项目(JAT191099)

第一作者: 方侃(1982—), 女, 硕士, 讲师, 研究方向为生物数学.

通信作者: 曾怀杰(1983—), 男, 硕士, 讲师, 研究方向为生物数学.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}) - axy, \\ \frac{dy}{dt} = sy(1 - \frac{y}{nx}). \end{cases} \quad (1)$$

近年来,许多学者研究了在生物数学模型中加入 Allee 效应后的模型动力学行为^[4-10]. 例如 Lin^[4]研究了加入 Allee 效应的单种群反馈控制模型的动力学行为,证明了 Allee 效应能够改变模型正平衡点的稳定性,同时给出了模型唯一的正平衡点局部渐近稳定的充分条件. 方侃等^[5]在文献[4]的基础上进一步探讨了加入 Allee 效应的单种群反馈控制模型正平衡点全局渐近稳定的充分条件和 Allee 效应产生的分支. 黄小燕等^[6]研究了 Allee 效应对阶段结构单种群模型动力学行为的影响,证明了系统的平衡点个数会发生变化并产生分支,且当 Allee 效应足够大时种群会趋于绝灭. 关新宇等^[7]研究了具有 Allee 效应的抽象单种群模型,证明了 Allee 效应不会改变模型正平衡点的位置和稳定性,但会改变模型趋于稳态的时间. 基于上述研究,本文将研究在 Leslie-Gower 捕食食饵模型(方程(1))中加入 Allee 效应的一种新模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}) - axy \triangleq p(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = \frac{sy^2}{y + \beta}(1 - \frac{y}{nx}) \triangleq q(x, y), (x, y) \neq (0, 0); \\ \frac{dy}{dt} = 0, (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (2)$$

其中 r, a, s, β, n 都是正数.

1 平衡点的局部稳定性

根据生态学意义,只需要在第一象限 $\Omega = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ 内研究系统(2)的平衡点的存在性即可. 为了简化计算,本文对方程(2)做无量纲化,令 $\bar{t} = mt, \bar{x} = gx, \bar{y} = hy, m = r, g = 1/k, h = 1/(kn), a_0 = akn/r, s_0 = s/r, \beta_0 = \beta/(kn)$ (仍然将 \bar{x} 记作 x, \bar{y} 记作 y, \bar{t} 记作 t), 则系统(2)变成如下等价系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x) - a_0xy \triangleq p(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = \frac{s_0y^2}{y + \beta_0}(1 - \frac{y}{x}) \triangleq q(x, y), (x, y) \neq (0, 0); \\ \frac{dy}{dt} = 0, (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (3)$$

令 $p(x, y) = 0, q(x, y) = 0$, 于是可得 3 个平衡点, 即边界平衡点 $A_0(0, 0), A_1(1, 0)$ 和唯一的正平衡点 $A^*(x^*, y^*) = (\frac{1}{1+a_0}, \frac{1}{1+a_0})$.

1.1 正平衡点 $A^*(x^*, y^*)$ 的稳定性

定理 1 正平衡点 $A^*(x^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的.

证明 对 $p(x, y), q(x, y)$ 求偏导可得系统(3)在正平衡点 $A^*(x^*, y^*)$ 的雅克比矩阵:

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} p_x(x^*, y^*) & p_y(x^*, y^*) \\ q_x(x^*, y^*) & q_y(x^*, y^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - (2 + a_0)x^* & -a_0x^* \\ \frac{s_0x^*}{x^* + \beta_0} & -\frac{s_0x^*}{x^* + \beta_0} \end{bmatrix}.$$

由上式可知行列式 $\text{Det}(\mathbf{J}(x^*, y^*)) = \frac{s_0 x^*}{x^* + \beta_0} > 0$, 迹 $\text{Tr}(\mathbf{J}(x^*, y^*)) = -\frac{1}{1+a_0} - \frac{s_0}{(1+a_0)\beta_0 + 1} < 0$.

进而可知 $A^*(x^*, y^*)$ 的两个特征值的实部都为负数, 正平衡点 $A^*(x^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的.

1.2 边界平衡点 $A_1(1, 0)$ 的稳定性

引理 1^[11] 假设平面系统已简化为如下形式:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = P_2(v, u), \\ \frac{du}{dt} = u + Q_2(v, u). \end{cases} \quad (4)$$

设 $O(0, 0)$ 是式(4)的孤立奇点, 且 $P_2(v, u), Q_2(v, u)$ 是 $O(0, 0)$ 的充分小邻域 $S_\delta(O)$ 内的次数不低于 2 的解析函数, 于是存在函数 $u = \Phi(v)$ 满足: $\Phi(v) + Q_2(v, \Phi(v)) \equiv 0$, $|v| < \delta$, 且 $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$. 令 $P_2(v, \Phi(v)) = a_m v^m + [v]_{m+1}$, 其中 $a_m \neq 0, m \geq 2$. 于是有:

1) 当 m 是奇数且 $a_m > 0$ 时, $O(0, 0)$ 是不稳定的结点;

2) 当 m 是奇数且 $a_m < 0$ 时, $O(0, 0)$ 是鞍点;

3) 当 m 是偶数时, $O(0, 0)$ 是鞍结点. 另外当 $a_m > 0 (< 0)$ 时, 抛物扇形落在右(左)半平面内, 两个双曲扇形落在左(右)半平面内.

定理 2 边界平衡点 $A_1(1, 0)$ 是一个鞍结点.

证明 对 $p(x, y), q(x, y)$ 求偏导, 可得系统(3)在边界平衡点 $A_1(1, 0)$ 的雅克比矩阵:

$$\mathbf{J}_{A_1}(1, 0) = \begin{bmatrix} p_x(1, 0) & p_y(1, 0) \\ q_x(1, 0) & q_y(1, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -a_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由上式可知边界平衡点 $A_1(1, 0)$ 是非双曲的. 为了研究 $A_1(1, 0)$ 的稳定性, 首先对系统(3)做一个时间变换 $d\tau = dt / [(\beta_0 + y)x]$ (仍然将 τ 记作 t), 则系统(3)变成如下等价系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2(1-x)(y+\beta_0) - a_0 x^2 y(y+\beta_0) \triangleq P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = s_0 y^2(x-y) \triangleq Q(x, y). \end{cases} \quad (5)$$

令 $X = x - 1, Y = y$ (仍然将 X 记作 x, Y 记作 y), 再将 $A_1(1, 0)$ 平移到原点 $B_1(0, 0)$, 则系统(5)变成如下等价系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{30}x^3 + a_{22}x^2y^2 + a_{31}x^3y, \\ \frac{dy}{dt} = b_{02}y^2 + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3. \end{cases} \quad (6)$$

其中 $a_{10} = -\beta_0, a_{01} = -a_0\beta_0, a_{11} = -2a_0\beta_0 - 1, a_{20} = -2\beta_0, a_{02} = -a_0, a_{12} = -2a_0, a_{21} = -a_0\beta_0 - 2, a_{30} = -\beta_0, a_{31} = -1, a_{22} = -a_0, b_{02} = b_{12} = s_0, b_{03} = -s_0$. 对系统(6)做线性变换 $u = -\beta_0(x + a_0y), v = y$ 和时间变换 $d\tau = -\beta_0 dt$ (仍然将 τ 记作 t) 后, 则系统(6)变成如下等价系统:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{s_0}{\beta_0}v^2 + \frac{s_0}{\beta_0^2}uv^2 + \frac{s_0(a_0+1)}{\beta_0}v^3 \triangleq P_2(v, u), \\ \frac{du}{dt} = u + Q_2(v, u). \end{cases} \quad (7)$$

其中 $Q_2(v, u)$ 是次数不低于 2 的多项式,

$$Q_2(v, u) = \frac{1-2a_0\beta_0}{\beta_0}vu - \frac{2}{\beta_0}v^2 + a_0s_0u^2 + \frac{a_0(a_0\beta_0-s_0-2)}{\beta_0}vu^2 + \frac{2(a_0\beta_0-1)}{\beta_0^2}v^2u +$$

$$\frac{1}{\beta_0^2} v^3 - a_0 s_0 (a_0 + 1) u^3 + \frac{a_0^2}{\beta_0} v u^3 + \frac{1}{\beta_0^3} v^3 u + \frac{2a_0}{\beta_0^2} v^2 u^2.$$

令 $\frac{du}{dt} = 0$, 再将唯一满足 $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$ 的解 ($u = \frac{2}{\beta_0} v^2 + \frac{4a_0\beta_0 - 3}{\beta_0^2} v^3 + o(v^3)$) 代入系统(6) 的第

1 个方程可得 $P_2(v, u)$ 的最低幂次项次数为 2, 且最低幂次项的系数为 $-\frac{s_0}{\beta_0} < 0$. 于是根据引理 1 可知

$B_1(0, 0)$ 是一个鞍结点, 且此时双曲部分落在第一象限内, 所以边界平衡点 $A_1(1, 0)$ 是鞍结点.

1.3 边界平衡点 $A_0(0, 0)$ 的稳定性

定理 3 边界平衡点 $A_0(0, 0)$ 是一个鞍点.

证明 对 $P(x, y), Q(x, y)$ 求偏导得系统(5) 的边界平衡点 $A_0(0, 0)$ 的雅可比矩阵为:

$$J_{A_0}(0, 0) = \begin{bmatrix} P_x(0, 0) & P_y(0, 0) \\ Q_x(0, 0) & Q_y(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由上式可知平衡点 $A_0(0, 0)$ 是一个高阶奇点. 为了研究 $A_0(0, 0)$ 的稳定性, 首先对系统(5) 进行“吹胀”, 即令 $y = uv, x = u, d\tau = u dt$ (仍然将 τ 记作 t), 则系统(5) 变成如下等价系统:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u(-\beta_0 + \beta_0 u + (a_0\beta_0 - 1)uv + u^2v + a_0u^2v^2) \triangleq p(u, v), \\ \frac{dv}{dt} = v(-\beta_0 + \beta_0 u + (a_0\beta_0 + s_0 - 1)uv + u^2v - s_0uv^2 + a_0u^2v^2) \triangleq q(u, v). \end{cases} \quad (8)$$

显然 $B_0(0, 0)$ 是 v 轴上的一个平衡点. 对 $p(u, v), q(u, v)$ 求偏导后可得 $B_0(0, 0)$ 的雅可比矩阵:

$$J_{B_0}(0, 0) = \begin{bmatrix} p_u(0, 0) & p_v(0, 0) \\ q_u(0, 0) & q_v(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 & 0 \\ 0 & -\beta_0 \end{bmatrix}.$$

由上式可知平衡点 $B_0(0, 0)$ 的两个特征根为 $r_1 = \beta_0 > 0$ 和 $r_2 = -\beta_0 < 0$, 因此将初等奇点 $B_0(0, 0)$ “捏”回到 xoy 平面后即可得边界平衡点 $A_0(0, 0)$ 是一个鞍点.

2 正平衡点的全局稳定性

引理 2^[12] 如果 $a, b > 0$, 并且对于所有的 $x(t) > 0$ 有 $\frac{dx}{dt} \leq (\geq) x(t)(a - bx(t))$, 则有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq \frac{a}{b} \quad (\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq \frac{a}{b}).$$

定理 4 系统(3) 中具有初值 $x(0) > 0$ 和 $y(0) > 0$ 的所有正解是一致有界的.

证明 首先由 $x = 0$ 和 $y = 0$ 可得 $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$. 由此知系统(3) 的解是非负的, 并且当 $x(0) > 0$ 和 $y(0) > 0$ 时有 $x(t) > 0$ 和 $y(t) > 0$. 再由微分方程解的存在唯一性定理以及轨线的不相交性可知, 系统(3) 的任意解是非负的. 下面证明系统(3) 解的一致有界性.

由于 $\frac{dx}{dt} = x(1 - x) - a_0xy \leq x(1 - x)$, 因此根据引理 2 可得 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq 1$. 由此知存在一

个正数 M 且满足: 对于任意的 $t \geq 0$, 有 $x(t) \leq M$. 由于 $\frac{dy}{dt} = \frac{s_0y^2}{y + \beta_0}(1 - \frac{y}{x}) \leq s_0y(1 - \frac{y}{M})$, 因此根据引理 2 可得 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) \leq M$. 由此可知存在一个正数 N 且满足: 对于任意的 $t \geq 0$, 有 $y(t) \leq N$.

综上所述, 系统(3) 中具有初值 $x(0) > 0$ 和 $y(0) > 0$ 的所有正解是一致有界的.

定理 5 正平衡点 $A^*(x^*, y^*)$ 是全局渐近稳定的.

证明 由定理 1 知正平衡点 $A^*(x^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的, 因此可构造 Dulac 函数 $u^*(x, y) = \frac{1}{xy^2}$, 于是有 $\frac{\partial(u^*(x, y)p(x, y))}{\partial x} + \frac{\partial(u^*(x, y)q(x, y))}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{s_0}{x(y + \beta_0)^2} - \frac{s_0\beta_0}{x^2(y + \beta_0)^2} < 0$. 根据 Dulac 定理^[11] 可知, 系统(3) 在第一象限内不存在极限环. 再由定理 4 知系统(3) 的所有正解是一致有界的, 由此证得正平衡点 $A^*(x^*, y^*)$ 是全局渐近稳定的.

3 数值模拟和生态意义

图 1 为 $\beta_0 = 0, a_0 = 1, s_0 = 2$ 时, Leslie-Gower 模型未加入 Allee 效应时的相图; 图 2 为 $\beta_0 = 10, a_0 = 1, s_0 = 2$ 时, Leslie-Gower 模型加入 Allee 效应时的相图. 对比图 1 和图 2 可知: 两个模型的正平衡点都是全局渐近稳定的, 且边界平衡点 $A_1(1, 0)$ 在第一象限内都是一个双曲域. 在未加入 Allee 效应时, 图中的原点由一部分双曲域和一部分排斥的抛物域构成(见图 1), 加入 Allee 效应时图中的原点由一个双曲域构成(见图 2).

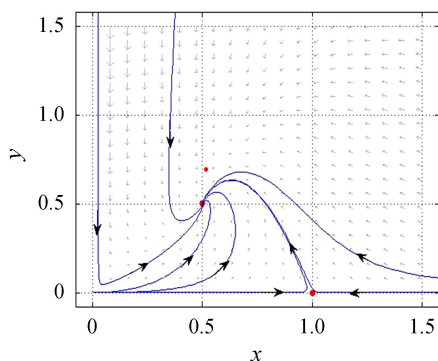


图 1 未加入 Allee 效应时模型平衡点的稳定性

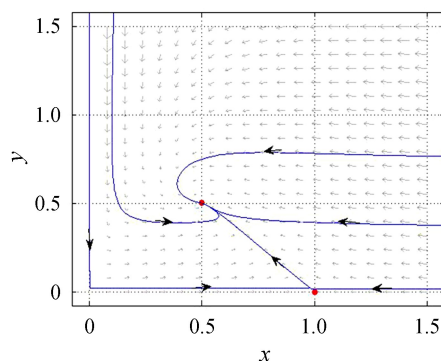


图 2 加入 Allee 效应时模型平衡点的稳定性

图 3 和图 4 为 $\beta_0 = 0$ (未加入 Allee 效应)、 $\beta_0 = 5$ (加入 Allee 效应)、 $\beta_0 = 10$ (加入 Allee 效应) 时的食饵与捕食者趋于稳态的时间相图. 对比图 3 和图 4 可知, 加入 Allee 效应后食饵和捕食者达到稳态的时间比未加入 Allee 效应时显著增加, 而且 Allee 效应越大, 所需时间越长. 由以上结果可知, 系统(3) 加入捕食者 Allee 效应后不利于系统的稳定, 且当种群在受到外界干扰时, 系统的种群密度会更容易出现剧烈的波动.

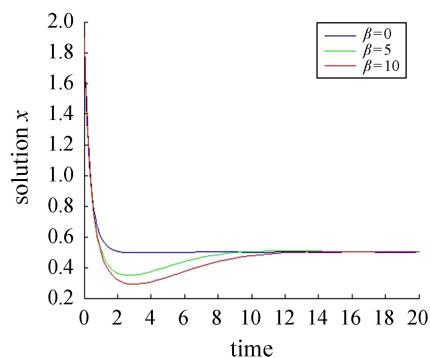


图 3 食饵趋于稳态的时间相图

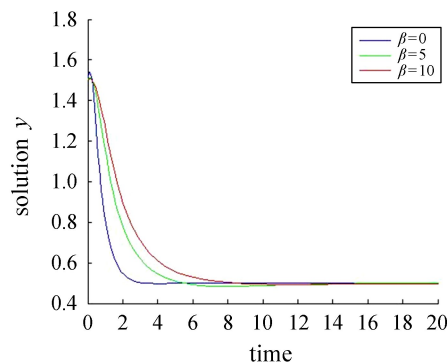


图 4 捕食者趋于稳态的时间相图

参考文献:

- [1] KOROBENIKOV A. A Lyapunov function for a Leslie-Gower models[J]. Applied Mathematics Letters, 2001, 14: 697-699.

- [2] 赵良. 关于环的正则性研究[D]. 兰州: 西北师范大学, 2005.
- [3] 鲁琦, 殷晓斌, 鲍宏伟. EP-内射性与环的 von Neumann 正则性[J]. 山东大学学报(理学版), 2014, 49(10): 33-37.
- [4] 鲁琦, 李娜. 模和环的 small-内射性的一些研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2020, 43(3): 294-297.
- [5] HONG C Y, KIM N K, LEE Y. On rings whose homomorphic images are p -injective[J]. Communications in Algebra, 2002, 30(1): 261-271.
- [6] NICHOLSON W K, YOUSIF M F. On completely principally injective rings[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1994, 49(3): 513-518.
- [7] ARMENDARIZ E P. Review: Von Neumann regular rings[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1980, 3(1): 752-757.
- [8] IKEDA M, NAKAYAMA T. On some characteristic properties of quasi-Frobenius and regular rings[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1954, 5(1): 15-19.
- [9] HUNGERFORD T W. Algebra[M]. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [10] HUH C, JANG S H, KIM C O, et al. Rings whose maximal one-sided ideals are two-sided[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2002, 39(3): 411-422.

—————
(上接第 29 页)

- [2] 李忠. 具反馈控制修正 Leslie-Gower 和 Holling- II 功能性反应捕食系统的持久性和全局吸引性[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(7): 126-130.
- [3] 陈江彬. 具反馈控制和 Holling- III 类功能反应的修正 Leslie-Gower 捕食系统研究[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2017, 43(3): 189-194.
- [4] LIN Q F. Stability analysis of a single species Logistic model with Allee effect and feedback control[J]. Advances in Different Equations, 2018, 2018: 190.
- [5] 方侃, 陈晓英. 具有 Allee 效应单种群反馈控制模型的动力学分析[J]. 闽南师范大学学报(自然科学版), 2021, 34(3): 39-45.
- [6] 黄小燕, 陈凤德. Allee 效应对阶段结构单种群模型的动力学行为影响[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2020, 48(2): 135-139.
- [7] 关新宇, 谢向东. Allee 效应对单种群模型的动力学行为影响研究[J]. 生物数学学报(自然科学版), 2019, 34(1): 140-144.
- [8] ZHU Z L, HE M X, LI Z, et al. Stability and bifurcation in a Logistic model with Allee effect and feedback control[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2020, 30(15): 2050231.
- [9] LÜ Y Y, CHEN L J, CHEN F D, et al. Stability and bifurcation in an Si Epidemic model with additive Allee effect and time delay[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2021, 31(4): 2150060.
- [10] GUAN X Y, CHEN F D. Dynamical analysis of a two species amensalism model with Beddington-DeAngelis functional response and Allee effect on the second species[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2019, 48: 71-93.
- [11] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985: 49-158.
- [12] CHEN F D. On a nonlinear non-autonomous predator-prey model with diffusion and distributed delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 180(1): 33-49.