文章编号：1004-4353(2022)01-0019-06

基于 Crank-Nicolson 差分法的 KdVB 方程有限元解的误差分析

姚富霞
(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要：讨论了 KdVB 方程近似解的误差估计. 首先，利用 Crank-Nicolson 差分法对 KdVB 方程的时间变量进行离散，由此得到了 KdVB 方程全离散的 H^1 误差估计. 其次，基于特征正交分解(POD)方法得到了 KdVB 方程的降维模型；最后，根据 Crank-Nicolson 差分法对降维模型的时间变量进行离散，由此得到了降维模型的 H^1 误差估计.

关键词：KdVB 方程；Crank-Nicolson 差分法；有限元解；误差分析
中图分类号：O241.1　　　**文献标识码**：A

Error analysis of finite element solution of KdVB equation based on Crank-Nicolson difference method

YAO Fuxia
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: The error estimation of the approximate solution of the KdVB equation is discussed. Firstly, the time variables of the KdVB equation are discretized by the Crank-Nicolson difference method, and the H^1 error estimation of the full discretization of the KdVB equation is obtained. Secondly, the dimensionality reduction model of the KdVB equation is obtained based on the characteristic orthogonal decomposition (POD) method; Finally, the time variables of the reduced dimension model are discretized according to the Crank-Nicolson difference method, and the H^1 error estimation of the reduced dimension model is obtained.

Keywords: KdVB equation; Crank-Nicolson difference method; finite element solution; error analysis

0　引言

本文考虑具有如下初边值问题的 Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB)方程：

$$u_t + \varepsilon u u_x - \nu u_{xx} + \mu u_{xxx} = 0,\ x \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,\ x \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ x \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega. \tag{4}$$

其中 $\Omega = [0, L]$，ε、ν、μ 为正数，x 是空间变量，t 表示时间变量.

KdVB 方程是一类同时包含阻尼和色散的非线性系统方程[1]，因其在物理学和数学中具有广泛的

收稿日期：2021-11-13
作者简介：姚富霞(1996—)，女，硕士研究生，研究方向为数值计算.

应用,因此受到学者的关注. 1970 年,Johnson 首次研究了 KdVB 方程在相平面上的行波解,并给出了解的渐近展开式[2]. 1985 年,Bona 等证明了 KdVB 方程有界行波解的存在唯一性[3]. 随后一些学者利用有限元[4]、tanh 方法[5]、指数有理函数法[6]和有限差分格式[7]等方法求解了 KdVB 方程的数值解.

Crank-Nicolson 差分法因具有无条件稳定性和二阶隐式的差分格式,因此近年来被广泛地应用于偏微分方程的数值计算中. 在文献[8]中,作者采用 Crank-Nicolson 差分格式求解了 Kdv 浅水波方程的定解问题,并从理论上分析了定解问题的截断误差、稳定性和收敛性,同时通过数值实验验证了 Crank-Nicolson 差分格式的有效性. 在文献[9]中,作者建立了一种兼具稳定性和并行性的交替分段 Crank-Nicolson 格式,并通过理论分析得到了此差分格式解的存在唯一性、稳定性和收敛性. 在文献[8-9]研究的基础上,本文利用 Crank-Nicolson 差分法对 KdVB 方程和 KdVB 方程降维模型的时间变量进行离散,并分别给出 KdVB 方程和 KdVB 方程降维模型的 H^1 误差估计.

1 准备工作

本文在 Sobolev空间 $H^k(\Omega)$ 上研究 KdVB方程有限元解的误差. 空间 $H^k(\Omega)$ 的内积和范数分别记为 $(\cdot,\cdot)_{H^k(\Omega)}$ 和 $\|\cdot\|_k$. 当 $k=0$ 时, $H^0(\Omega)$ 为 $L^2(\Omega)$. 记 $L^2(\Omega)$ 上的内积和范数分别为 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$. $H^{-1}(\Omega)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间. 下面定义 Sobolev 空间 $H_0^k(\Omega)$:

$$H_0^k(\Omega)=\{u\in H^k(\Omega): \partial_x^j u(x)=\partial_x^j u(x+L)=0,\ j=0,\cdots,k-1\}. \tag{5}$$

其中 $\partial_x^j u(x)$ 表示函数 u 关于 x 的第 j 阶导数. $C([0,T];H^k)$ 表示所有连续函数 $u:[0,T]\to H^k(\Omega)$ 的空间,其中 $\|u\|_{C([0,T];H^k)}=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_k<\infty$. $L^2([0,T];H^k)$ 为平方可积函数 $u:[0,T]\to H^k(\Omega)$ 的空间,其中 $\|u\|^2_{L^2([0,T];H^k)}=\int_0^T\|u(t)\|_k^2\mathrm{d}t<\infty$. 将式(1) 乘以 $v(x)\in H_0^2(\Omega)$, 并在 Ω 上进行分部积分,由此得到的方程(1)—(4) 的弱形式为:

$$(u_t,v)-\frac{\varepsilon}{2}(u^2,v_x)+\nu(u_x,v_x)-\mu(u_{xx},v_x)=0,\ t\in[0,T]. \tag{6}$$

设 $M\in\mathbf{N}^+$ 为正整数, $\{T_h\}_{h>0}$ 为空间变量的网格, $h=L/M$ 为网格尺寸. 记网格节点为 $x_j=jh$, $j=0,1,\cdots,M$. 记子区间为 $I_j=[x_j,x_{j+1}]$, $j=0,1,\cdots,M-1$. 设 $P_r(I)$ 为区间 I 上次数不大于 $r\in\mathbf{N}^+$ 的多项式空间. 为了求方程(1)—(4) 的近似解 u_h, 定义 $S_h(\Omega)$ 为:

$$S_h(\Omega)=\{v\in H_0^2(\Omega): v|_{I_n}\in P_r(I_j),\ j=0,1,\cdots,M-1\}. \tag{7}$$

$S_h(\Omega)$ 具有如下逼近性质[10-11]: 对于 $u\in H^k(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$, 有

$$\inf_{v\in S_h(\Omega)}\{\|u-v\|+h\|u-v\|_1\}\leqslant Ch^{r+1}\|u\|_{r+1},\ 0\leqslant r\leqslant k. \tag{8}$$

为了误差估计,在 $S_h(\Omega)$ 上引入 Ritz 投影 P_h, 使得对于 $v\in H^1(\Omega)$, 有:

$$((P_hv)_x,\chi_x)=(v_x,\chi_x),\ \forall\chi\in S_h(\Omega). \tag{9}$$

引入以下 3 个引理,证明过程可参考文献[10-11].

引理 1 在式(9) 的条件下,当 $v,v_t\in H^k(\Omega)$, $k>r$, $P_hv\in S_h(\Omega)$ 时,下列不等式成立:

$$\|P_hv-v\|+h\|(P_hv-v)_x\|\leqslant Ch^{r+1}\|v\|_{r+1}, \tag{10}$$

$$\|(P_hv-v)_t\|+h\|(P_hv-v)_{tx}\|\leqslant Ch^{r+1}\|v_t\|_{r+1}. \tag{11}$$

引理 2 当 $v\in S_h(\Omega)$ 时,逆不等式 $\|\nabla v\|_\beta\leqslant Ch^{-1}\|v\|$ 成立,其中 C 与 h 无关.

引理 3 整数 n、κ_n、a_n、b_n、c_n 和 D 都大于等于零,若 $a_N+\Delta t\sum\limits_{n=0}^N b_n\leqslant\Delta t\sum\limits_{n=0}^N\kappa_na_n+\Delta t\sum\limits_{n=0}^N c_n+D$

$(\forall N \geqslant 0)$，且 $\Delta t \kappa_n < 1$，则有 $a_N + \Delta t \sum_{n=0}^{N} b_n \leqslant \exp\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\Delta t \kappa_n}{1-\Delta t \kappa_n}\right)(\Delta t \sum_{n=0}^{N} c_n + D)$，$\forall N \geqslant 0$.

2　全离散的 Crank-Nicolson 有限元解的误差估计

设 N 为正整数，k 为时间步长($k=T/N$)，$t^n = nk\ (0 \leqslant n \leqslant N)$. 记 $\zeta^n = \zeta(t^n)$，$\partial_t \zeta^n = \frac{\zeta^n - \zeta^{n-1}}{k}$，$\zeta^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\zeta^n + \zeta^{n-1}}{2}$. 在式(6) 中，若 $v \in S_h(\Omega)$，则可得：

$$(u_t^{n-\frac{1}{2}}, v) - \frac{\varepsilon}{2}((u^{n-\frac{1}{2}})^2, v_x) + \nu(u_x^{n-\frac{1}{2}}, v_x) - \mu(u_{xx}^{n-\frac{1}{2}}, v_x) = 0. \tag{12}$$

由空间变量的Galerkin有限元方法和时间变量的Crank-Nicolson方法可得如下KdVB方程的全离散格式：求 $u_h^n \in S_h(\Omega)$，$n=1,\cdots,N$，使得 u_h^n 满足

$$(\partial_t u_h^n, v) - \frac{\varepsilon}{2}((u_h^{n-\frac{1}{2}})^2, v_x) + \nu(u_{hx}^{n-\frac{1}{2}}, v_x) - \mu(u_{hxx}^{n-\frac{1}{2}}, v_x) = 0,\ \forall v \in S_h(\Omega). \tag{13}$$

将误差 e^n 分解为如下形式：

$$e^n = u^n - u_h^n = (u^n - P_h u^n) - (u_h^n - P_h u^n) = \eta^n - \xi^n, \tag{14}$$

其中 $u_h^n = u(t^n)$，$P_h u^n$ 为投影.

定理 1　假设方程(1)—(4) 中的 $u(t)$ 足够光滑，且 $u_h^0 = P_h u_0$，则有：

$$\| u^N - u_h^N \| + \nu k \| u_x^N - u_{hx}^N \| \leqslant C(h^{r+1} + k^2), \tag{15}$$

其中 C 是与 h 和 k 无关的常数.

证明　因已知 ξ^n 的估计值，因此可以用 ξ^n 来估计 η^n. 用式(12) 减去式(13) 可得如下等式：

$$\begin{aligned}&(\partial_t \eta^n, v) - (\partial_t \xi^n, v) + (\rho^n, v) + \nu(\eta_x^{n-\frac{1}{2}}, v_x) - \nu(\xi_x^{n-\frac{1}{2}}, v_x) - \mu(\eta_{xx}^{n-\frac{1}{2}}, v_x) + \\ &\quad \mu(\xi_{xx}^{n-\frac{1}{2}}, v_x) - \frac{\varepsilon}{2}((u^{n-\frac{1}{2}})^2 - (u_h^{n-\frac{1}{2}})^2, v_x) = 0,\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $\rho^n = u_t(t^{n-\frac{1}{2}}) - \partial_t u^n$. 在式(16) 中，令 $v = \eta^{n-\frac{1}{2}}$ 可得：

$$\begin{aligned}&(\partial_t \eta^n, \eta^{n-\frac{1}{2}}) - (\partial_t \xi^n, \eta^{n-\frac{1}{2}}) + (\rho^n, \eta^{n-\frac{1}{2}}) + \nu(\eta_x^{n-\frac{1}{2}}, \eta_x^{n-\frac{1}{2}}) - \nu(\xi_x^{n-\frac{1}{2}}, \eta_x^{n-\frac{1}{2}}) - \\ &\quad \mu(\eta_{xx}^{n-\frac{1}{2}}, \eta_x^{n-\frac{1}{2}}) + \mu(\xi_{xx}^{n-\frac{1}{2}}, \eta_x^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{\varepsilon}{2}((u^{n-\frac{1}{2}})^2 - (u_h^{n-\frac{1}{2}})^2, \eta_x^{n-\frac{1}{2}}) = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

再利用 Young 不等式和引理 2 可得：

$$\begin{aligned}&\|\eta^n\|^2 - \|\eta^{n-1}\|^2 + 2k\nu \|\eta_x^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \leqslant k\|\partial_t \xi^n\|^2 + k\|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + k\nu\|\xi_x^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \\ &\quad k\nu\|\eta_x^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{Ck\mu^2}{\nu h^2}\|\xi_x^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{k\nu}{8}\|\eta_x^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + k\|\rho^n\|^2 + \\ &\quad k\|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{k\nu}{8}\|\eta_x^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{Ck\varepsilon^2}{\nu}(\|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|^2).\end{aligned} \tag{18}$$

整理上式可得如下不等式：

$$\begin{aligned}&(1-Ck)\|\eta^n\|^2 + \frac{3k\nu}{4}\|\eta_x^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \leqslant (1+Ck)\|\eta^{n-1}\|^2 + k\|\partial_t \xi^n\|^2 + \\ &\quad k\nu\|\xi_x^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{Ck\varepsilon^2}{\nu h^2}\|\xi_x^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + k\|\rho^n\|^2 + \frac{Ck\varepsilon^2}{\nu}\|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|^2.\end{aligned} \tag{19}$$

利用泰勒公式对 ρ^n 进行计算可得 $\|\rho^n\|^2 \leqslant Ck^3\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_{ttt}(s)\|^2\mathrm{d}s$. 再结合引理2可得：

$$(1-Ck)\|\eta^n\|^2+\frac{3k\nu}{16}\|\eta_x^n\|^2 \leqslant (1-Ck)\|\eta^{n-1}\|^2+2Ck\|\eta^{n-1}\|^2+\frac{3k\nu}{16}\|\eta_x^{n-1}\|^2+Ck(\|\partial_t\xi^n\|^2+$$

$$\|\xi^n\|^2+\|\xi^{n-1}\|^2+\|\xi_x^n\|^2+\|\xi_x^{n-1}\|^2)+Ck\left(h^{-2}\|\xi_x^n\|^2+h^{-2}\|\xi_x^{n-1}\|^2+k^3\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_{ttt}(s)\|^2\mathrm{d}s\right).$$

将上式从 $n=1$ 到 N 求和可得：

$$(1-Ck)\|\eta^N\|^2+\frac{3\nu k}{16}\|\eta_x^N\|^2 \leqslant 2Ck\sum_{n=1}^{N}\|\eta^{n-1}\|^2+Ck\left(k^3\int_{t_0}^{t_N}\|u_{ttt}\|^2\mathrm{d}s\right)+$$

$$Ck(\sum_{n=1}^{N}\|\partial_t\xi^n\|^2+\sum_{n=1}^{N}\|\xi_x^n\|^2+h^{-2}\sum_{n=1}^{N}\|\xi_x^n\|^2+\sum_{n=1}^{N}\|\xi^n\|^2).$$

选择适当的 k 使 $(1-Ck)\geqslant 0$，则有：

$$\|\eta^N\|^2+\frac{3\nu k}{16(1-Ck)}\|\eta_x^N\|^2 \leqslant \frac{2Ck}{1-Ck}\|\eta^{n-1}\|^2+\frac{Ck}{1-Ck}(h^{-2}\sum_{n=1}^{N}\|\xi_x^n\|^2)+$$

$$\frac{Ck}{1-Ck}\left(k^3\int_{t_0}^{t_N}\|u_{ttt}\|^2\mathrm{d}s+\sum_{n=1}^{N}\|\partial_t\xi^n\|^2+\sum_{n=1}^{N}\|\xi_x^n\|^2+\sum_{n=1}^{N}\|\xi^n\|^2\right). \tag{20}$$

对式(20)应用引理3可得 $\|\eta^N\|^2+\nu k\|\eta_x^N\|^2 \leqslant C(h^{2r-2}+k^4)$. 由此根据 $\|u^N-u_h^N\|\leqslant\|\eta^N\|+\|\xi^N\|$ 的三角形不等式可知式(15)成立，证毕.

3 基于POD方法的Crank-Nicolson有限元解的误差估计

定义 $W=\mathrm{span}\{u_h^1,u_h^2,\cdots,u_h^N\}$，则 W 是由瞬像张成的空间. 用 $\{\psi_j\}_{i=1}^{l}$ 表示空间 W 的标准正交基，$d=\dim W\leqslant N$，则有：

$$u_h^n=\sum_{i=1}^{d}(u_h^n,\psi_i)_H\psi_i,\ i=1,2,\cdots,N;$$

$$(u_h^n,\psi_i)_H=(u_{hxx}^n,(\psi_i)_{xx})+(u_{hx}^n,(\psi_i)_x)+(u_h^n,\psi_i).$$

构造POD的方法为：对于任意的 $l\in\{1,2,\cdots,d\}$，求标准正交基函数 $\psi_1,\cdots,\psi_l\in H(\Omega)$，使得 $\min\limits_{\{\psi_i\}_{i=1}^{l}}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left\|u_h^n-\sum_{i=1}^{l}(u_h^n,\psi_i)_H\psi_i\right\|_H^2$，且满足 $(\psi_i,\psi_j)_H=\delta_{ij}$，$i,j=1,\cdots,l$.

命题1[12] 给定 $u_h^1,u_h^2,\cdots,u_h^N$，并假设 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_d>0$，特征向量 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_d\in R^N$ 满足 $G\boldsymbol{v}_i=\lambda_i\boldsymbol{v}_i$，其中 $i=1,2,\cdots,d$，$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{G}_{ij})_{N\times N}$，$\boldsymbol{G}_{ij}=\frac{1}{N}(u_h^i,u_h^j)_H$，则秩为 $l\leqslant d$ 的POD基为 $\psi_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i d}}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{v}_i^j u_h^j$，其中 $i=1,\cdots,l$，$\boldsymbol{v}_i^j$ 为特征向量 $\boldsymbol{v}_i$ 的第 j 个分量. 此外，对于 $l\leqslant d$，以下误差估计成立：

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left\|u_h^n-\sum_{i=1}^{l}(u_h^n,\psi_i)_H\psi_i\right\|_H^2=\sum_{i=l+1}^{d}\lambda_i.$$

引理4[13] 若 $u^n\in H^{r+1}(\Omega)$ 和 $P_d u^n\in S_d(\Omega)$，则有如下不等式：

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|u^n-P_d u^n\|_H^2\leqslant C(h^{2r-2}+\sum_{j=l+1}^{d}\lambda_j). \tag{21}$$

在式(6)中，若 $v\in S_d(\Omega)$，则可得：

$$(u_t^{n-\frac{1}{2}},v)-\frac{\varepsilon}{2}((u^{n-\frac{1}{2}})^2,v_x)+\nu(u_x^{n-\frac{1}{2}},v_x)-\mu(u_{xx}^{n-\frac{1}{2}},v_x)=0. \tag{22}$$

KdVB方程的POD降维模型为：求 $u_d^n\in S_d(\Omega)$，$n=1,\cdots,N$，使得 u_h^n 满足

$$(\partial_t u_d^n, v) - \frac{\varepsilon}{2}((u_d^{n-\frac{1}{2}})^2, v_x) + \nu(u_{dx}^{n-\frac{1}{2}}, v_x) - \mu(u_{dxx}^{n-\frac{1}{2}}, v_x) = 0,\ \forall v_d \in S_d(\Omega). \tag{23}$$

将误差 e^n 分解为如下形式：

$$e^n = u^n - u_d^n = (u^n - P_d u^n) - (u_d^n - P_d u^n) = \eta_d^n - \xi_d^n,$$

其中 $u_d^n = u(t^n)$，$P_d u^n$ 为投影.

定理 2　假设方程(1)—(4) 中的 $u(t)$ 足够光滑，且 $u_d^0 = P_d u_0$，则有：

$$\| u^N - u_d^N \|^2 + \nu k \| u_x^N - u_{dx}^N \|^2 \leqslant C(h^{2r-2} + k^4 + \sum_{i=l+1}^{d} \lambda_i), \tag{24}$$

其中 C 是与 h 和 k 无关的常数.

证明　用式(22) 减去式(23) 得到如下等式：

$$(\partial_t \eta_d^n, v_d) - (\partial_t \xi_d^n, v_d) + (\rho^n, v_d) + \nu(\eta_{dx}^{n-\frac{1}{2}}, v_{dx}) - \nu(\xi_{dx}^{n-\frac{1}{2}}, v_{dx}) -$$
$$\mu(\eta_{dxx}^{n-\frac{1}{2}}, v_{dx}) + \mu(\xi_{dxx}^{n-\frac{1}{2}}, v_{dx}) - \frac{\varepsilon}{2}((u^{n-\frac{1}{2}})^2 - (u_d^{n-\frac{1}{2}})^2, v_{dx}) = 0, \tag{25}$$

其中 $\rho^n = u_t(t^{n-\frac{1}{2}}) - \partial_t u^n$. 在式(25) 中，令 $v_d = \eta_d^{n-\frac{1}{2}}$ 可得：

$$(\partial_t \eta_d^n, \eta_d^{n-\frac{1}{2}}) - (\partial_t \xi_d^n, \eta_d^{n-\frac{1}{2}}) + (\rho^n, \eta_d^{n-\frac{1}{2}}) + \nu(\eta_{dx}^{n-\frac{1}{2}}, \eta_{dx}^{n-\frac{1}{2}}) - \nu(\xi_{dx}^{n-\frac{1}{2}}, \eta_{dx}^{n-\frac{1}{2}}) -$$
$$\mu(\eta_{dxx}^{n-\frac{1}{2}}, \eta_{dx}^{n-\frac{1}{2}}) + \mu(\xi_{dxx}^{n-\frac{1}{2}}, \eta_{dx}^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{\varepsilon}{2}((u^{n-\frac{1}{2}})^2 - (u_d^{n-\frac{1}{2}})^2, \eta_{dx}^{n-\frac{1}{2}}) = 0.$$

再利用 Young 不等式和引理 2 可得：

$$\| \eta_d^n \|^2 - \| \eta_d^{n-1} \|^2 + 2k\nu \| \eta_{dx}^{n-\frac{1}{2}} \|^2 \leqslant k \| \partial_t \xi_d^n \|^2 + k \| \eta_d^{n-1} \|^2 + k\nu \| \xi_{dx}^{n-\frac{1}{2}} \|^2 +$$
$$k\nu \| \eta_{dx}^{n-\frac{1}{2}} \|^2 + \frac{Ck\mu^2}{\nu h^2} \| \xi_{dx}^{n-\frac{1}{2}} \|^2 + \frac{k\nu}{8} \| \eta_{dx}^{n-\frac{1}{2}} \|^2 + k \| \rho^n \|^2 +$$
$$k \| \eta_d^{n-\frac{1}{2}} \|^2 + \frac{k\nu}{8} \| \eta_{dx}^{n-\frac{1}{2}} \|^2 + \frac{Ck\varepsilon^2}{\nu}(\| \eta_d^{n-\frac{1}{2}} \|^2 + \| \xi_d^{n-\frac{1}{2}} \|^2). \tag{26}$$

对式(26) 进行整理可得如下不等式：

$$(1 - Ck) \| \eta_d^n \|^2 + \frac{3k\nu}{4} \| \eta_{dx}^{n-\frac{1}{2}} \|^2 \leqslant (1 + Ck) \| \eta_d^{n-1} \|^2 + k \| \partial_t \xi_d^n \|^2 +$$
$$k\nu \| \xi_{dx}^{n-\frac{1}{2}} \|^2 + \frac{Ck\varepsilon^2}{\nu h^2} \| \xi_{dx}^{n-\frac{1}{2}} \|^2 + k \| \rho^n \|^2 + \frac{Ck\varepsilon^2}{\nu} \| \xi_d^{n-\frac{1}{2}} \|^2.$$

利用泰勒公式对 ρ^n 进行计算可得 $\| \rho^n \|^2 \leqslant Ck^3 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| u_{ttt}(s) \|^2 \mathrm{d}s$. 再结合引理 2 可得：

$$(1 - Ck) \| \eta_d^n \|^2 + \frac{3k\nu}{16} \| \eta_{dx}^n \|^2 \leqslant (1 - Ck) \| \eta_d^{n-1} \|^2 + 2Ck \| \eta_d^{n-1} \|^2 + \frac{3k\nu}{16} \| \eta_{dx}^{n-1} \|^2 +$$
$$Ck(\| \partial_t \xi_d^n \|^2 + \| \xi_d^n \|^2 + \| \xi_d^{n-1} \|^2 + \| \xi_{dx}^n \|^2 + \| \xi_{dx}^{n-1} \|^2) +$$
$$Ck\left(h^{-2} \| \xi_{dx}^n \|^2 + h^{-2} \| \xi_{dx}^{n-1} \|^2 + k^3 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| u_{ttt}(s) \|^2 \mathrm{d}s\right).$$

将上式从 $n = 1$ 到 N 求和可得：

$$(1 - Ck) \| \eta_d^N \|^2 + \frac{3\nu k}{16} \| \eta_{dx}^N \|^2 \leqslant 2Ck \sum_{n=1}^{N} \| \eta_d^{n-1} \|^2 + Ck\left(k^3 \int_{t_0}^{t_N} \| u_{ttt} \|^2 \mathrm{d}s\right) +$$
$$Ck(\sum_{n=1}^{N} \| \partial_t \xi_d^n \|^2 + \sum_{n=1}^{N} \| \xi_{dx}^n \|^2 + h^{-2} \sum_{n=1}^{N} \| \xi_{dx}^n \|^2 + \sum_{n=1}^{N} \| \xi_d^n \|^2).$$

选择合适的 k 使 $1 - Ck \geqslant 0$，则有：

$$\|\eta_d^N\|^2 + \frac{3\nu k}{16(1-Ck)}\|\eta_{dx}^N\|^2 \leqslant \frac{2Ck}{1-Ck}\|\eta_d^{n-1}\|^2 + \frac{Ck}{1-Ck}(h^{-2}\sum_{n=1}^{N}\|\xi_{dx}^n\|^2) + \frac{Ck}{1-Ck}\Big(k^3\int_{t_0}^{t_N}\|u_{ttt}\|^2\mathrm{d}s + \sum_{n=1}^{N}\|\partial_t\xi_d^n\|^2 + \sum_{n=1}^{N}\|\xi_{dx}^n\|^2 + \sum_{n=1}^{N}\|\xi_d^n\|^2\Big). \tag{27}$$

对式(27)应用引理 3 可得 $\|\eta_d^N\|^2 + \nu k\|\eta_{dx}^N\|^2 \leqslant C(h^{2r-2} + k^4 + \sum_{i=l+1}^{d}\lambda_i)$. 由此根据 $\|u_h^N - u_d^N\| \leqslant \|u^N - P_d u^N\| + \|P_d u^N - u_d^N\|$ 的三角形不等式可知式(24)成立,证毕.

参考文献:

[1] SAKA B, DA D. Quartic B-spline Galerkin approach to the numerical solution of the KdVB equation[J]. Applied Mathematics & Computation, 2009,215(2):746-758.

[2] JOHNSON R S. A nonlinear equation incorporating damping and dispersion[J]. J Fluid Mech, 1970,42:49-60.

[3] BONA J L, SCHONBEK M E. Travelling wave solutions to the Korteweg-de Vries-Burgers equation[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1985,101(3/4):207-226.

[4] ZAKI S I. A quintic B-spline finite elements scheme for the KdVB equation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2000,188(1/3):121-134.

[5] SAHU B, ROYCHOUDHURY R. Travelling wave solution of Korteweg-de Vries-Burger's equation[J]. Czechoslovak Journal of Physics, 2003,53(6):517-527.

[6] DEMIRAY H. A travelling wave solution to the KdV-Burgers equation[J]. Applied Mathematics and Computation Elsevier, 2004,154:665-670.

[7] HELAL M A, MEHANNA M S. A comparison between two different methods for solving KdV-Burgers equation [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2006,28(2):320-326.

[8] 郭瑞,王周峰,王振华. Kdv 浅水波方程的 Crank-Nicolson 差分格式[J]. 河南科技大学学报(自然科学版),2012,33(2):70-74.

[9] 潘悦悦,吴立飞,杨晓忠. Burgers-Fisher 方程改进的交替分段 Crank-Nicolson 并行差分方法[J]. 高校应用数学学报 A 辑,2021,36(2):193-207.

[10] GRAD H, HU P N. Unified shock profile in a plasma[J]. The Physics of Fluids, 1967,10(12):2596-2602.

[11] ROSENAU P. A Quasi-Continuous description of a nonlinear transmission line[J]. Physica Scripta, 1986,34(6B):827.

[12] KUNISCH K, VOLKWEIN S. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems[J]. Numerische Mathematik, 2001,90:117-148.

[13] 赵锦玮,朴光日. Navier-Stokes 系统降维模型中线性反馈控制的分析与逼近[J]. 延边大学学报(自然科学版),2020,46(4):295-301.