文章编号： 1004-4353(2022)01-0013-06

基于 POD 方法的广义 KdV-RLW-Rosenau 方程的数值解

张宝玖， 朴光日
(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要： 讨论了 KdV-RLW-Rosenau 方程降维模型的数值解问题. 首先在介绍半离散 B 样条 Galerkin 近似的基础上，应用 Crank-Nicolson 方法研究了全离散的 B 样条 Galerkin 格式；然后将适当的特征正交分解(POD)方法应用于广义 KdV-RLW-Rosenau 方程的 Galerkin finite element(GFE)格式，使其简化为低维度和高精度的 POD GFE 格式；最后利用数值实验证明了所得结果的正确性.

关键词： 特征正交分解；广义 KdV-RLW-Rosenau 方程；降维模型；数值分析
中图分类号： O241.82 **文献标识码：** A

The numerical solution of generalized KdV-RLW-Rosenau equations based on POD method

ZHANG Baojiu， PIAO Guangri
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: This paper discusses the numerical solution of KdV-RLW-Rosenau in a reduced-order modeling. Firstly, based on the introduction of semi discrete B-spline Galerkin approximation, the fully discrete B-spline Galerkin scheme is studied by using Crank Nicolson method; And then, a proper orthogonal decomposition (POD) method is applied to a Galerkin finite element (GFE) formulation for generalized KdV-RLW-Rosenau equation such that it is reduced into a POD GFE formulation with lower dimensions and enough high accuracy; Finally, numerical experiments show the correctness of the results.

Keywords: proper orthogonal decomposition; generalized KdV-RLW-Rosenau equation; reduced-orderd modeling; numerical analysis

0 引言

本文考虑具有如下初边值问题的单向水波传播的高阶方程：

$$\begin{cases} u_t - \mu u_{xx} - \delta u_{xxt} + \eta u_{xxxx} + \nu u_{xxxxt} + \theta u_{xxx} + f_x(u) = 0, \ x \in \Omega, \ t \in (0,T]; \\ u(x,t) = 0, \ u_x(x,t) = 0, \ x \in \partial\Omega, \ t \in (0,T]; \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中：$f(u) = \alpha u + \dfrac{\beta}{p+1} u^{p+1}$；$u(x,t)$、$t > 0$ 和 $\Omega \in (0,1)$ 分别表示振幅、时间和空间坐标；δ 和 ν 为

收稿日期： 2021-11-22
基金项目： 吉林省科技计划发展项目(20180101215JC)
第一作者： 张宝玖(1997—)，男，硕士研究生，研究方向为数值计算.
通信作者： 朴光日(1968—)，男(朝鲜族)，博士，教授，研究方向为数值计算.

大于 0 的常数；α、β、μ、η、θ 为任意的参数；P 为非线性项次数，$P \geqslant 2$.

近年来，许多学者研究了非线性偏微分方程的解析和数值问题，并且给出了相对应的模型[1-5]. 在此基础上，文献[6] 分析了扰动(无黏性)Rosenau-KdV-RLW 方程；文献[7] 采用三阶隐式有限差分法求解了 Rosenau-KdV-RLW 方程，并对无黏性 Rosenau-KdV 方程和无黏性 Rosenau-RLW 方程进行了数值求解；文献[8] 应用有限元法和局部结构保持技术对无黏性 Rosennau-KdV-RLW 方程进行了数值求解. 基于上述研究，本文运用 POD 方法讨论了 KdV-RLW-Rosenau 方程的数值解问题，并估计了降维模型解与有限元解之间的误差，最后用数值实验验证了本文结果的正确性.

1 KdV-RLW-Rosenau 方程的全离散格式

本文使用 Sobolev 空间 $H_0^k(\Omega)$ 进行研究，并定义 $H_0^k(\Omega)$ 为：

$$H_0^k=\{v\in H^k(\Omega):\frac{\mathrm{d}^j v}{\mathrm{d}x^j}=0\bigg|_{\partial\Omega},\ j=0,1,\cdots,k-1\}.$$

其中 $L^2(\Omega)$、$L^\infty(\Omega)$ 和 $H^k(\Omega)$ 的范数分别记为 $\|\cdot\|$、$\|\cdot\|_\infty$ 和 $\|\cdot\|_k$，并定义 $(v,w)=\int_\Omega vw\,\mathrm{d}x$ 为 $L^2(\Omega)$ 的内积. 为了研究方程(1) 的弱形式，令 $X=H_0^2(\Omega)$，并选取 $\chi\in X$. 对方程(1) 做分部积分后得到的方程(1) 的弱形式为：

$$\begin{cases}(u_t,\chi)+\mu(u_x,\chi_x)+\delta(u_{xt},\chi_x)+\eta(u_{xx},\chi_{xx})+\nu(u_{xxt},\chi_{xx})-\theta(u_{xx},\chi_x)= \\ \qquad (f(u),\chi_x),\ \forall\chi\in X; \\ u(0)=u_0.\end{cases} \tag{2}$$

在本研究中假设 u 在时间 t 上是足够光滑的，C 表示一个与阶数 h 和 k 无关的常数，且在不同的情况下 C 有不同的值.

定理 1[9] 令 $u_0\in X$，对于任意的 $T>0$ 存在方程(2) 的唯一解 $u(u(x,0),\chi)=(u_0,\chi)$ 和一个与 T 无关的常数 C，使得 $\|u\|_{L^\infty(H^2(\Omega))}\leqslant C\|u_0\|_2$，其中 $\|u\|_{L^\infty(H^2(\Omega))}=\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}$.

本文将区间[0,1] 剖分为 $0=x_0<x_1<\cdots<x_I=1$，同时将[0,1] 划分为子区间 $J_i=(x_{i-1},x_i)$. 令 $h=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant I}(x_i-x_{i-1})$，并将 X 的一个子空间定义为：

$$X_h=\{v\in C^1(\Omega),\ v|_{J_i}\in P_2(J_i),\ i=1,\cdots,I,\ v|_{\partial\Omega}=0,\ v'|_{\partial\Omega}=0\}.$$

其中 $P_2(J_i)$ 为 J_i 上的多项式集合，且其次数小于等于 2. 由此可知该有限元空间满足文献[10] 中的逼近理论.

引理 1[9] 当 $v\in H^4(\Omega)\cap X$，并且 $\chi\in X_h$ 时，存在一个与 h 无关的常数 C 使得

$$\|v-\chi\|_2\leqslant Ch^2\|v\|_4.$$

定义式(2) 的半离散 Galerkin 逼近为：函数 $u_h:[0,T]\to X_h$，使得

$$\begin{cases}(u_{ht},\chi)+\mu(u_{hx},\chi_x)+\delta(u_{hxt},\chi_x)+\eta(u_{hxx},\chi_{xx})+\nu(u_{hxxt},\chi_{xx})- \\ \qquad \theta(u_{hxx},\chi_x)=(f(u_h),\chi_x),\ \chi\in X_h; \\ u_h(0)=u_{h0}.\end{cases} \tag{3}$$

式(3) 中 u_{h0} 是 u_0 的一个适当近似值.

为了求解半离散(3) 的近似解，用 Crank-Nicolson 差分法对式(3) 在时间上进行全离散. 设 N 为一个正整数，k 为时间步长增量($k=T/N$)，$t^n=nk\ (0\leqslant N\leqslant k)$，并令 $\zeta^n=\zeta(t^n)$，$\partial_t\zeta^n=\dfrac{\zeta^n-\zeta^{n-1}}{k}$，$\zeta^{n-\frac{1}{2}}=\dfrac{\zeta^n+\zeta^{n-1}}{2}$，则由文献[9] 可知 u_h^n 是如下 Galerkin-Crank-Nicolson 全离散形式的解：

$$\begin{cases}(\partial_t u_h^n,\chi)+\delta(\partial_t u_{hx}^n,\chi_x)+\nu(\partial_t u_{hxx}^n,\chi_{xx})+\mu(u_{hx}^{n-\frac{1}{2}},\chi_x)+\eta(u_{hxx}^{n-\frac{1}{2}},\chi_{xx})-\\ \qquad\theta(u_{hxx}^{n-\frac{1}{2}},\chi_x)=(f(u_h^{n-\frac{1}{2}}),\chi_x),\ \chi\in X_h;\\ u_h^0=u_{h0}.\end{cases}\tag{4}$$

式(4)中 $u_{h0}\in X_h$ 是 u_0 的适当近似值.

2　POD 基的构造

构造 POD 基的方法如下:给定有限元空间 X_h、空间步长 h 和时间步长增量 k,然后通过解方程(4)得到解的集合.从集合中取 $L\ (L\ll N)$ 个样本点 $u_h^{n_i}(x)(1\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_L\leqslant N)$,这些样本点为 POD 方法中的瞬像.令 $\boldsymbol{U}_i(x)=u_h^{n_i}(x)\ (1\leqslant i\leqslant L)$,$V=\mathrm{span}\{\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_L\}$,并称 V 为由瞬像集 $\{\boldsymbol{U}_i\}_{i=1}^L$ 张成的空间,其中 $\{\boldsymbol{U}_i\}_{i=1}^L$ 至少有一个非零元.记 $l=\dim V$,并用 $\{\boldsymbol{\psi}_j\}_{j=1}^l$ 表示 l 维数空间 V 的标准正交基,于是有:

$$\boldsymbol{U}_i=\sum_{j=1}^{l}(\boldsymbol{U}_i,\boldsymbol{\psi}_j)_X\boldsymbol{\psi}_j,\ i=1,2,\cdots,L.\tag{5}$$

式(5)中 $(\boldsymbol{U}_i,\boldsymbol{\psi}_j)_X=(u_{hxx}^{n_i},\boldsymbol{\psi}_{jxx})$.

构造 POD 方法的目的就是通过求解标准正交基 $\boldsymbol{\psi}_j\ (j=1,2,\cdots,l)$ 使元素 $\boldsymbol{U}_i\ (1\leqslant i\leqslant L)$ 与式(5)的 d 项和之间的均方误差在平均意义下最小,即通过求解标准正交基 $\boldsymbol{\psi}_j\ (i=1,2,\cdots,l)$ 使得

$$\min_{\{\psi_j\}_{j=1}^d}\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left\|\boldsymbol{U}_i-\sum_{j=1}^{d}(\boldsymbol{U}_i,\boldsymbol{\psi}_j)_X\boldsymbol{\psi}_j\right\|_X^2\tag{6}$$

满足

$$(\boldsymbol{\psi}_i,\boldsymbol{\psi}_j)_X=\delta_{ij},\ 1\leqslant i\leqslant d,\ 1\leqslant j\leqslant i.\tag{7}$$

式(6)中 $\|\boldsymbol{U}_i\|_X^2=\|u_{hxx}^{n_i}\|_0^2$.式(6)和式(7)的解 $\{\boldsymbol{\psi}_j\}_{j=1}^d$ 称为秩等于 d 的 POD 基.

引入瞬像集 $\{\boldsymbol{U}_i\}_{i=1}^L$ 对应的相关矩阵 $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{G}_{ij})_{L\times L}\in R^{L\times L}$,$\boldsymbol{G}_{ij}=\dfrac{1}{L}(\boldsymbol{U}_i,\boldsymbol{U}_j)_X$,则 $\boldsymbol{G}$ 是秩为 l 的非负正定矩阵.设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_l>0$ 为矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的特征值(特征值对应的标准正交特征向量为 $\boldsymbol{v}^1,\boldsymbol{v}^2,\cdots,\boldsymbol{v}^l$),则秩 $d\leqslant l$ 的 POD 基可写为 $\boldsymbol{\psi}_i=\dfrac{1}{\sqrt{L\lambda_i}}\displaystyle\sum_{j=1}^{L}(\boldsymbol{v}^i)_j\boldsymbol{U}_j$,$1\leqslant i\leqslant d\leqslant l$,其中 $(\boldsymbol{v}^i)_j$ 为特征向量 $\boldsymbol{v}^i$ 的第 j 个分量.

令 $X^d=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2,\cdots,\boldsymbol{\psi}_d\}$,且定义 Ritz 投影 $P^h:X\rightarrow X_h$(如果 P^h 是被限制为从 X_h 到 X^d 的 Ritz 投影时,则将 P^h 记为 P^d,即 $P^h|_{X_h}=P^d:X_h\rightarrow X^d$ 和 $P^h:X\backslash X_h\rightarrow X_h\backslash X^d$),则:

$$((P^h\boldsymbol{U})_{xx},\boldsymbol{v}_{hxx})=(\boldsymbol{U}_{xx},\boldsymbol{v}_{hxx}),\ \forall\,\boldsymbol{v}_h\in X_h.\tag{8}$$

式(8)中 $\boldsymbol{U}\in X$,线性算子 P^h 的性质为 $\|(P^h\boldsymbol{U})_{xx}\|\leqslant\|\boldsymbol{U}_{xx}\|$,$\forall\,\boldsymbol{U}\in X$.

引理 2　对于每个 $d\ (1\leqslant d\leqslant l)$,投影算子 P^d 有如下不等式成立:

$$\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\|(u_h^{n_i}-P^du_h^{n_i})_{xx}\|^2\leqslant\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j;\tag{9}$$

$$\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\|(u_h^{n_i}-P^du_h^{n_i})_x\|^2\leqslant Ch^2\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j;\tag{10}$$

$$\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\|u_h^{n_i}-P^du_h^{n_i}\|^2\leqslant Ch^4\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j.\tag{11}$$

上式中 $u_h^{n_i}\in V$ 是方程(4)的解.

证明 由于文献[11]已经给出不等式(9)和(11)的证明过程,因此在此只证明不等式(10).已知

$$((\boldsymbol{U}-P^h\boldsymbol{U})_x,(\boldsymbol{U}-P^h\boldsymbol{U})_x)=((\boldsymbol{U}-P^h\boldsymbol{U})_{xx},P^h\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U})\leqslant\|(\boldsymbol{U}-P^h\boldsymbol{U})_{xx}\|\|\boldsymbol{U}-P^h\boldsymbol{U}\|.$$

在该式中如果 $\boldsymbol{U}=u_h^{n_i}$, P^h 是从 X_h 到 X^d 的 Ritz 投影,则有 $P^h u_h^{n_i}=P^d u_h^{n_i}\in X^d$,故可得:

$$\|(u_h^{n_i}-P^d u_h^{n_i})_x\|^2\leqslant\|(u_h^{n_i}-P^d u_h^{n_i})_{xx}\|\cdot\|u_h^{n_i}-P^d u_h^{n_i}\|.$$

再应用不等式 $\sum a_i b_i\leqslant\sum a_i\sum b_i$ 和 $\sum a_i\leqslant C\left(\sum a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 以及不等式(9)和(11)可知式(10)成立.

3 有限元解与降维解之间的误差估计

根据空间 X^d 得到方程(2)的降维格式为:

$$\begin{cases}(\partial_t u_d^n,\chi)+\delta(\partial_t u_{dx}^n,\chi_x)+\nu(\partial_t u_{dxx}^n,\chi_{xx})+\mu(u_{dx}^{n-\frac{1}{2}},\chi_x)+\\ \qquad\eta(u_{dxx}^{n-\frac{1}{2}},\chi_{xx})-\theta(u_{dxx}^{n-\frac{1}{2}},\chi_x)=(f(u_d^{n-\frac{1}{2}}),\chi_x),\ \chi\in X^d;\\ u_d^0=u_{d0}.\end{cases}\tag{12}$$

由文献[11]可知降维格式(12)具有唯一解 $u_d^n\in X^d$,故式(12)的稳定性保持不变.以下利用有限元方法推导形式(12)的误差估计.

定理2 如果 $u_h^n\in X_h$ 是方程(4)的解,并且 $u_d^n\in X^d$ 是方程(12)的解,则当 $k=O(h^{2/3})$, $l=O(N^{2/3})$ 且均匀选取瞬像时有 $\|u_h^n-u_d^n\|_2\leqslant Ck^2+Ck(\sum\limits_{j=d+1}^{l}\lambda_j)^{1/2}$.

证明 用方程(4)减去方程(12),并取 $\chi=v_d\in X^d$ 可得:

$$(\partial_t(u_h^n-u_d^n),v_d)+\delta(\partial_t(u_{hx}^n-u_{dx}^n),v_{dx})+\nu(\partial_t(u_{hxx}^n-u_{dxx}^n),v_{dxx})+\mu(u_{hx}^{n-\frac{1}{2}}-u_{dx}^{n-\frac{1}{2}},v_{dx})+$$
$$\eta(u_{hxx}^{n-\frac{1}{2}}-u_{dxx}^{n-\frac{1}{2}},v_{dxx})+\theta(u_{hx}^{n-\frac{1}{2}}-u_{dx}^{n-\frac{1}{2}},v_{dxx})=(f(u_h^{n-\frac{1}{2}}-u_d^{n-\frac{1}{2}}),v_{dx}).\tag{13}$$

将标准误差 $e=u_h^n-u_d^n$ 分解为 $e=u_h^n-u_d^n=u_h^n-P^d u_h^n-(u_d^n-P^d u_h^n)=\xi^n-\varphi^n$,并设 $v_d=\varphi^n$.于是将 ξ^n 和 φ^n 代入式(13)有:

$$\|\varphi^n\|^2+\delta\|\varphi_x^n\|^2+\nu\|\varphi_{xx}^n\|^2=(\varphi^{n-1},\varphi^n)+\delta(\varphi_x^{n-1},\varphi_x^n)+\nu(\varphi_{xx}^{n-1},\varphi_{xx}^n)+(\xi^n-\xi^{n-1},\varphi^n)+$$
$$\delta(\xi_x^n-\xi_x^{n-1},\varphi_x^n)+\nu(\xi_{xx}^n-\xi_{xx}^{n-1},\varphi_{xx}^n)+\frac{k\mu}{2}(\xi_x^n+\xi_x^{n-1},\varphi_x^n)-$$
$$\frac{k\mu}{2}(\varphi_x^n+\varphi_x^{n-1},\varphi_x^n)+\frac{k\eta}{2}(\xi_{xx}^n+\xi_{xx}^{n-1},\varphi_{xx}^n)-\frac{k\eta}{2}(\varphi_{xx}^n+\varphi_{xx}^{n-1},\varphi_{xx}^n)+$$
$$\frac{k\theta}{2}(\xi_x^n+\xi_x^{n-1},\varphi_{xx}^n)-\frac{k\theta}{2}(\varphi_x^n+\varphi_x^{n-1},\varphi_{xx}^n)+k(f(u_d^{n-\frac{1}{2}})-f(u_h^{n-\frac{1}{2}}),\varphi_x^n).$$

应用 Young 不等式、f 的 Lipschitz 条件以及 $\|u_h^n\|_\infty$ 和 $\|u_d^n\|_\infty$ 的有界性易得:

$$(f(u_d^{n-\frac{1}{2}})-f(u_h^{n-\frac{1}{2}}),\varphi_x^n)\leqslant\|f(u_d^{n-\frac{1}{2}})-f(u_h^{n-\frac{1}{2}})\|\ \|\varphi_x^n\|\leqslant kC\|u_h^{n-\frac{1}{2}}-u_d^{n-\frac{1}{2}}\|\|\varphi_x^n\|\leqslant$$
$$kC(\|\xi^n\|+\|\varphi^n\|+\|\xi^{n-1}\|+\|\varphi^{n-1}\|)\|\varphi_x^n\|\leqslant$$
$$\frac{kC}{4\varepsilon}(\|\xi^n\|^2+\|\varphi^n\|^2+\|\xi^{n-1}\|^2+\|\varphi^{n-1}\|^2+16\varepsilon^2\|\varphi_x^n\|^2).\tag{14}$$

对不等式(14)选取足够小的 k 和适当的 ε,可得 $\|\varphi^n\|_2^2\leqslant Ch^2(\sum\limits_{j=1}^{n}\|\xi^J{}_{xx}\|^2+\sum\limits_{j=0}^{n-1}\|\xi^j\|_1^2)$,再根据三角不等式以及 POD 的性质可知定理2成立.

由定理2的假设并结合 Sobolev 不等式可得方程(2)的解和方程(12)的解之间的误差估计,为:

$$\|u^n - u_d^n\|_\infty \leqslant Ch^2 + Ck^2 + Ck\Big(\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j\Big)^{1/2}.$$

4　数值实验

例 1　考虑下列 KdV-RLW-Rosenau 方程：

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{xxt} + u_{xxxx} + u_{xxxxt} + u_{xxx} + u_x + uu_x = g(x,t),\ (x,t) \in (0,1] \times (0,10]; \\ u(0,t) = u(1,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0,\ t \in (0,10]; \\ u(x,0) = x^2(1-x)^2,\ x \in [0,1]. \end{cases} \tag{15}$$

其中 $g(x,t) = -\mathrm{e}^{12t}(12\mathrm{e}^t + 7x^2\mathrm{e}^t - 6x^3\mathrm{e}^t + x^4\mathrm{e}^t - 26x\mathrm{e}^t - 2x^3 + 10x^4 - 18x^5 + 14x^6 - 4x^7)$，精确解为 $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t}x^2(x-1)^2$.

表 1 为方程(15) 在 $t = 10$ 时利用方程(4) 所得的误差估计和收敛阶. 由表 1 中的数据可知，常规的 GFE 解的误差估计受 h 和 k 的影响较大.

表 1　在 $t = 10$ 时利用方程(4) 解方程(15) 所得到的解的误差估计和收敛阶

h	k	$\|u^n - u_h^n\|_\infty$	Order	$\|u^n - u_d^n\|_\infty/(h^2+k^2)$
1/10	1/10	2.8080×10^{-8}	—	1.4040×10^{-6}
1/20	1/20	5.9795×10^{-9}	2.1670	1.1959×10^{-6}
1/40	1/40	1.4312×10^{-9}	2.0440	1.4500×10^{-6}
1/80	1/80	3.5376×10^{-10}	2.0114	1.1320×10^{-6}
1/160	1/160	8.6987×10^{-11}	2.0166	1.1134×10^{-6}

数值实验中假设空间步长 $h = 0.01$，时间步长 $k = 0.05$，由此得到的方程(15) 的数值解见图 1. 其中图 1(a) 为方程(15) 利用方程(4) 得到的数值解，图 1(b) 为方程(15) 利用方程(12) 得到的数值解. 由图可以看出，两种方法得到的数值解几乎无差别.

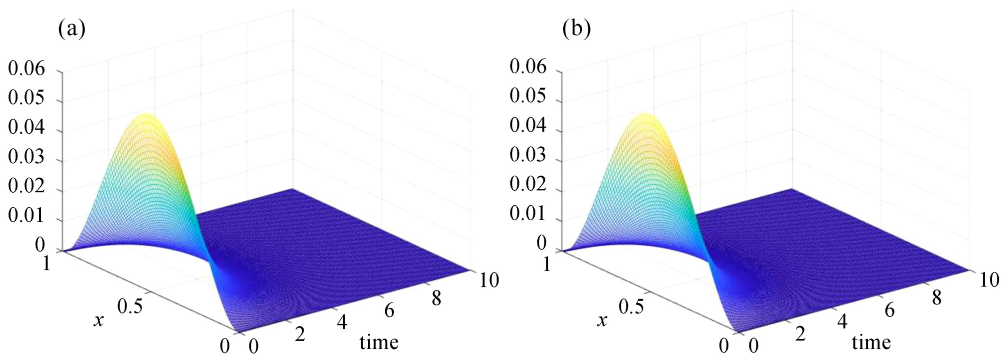

图 1　方程(15) 的常规 GFE 解(a) 和 POD(8 基)GFE 解(b)

表 2 为 $t = 10$，$h = 0.01$，$k = 0.05$ 时方程(15) 的 POD GFE 解的误差估计和收敛速率，其中 d、λ_j、Ratio 分别表示 POD 基数、特征向量和 $\|u^n - u_d^n\|_\infty/(h^2 + k^2 + k(\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j)^{1/2})$. 由表 2 可以看出，当 POD 基数不同时方程(15) 的误差和收敛速率仍然保持相对稳定. 对比表 1 和表 2 可知，POD GFE 的解显著优于常规 GFE 的解.

图 2 为 $t = 10$，$h = 0.01$，$k = 0.05$，POD 基数不同时 POD GFE 解和精确解之间的误差(上部分线段)和常规的 GFE 解和精确解之间的误差(下部分线段). 由图 2 可以看出，数值实验结果和定理 2 的结果一致. 再结合表 2 易知，计算 POD GFE 解所需的时间远少于计算常规的 GFE 解所需的时间.

表 2 利用方程(12)解方程(15)所得到的解的误差估计和收敛速率

d	$k(\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j)^{1/2}$	$\lVert u^n - u_d^n \rVert_\infty$	Ratio
2	2.8783×10^{-4}	5.8492×10^{-9}	2.0255×10^{-6}
4	1.8863×10^{-4}	5.8043×10^{-9}	2.0814×10^{-6}
6	1.3610×10^{-4}	5.7050×10^{-9}	2.0851×10^{-6}
8	1.0902×10^{-4}	5.6895×10^{-9}	2.1001×10^{-6}
10	8.1327×10^{-5}	5.6828×10^{-9}	2.1194×10^{-6}
12	5.3441×10^{-5}	5.6779×10^{-9}	2.1398×10^{-6}
14	3.9221×10^{-5}	5.6678×10^{-9}	2.1475×10^{-6}
16	2.5628×10^{-5}	5.6641×10^{-9}	2.1532×10^{-6}

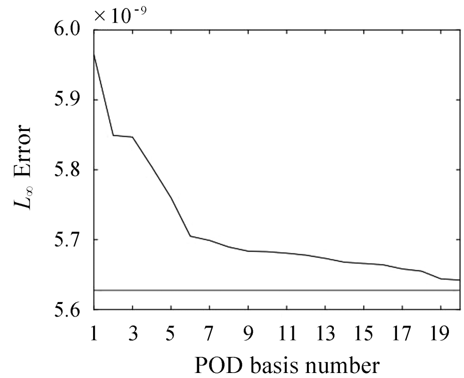

图 2 降维模型解和精确解之间的误差以及常规的 GFE 解和精确解之间的误差

参考文献:

[1] BENJAMIN T B, BONA J L, MAHONY J J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1972,272(12):47-78.

[2] KORTEWEG D J, VRIES G D. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves[J]. Philosophical Magazine, 2011,91(6):422-443.

[3] RASLAN K R. A computational method for the regularized long wave (RLW) equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005,167(2):1101-1118.

[4] ESEN A, KUTLUAY S. Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006,174(2):833-845.

[5] ABDULLOEV K O, BOGOLUBSKY I L, MAKHANKOV V G. One more example of inelastic soliton interaction[J]. Physics Letters A, 1976,56(6):427-428.

[6] SANCHEZ P, EBADI G, MOJAVER A, et al. Solitons and other solutions to perturbed Rosenau-KdV-RLW equation with power law nonlinearity[J]. Acta Physica Polonica Series A, 2015,127(6):1577-1587.

[7] WONGSAIJAI B, POOCHINAPAN K. A three-level average implicit finite difference scheme to solve equation obtained by coupling the Rosenau-KdV equation and the Rosenau-RLW equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014,245(7):289-304.

[8] PAN X T, WANG Y J, ZHANG L M. Numerical analysis of a pseudo-compact CN conservative scheme for the Rosenau-KdV equation coupling with the Rosenau-RLW equation[J]. Boundary Value Problems, 2015,2015(1):1-17.

[9] PIAO G G, LEE J Y, CAI G X. Analysis and computational method based on quadratic B-spline FEM for the Rosenau-Burgers equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2016,32(3):877-895.

[10] PAN X T, ZHENG K L, ZHANG L M. Finite difference discretization of the Rosenau-RLW equation[J]. Applicable Analysis, 2013,92(12):2578-2589.

[11] LUO Z D, ZHOU Y J, YANG X Z. A reduced finite element formulation based on proper orthogonal decomposition for Burgers equation[J]. Applied Numerical Mathematics, 2009,59(8):1933-1946.