

文章编号: 1004-4353(2022)01-0001-05

乘积度量空间上具有唯一不动点的 G -隐式压缩映射

朴勇杰

(延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 通过定义一个四元实函数类 G 并在乘积度量空间上引进 G -隐式压缩映射的概念, 得到了在完备乘积度量空间上任何满足 G -隐式压缩条件的映射具有唯一不动点的定理, 并由该定理推导出 2 个 Ćirić 型不动点定理. 最后, 通过两个实例验证了所得结果的正确性.

关键词: 乘积度量空间; Ćirić-拟压缩; G -隐式压缩; 完备; 不动点

中图分类号: O177.91; O189.11

文献标识码: A

G -implicit contractive mappings having an unique fixed point on multiplicative metric spaces

PIAO Yongjie

(College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: In this paper, by defining a class G of 4-dimensional real functions and introducing the concept of G -implicit contractive mappings on multiplicative metric spaces, we obtain one theorem having an unique fixed point for any mappings satisfying G -implicit contractive conditions on complete multiplicative metric spaces and give two Ćirić type fixed point theorems as corollaries of the theorem. Finally, we give two examples to verify the correctness of the given results.

Keywords: multiplicative metric space; Ćirić-quasi contraction; G -implicit contraction; complete; fixed point

1974 年, Ćirić^[1] 在完备的实度量空间上引进了拟压缩自映射的概念, 并证明了如下不动点定理:

定理 1(Ćirić 不动点定理) 设 (X, d) 是完备度量空间, $f: X \rightarrow X$ 是自映射. 若存在 $k \in [0, 1)$ 使得对任何的 $x, y \in X$ 总有 $d(fx, fy) \leq k \max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), d(x, fy), d(y, fx)\}$ 成立, 则 f 必有唯一不动点(称满足上述条件的映射为 Ćirić 拟压缩映射).

在上述定理的基础上, 一些学者在 2-度量空间、偏度量空间、具有 Banach 代数的锥度量空间等上进一步推广和改进了 Ćirić 不动点定理^[2-8]. 2008 年, Bashirov 等^[9] 首次提出了乘积度量空间的概念, 并研究了该空间上的一些基本性质, 此后 Florack 等^[10] 和 Bashirov 等^[11] 对乘积度量空间的性质做了进一

收稿日期: 2021-12-02

基金项目: 国家自然科学基金(11761072)

作者简介: 朴勇杰(1962—), 男(朝鲜族), 理学博士, 教授, 研究方向为非线性分析和不动点理论.

步研究. 2012 年, Özavsar 等^[12]在乘积度量空间上引进了乘积压缩映射的概念, 并给出了若干个乘积压缩映射的不动点存在定理. 随后, 一些学者在乘积度量空间上给出了若干映射(族)的不动点和公共不动点存在性定理. 特别是文献[13-15]的作者通过定义若干个实函数类和引入半隐式压缩条件、限制压缩条件等方法讨论了不动点的存在性问题, 所得结果很好地推广和改进了 Banach-Kannan 型、Banach-Chatterjia 型和 Ćirić 型不动点定理.

首先, 给出文中所需的基本概念和性质.

定义 1^[9] 设 X 是非空集合, 称映射 $d: X \times X \rightarrow [1, +\infty)$ 是 X 上的乘积度量是指 d 满足:

- (i) 对任何 $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 1$ 且 $d(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$;
- (ii) 对任何 $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) 对任何 $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y)d(y, z)$.

如果 X 和 d 满足上述条件, 则称 (X, d) 为乘积度量空间.

定义 2^[12] 设 (X, d) 是乘积度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的序列且 $x \in X$. 若对任何 $\epsilon > 1$, 存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时 $x_n \in B_\epsilon(x) \triangleq \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$, 则称序列 $\{x_n\}$ 乘积收敛于 x , 并记为 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$.

引理 1^[12] 如果 (X, d) 是乘积度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的序列且 $x \in X$, 则

$$x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty).$$

定义 3^[12] 设 (X, d) 是乘积度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的序列. 若对任何 $\epsilon > 1$, 存在自然数 N , 使得当 $m, n > N$ 时 $d(x_m, x_n) < \epsilon$ 成立, 则称序列 $\{x_n\}$ 为乘积柯西序列.

引理 2^[12] 如果 (X, d) 是乘积度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的序列, 则 $\{x_n\}$ 是乘积柯西序列当且仅当 $d(x_m, x_n) \rightarrow 1 (m, n \rightarrow \infty)$.

定义 4^[12] 若乘积度量空间 (X, d) 中的每个乘积柯西序列都是乘积收敛的, 则称 (X, d) 是完备的.

引理 3^[12] 如果 (X, d) 是乘积度量空间, $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 X 中的两个序列且 $x, y \in X$, 则

$$x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty) \text{ 且 } y_n \rightarrow y (n \rightarrow \infty) \Rightarrow d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y) (n \rightarrow \infty).$$

定义 5 定义一个四元实函数类 $G: g \in G$ 当且仅当 $g: [1, \infty)^4 \rightarrow [1, \infty)$ 满足如下条件:

- G(i) g 是连续的且关于第四变元是单调递增的;
- G(ii) 存在实数 $k \in [0, 1)$, 当 $x, y \geq 1$ 且满足 $x \leq g(y, y, x, xy)$ 时 $x \leq y^k$ 成立;
- G(iii) 当 $x > 1$ 时 $x > g(x, 1, 1, x^2)$.

例 1 定义 $g(x, y, z, w) = [\max\{x, y, z, \sqrt{w}\}]^k, \forall x, y, z, w \geq 1$, 其中 $k \in [0, 1)$ 为常数. 显然, g 满足 G(i). 假设 $x \leq g(y, y, x, xy) = [\max\{y, y, x, \sqrt{xy}\}]^k$. 如果 $x > y$, 则 $x > 1$ 且 $\sqrt{xy} < x$, 由假设可推出 $x \leq x^k$, 矛盾, 因此必有 $x \leq y$. 由假设还可得 $x \leq y^k$, 由此知 G(ii) 成立. 当 $x > 1$ 时, $x > x^k = [\max\{x, 1, 1, x\}]^k = g(x, 1, 1, x^2)$, 由此知 G(iii) 成立.

例 2 定义 $g(x, y, z, w) = [\max\{x, y\}]^k [\max\{z, w\}]^l, \forall x, y, z, w \geq 1$, 其中非负实数 k 和 l 满足 $k + 2l < 1$. 显然, g 满足 G(i). 令 $q = \frac{k+l}{1-l}$, 则易知 $q \in [0, 1)$. 假设 $x \leq g(y, y, x, xy) = [\max\{y, y\}]^k [\max\{x, xy\}]^l = x^l y^{k+l}$, 则 $x \leq y^q$, 由此知 G(ii) 成立. 当 $x > 1$ 时, $g(x, 1, 1, x^2) = [\max\{x, 1\}]^k [\max\{1, x^2\}]^l = x^{k+2l} < x$, 由此知 G(iii) 成立.

定义 6 设 (X, d) 是完备的乘积度量空间, $f: X \rightarrow X$ 为自映射. 称 f 是 G -隐式压缩映射是指存在 $g \in G$ 使得对任何的 $x, y \in X$ 有下式成立:

$$d(fx, fy) \leq g(d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), d(x, fy)d(y, fx)). \quad (1)$$

定理 2 设 (X, d) 是完备的乘积度量空间, $f: X \rightarrow X$ 为自映射. 如果 f 是 G -隐式压缩映射, 则 f 有唯一不动点, 并且对任何 $x \in X$, 迭代序列 $\{f^n x\}$ 收敛于该唯一不动点.

证明 因为 f 是 G -隐式压缩映射, 因此存在 $g \in G$ 使得式(1) 成立. 任取 $x_0 = x \in X$, 则可按归纳原理构造出 X 中的一个序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使其满足 $x_n = f^n x = fx_{n-1}, n=1, 2, \dots$. 对任何 $n=1, 2, \dots$, 根据式(1)、定义 1 中的(i)、定义 1 中的(iii) 及 $G(i)$ 可得:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(fx_{n-1}, fx_n) \leq \\ &g(d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, fx_{n-1}), d(x_n, fx_n), d(x_{n-1}, fx_n)d(x_n, fx_{n-1})) = \\ &g(d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_{n+1})d(x_n, x_n)) \leq \\ &g(d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1})). \end{aligned}$$

于是再根据 $G(ii)$ 可得:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq [d(x_{n-1}, x_n)]^k, \forall n=1, 2, \dots. \quad (2)$$

由式(2) 和归纳原理可得:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq [d(x_0, x_1)]^{k^n}, \forall n=1, 2, \dots. \quad (3)$$

根据定义 1 中的(iii) 和式(3) 可得对于任何两个自然数 $m, n (n \geq m)$ 有:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1})d(x_{m+1}, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1})d(x_{m+1}, x_{m+2})d(x_{m+2}, x_n) \leq \dots \leq \\ &d(x_m, x_{m+1})d(x_{m+1}, x_{m+2}) \dots d(x_{n-2}, x_{n-1})d(x_{n-1}, x_n) \leq \\ &[d(x_0, x_1)]^{k^m} [d(x_0, x_1)]^{k^{m+1}} \dots [d(x_0, x_1)]^{k^{n-2}} [d(x_0, x_1)]^{k^{n-1}} \leq \\ &[d(x_0, x_1)]^{k^m(1+k+k^2+\dots+k^{n-m-1})} \leq [d(x_0, x_1)]^{\frac{k^m}{1-k}}. \end{aligned} \quad (4)$$

由式(4) 及 $k \in [0, 1)$ 可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 1. \quad (5)$$

由引理 2 和式(5) 可知序列 $\{x_n\}$ 是 X 中的乘积柯西序列. 根据 X 的完备性知存在 $x^* \in X$ 使得 $x_n \rightarrow x^*$, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时 $d(x_n, x^*) \rightarrow 1$. 由式(1) 知, 对于任何 $n=1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, fx^*) &= d(fx_n, fx^*) \leq \\ &g(d(x_n, x^*), d(x_n, fx_n), d(x^*, fx^*), d(x_n, fx^*)d(x^*, fx_n)) = \\ &g(d(x_n, x^*), d(x_n, x_{n+1}), d(x^*, fx^*), d(x_n, fx^*)d(x^*, x_{n+1})). \end{aligned}$$

对上式两边取极限后由引理 3 和 $G(i)$ 可得:

$$d(x^*, fx^*) \leq g(1, 1, d(x^*, fx^*), d(x^*, fx^*) \times 1).$$

再根据 $G(ii)$ 可得 $d(x^*, fx^*) \leq 1^k = 1, d(x^*, fx^*) = 1$, 因此 x^* 是 f 的一个不动点. 如果 y^* 也是 f 的一个不动点, 则根据式(1) 可得:

$$\begin{aligned} d(x^*, y^*) &= d(fx^*, fy^*) \leq g(d(x^*, y^*), d(x^*, fx^*), d(y^*, fy^*), d(x^*, fy^*)d(y^*, fx^*)) = \\ &g(d(x^*, y^*), 1, 1, [d(x^*, y^*)]^2). \end{aligned}$$

再根据 $G(iii)$ 可得 $d(x^*, y^*) = 1$, 因此可知 $x^* = y^*$ 是 f 的唯一不动点. 基于上述证明, 由 $x_n = f^n x$ 及 $x_n \rightarrow x^*$ 容易推出 $f^n x \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty \text{ 时})$.

根据定理 2 和例 1 可得到如下 Ćirić 型不动点定理(定理 3).

定理 3 设 (X, d) 是完备的乘积度量空间, $f: X \rightarrow X$ 是自映射. 如果对任何 $x, y \in X$,

$$d(fx, fy) \leq [\max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), \sqrt{d(x, fy)d(y, fx)}\}]^k,$$

其中 $k \in (0, 1)$, 则 f 在 X 中有唯一不动点.

根据定理 2 和例 2 可得到如下另一类 Ćirić 型不动点定理(定理 4).

定理 4 设 (X, d) 是完备的乘积度量空间, $f: X \rightarrow X$ 是自映射. 如果对任何 $x, y \in X$,

$$d(fx, fy) \leq [\max\{d(x, y), d(x, fx)\}]^k [\max\{d(y, fy), d(x, fy)d(y, fx)\}]^l,$$

其中非负实数 k 和 l 满足 $k + 2l < 1$, 则 f 在 X 中有唯一不动点.

例 3 在 $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 上定义函数 $d(x, y) = e^{|x-y|}$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 则 (\mathbf{R}, d) 是乘积度量空间(参看文献[11]). 令 $X = \{0, 2, 5\}$, 则显然 (X, d) 是完备的乘积度量空间. 定义 $f: X \rightarrow X$ 为 $f0 = f2 = 0$, $f5 = 2$, 并取 $k = 0.8$, 则:

当 $x, y \in \{0, 2\}$ 和 $x = y = 5$ 时,

$$d(fx, fy) = 1 \leq [\max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), \sqrt{d(x, fy)d(y, fx)}\}]^k;$$

当 $x = 0$ 和 $y = 5$ 时,

$$d(f0, f5) = e^2 < e^{5 \times 0.8} = [d(0, 5)]^k =$$

$$[\max\{d(0, 5), d(0, f0), d(5, f5), \sqrt{d(0, f5)d(5, f0)}\}]^k;$$

当 $x = 2$ 和 $y = 5$ 时,

$$d(f2, f5) = e^2 < e^{3 \times 0.8} = [\max\{d(2, 5), d(2, f2), d(5, f5), \sqrt{d(2, f5)d(5, f2)}\}]^k.$$

由上述验证可知 f 和 k 满足定理 3 的所有条件, 因此 f 有唯一不动点.

例 4 考虑例 3 中的 (X, d) 和 f . 取 $k = 0.7, l = 0.1$, 则 $k + 2l = 0.9 < 1$. 采用例 3 的证明方法可证得 f, k 和 l 满足定理 4 的所有条件(具体计算过程略), 因此利用定理 4 也可证明 f 有唯一不动点.

最后, 根据定理 2 给出如下特定子空间完备下的不动点存在性定理(定理 5).

定理 5 设 (X, d) 是乘积度量空间, $f: X \rightarrow X$ 是自映射且 fX 是完备的. 如果存在 $g \in G$ 使得对任何的 $x, y \in X$ 总有式(6)成立, 则 f 在 X 中存在唯一不动点.

$$d(f^2x, f^2y) \leq g(d(fx, fy), d(fx, f^2x), d(fy, f^2y), d(fx, f^2y)d(fy, f^2x)). \quad (6)$$

证明 由 $fX \subseteq X$ 可推出 $f(fX) \subseteq fX$, 因此可知 $f^* = f|_{fX}: fX \rightarrow fX$ 是完备乘积度量空间 (fX, d) 上的自映射. 由于对任何 $x^*, y^* \in fX$, 存在 $x, y \in X$ 使得 $x^* = fx, y^* = fy$, 因此根据式(6)可得:

$$\begin{aligned} d(f^*x^*, f^*y^*) &= d(f^2x, f^2y) \leq \\ &g(d(fx, fy), d(fx, f^2x), d(fy, f^2y), d(fx, f^2y)d(fy, f^2x)) = \\ &g(d(x^*, y^*), d(x^*, fx^*), d(y^*, fy^*), d(x^*, fy^*)d(y^*, fx^*)). \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)可知 f^* 在完备的乘积度量空间 (fX, d) 上满足定理 2 的所有条件, 因此 f^* 在 fX 上有唯一不动点, 且 f 在 X 上至少存在一个不动点. 如果 f 有 2 个不动点 u 和 v , 则根据式(6)可得:

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(f^2u, f^2v) \leq g(d(fu, fv), d(fu, f^2u), d(fv, f^2v), d(fu, f^2v)d(fv, f^2u)) = \\ &g(d(u, v), 1, 1, [d(u, v)]^2). \end{aligned}$$

根据 G(iii) 可得 $d(u, v) = 1$, 进而得 $u = v$. 该结果进一步说明 f 的不动点是唯一的. 证毕.

参考文献:

- [1] Ćirić L J B. A generalizaion of Banach's contraction principle[J]. Proc Amer Soc, 1974,45:267-273.
- [2] POOM KUMAM, NGUYEN VAN DUNG, KANOKWAN SITTHAKERNGKIET. A generalization of Ćirić fixed point theorems[J]. Filomat, 2015,29(7):1549-1556.
- [3] VALERIU POPA, ALINA-MIHAELA PATRICIU. Fixed point theorem of Ćirić type in weak partial metric spaces[J]. Filomat, 2017,31(11):3203-3207.
- [4] XU SHAOYUAN, RADENOVIC S. Fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings on cone metric spaces over Banach algebras without assumption of normality[J]. Fixed Point Theory and Appl, 2014,2014:102.
- [5] 许绍元,马超,周作领. 具有 Banach 代数的锥度量空间上拟压缩映射的新的不动点定理[J]. 中山大学学报(自然科学版),2015,54(4):1-4.
- [6] 朴勇杰. 具有 Banach 代数的无正规的锥度量空间上拟收缩映射的不动点定理的改进[J]. 中山大学学报(自然科学版),2018,57(1):63-68.
- [7] RHAODES B E. Contraction type mappings on a 2-metric space[J]. Maehmatische Nachrichten, 1979,91:151-155.
- [8] PIAO YONGJIE. Ćirić fixed point theorems under C -distance on non-normal cone metric spaces over Banach algebras[J]. Adv Fixed Point Theory, 2020,10:5.
- [9] BASHIROV A E, KURPLNARA E M, OZYAPLCL A. Multiplicative calculus and its applications[J]. J Math Anal Appl, 2008,337:36-48.
- [10] FLORACK L, ASSEN H V. Multiplicative calculus in biomedical image analysis[J]. J Math Imaging Vis, 2012,42(1):64-75.
- [11] BASHIROV A E, MISIRLI E, TANDOĞDU Y, et al. On modeling with multiplicative differential equations[J]. Appl Math J Chin Univ Ser B, 2011,26:425-438.
- [12] ÖZAVSAR M, CEVIKEL A C. Fixed point of multiplicative contraction mappings on multiplicative metric spaces[J]. Applied Mathematics, 2012,3:35-39.
- [13] 朴勇杰. 乘积度量空间上满足 $\sigma(\gamma)$ -压缩条件映射的唯一不动点[J]. 吉林大学学报(理学版),2021,59(3):469-474.
- [14] 朴勇杰. 乘积度量空间上 Banach-Chaterjia 型不动点定理的改进[J]. 延边大学学报(自然科学版),2021,47(3):189-192.
- [15] 朴勇杰. 乘积度量空间上一类隐式压缩映射的唯一不动点[J]. 吉林大学学报(理学版),2022,60(1):59-63.