文章编号：1004-4353(2021)04-0297-06

# 区间数刻画属性值下的两种多属性决策新算法

朱国成，　陈利群
（广东创新科技职业学院 通识教育学院，广东 东莞 523960）

**摘要**：为了解决区间信息多属性决策问题,建立了两种多属性决策算法(算法 1 和算法 2).算法 1：首先利用区间数的积型贴近度公式将属性的区间信息数据转换为精确数值,然后使用 Maclaurin 对称平均算子集结属性的精确数值,进而通过比较其数值大小来判断方案的优劣.算法 2：首先利用区间数的积型贴近度公式算出各方案在所有属性上的积型模糊互补判断矩阵,然后通过求解积型模糊互补判断矩阵的排序向量来判断方案的优劣.研究表明,两种算法的决策路径虽然不同,但其排序结果相同,即不同决策路径不会影响方案的排序结果,因此决策者可以根据实际问题需要选择适当的决策算法及排序规则,以更好地满足决策需求.

**关键词**：区间数；多属性决策；区间数的积型贴近度公式；排序
**中图分类号**：O159　　　**文献标识码**：A

# Two new algorithms for multi-attribute decision making under attribute values are described by interval number

ZHU Guocheng,　CHEN Liqun
( *School of General Education, Guangdong Innovative Technical College, Dongguan* 523960, *China* )

**Abstract**: In order to solve the problem of interval information multi-attribute decision making, two algorithms (Algorithm 1 and Algorithm 2) of multi-attribute decision making are established in this paper. Algorithm 1: firstly converting the interval information data of attributes into exact values by using the product approximation formula of interval numbers, then aggregating the exact values of attributes by using MacLaurin symmetric average operator, and then the optimal scheme is decided by comparing the exact values of attributes after aggregation. Algorithm 2: firstly constructing a product fuzzy complementary judgment matrix on all attributes of each scheme by using the product approximation formula of interval number, then calculating the ranking vectors of the matrix, and then the optimal scheme is decided according to the ranking vectors. The research shows that although the decision paths of the two algorithms are different, their ranking results are the same, that is, the decision paths will not affect the ranking results of the scheme. So the decision makers can choose the appropriate decision algorithms and sorting rules according to the actual needs of the problems to better meet the decision requirements.

**Keywords**: interval number; multi-attribute decision making; product approximation formula of interval numbers; ranking

**收稿日期**：2021-07-09
**基金项目**：广东创新科技职业学院特色创新类重点资助项目(2020TSZD005,2021TSZD02)
**第一作者**：朱国成(1986—),男,硕士,讲师,研究方向为模糊信息决策与最优化.

## 0 引言

目前,研究属性信息数据为区间数的多属性决策问题的方法主要有决策专家的权重计算方法[1]、属性权重的计算方法[2]、决策算法[3]、区间数的决策矩阵规范化处理方法[4]等. 2018年,李宝萍等[5]在Maclaurin对称平均算子的基础上定义了概率犹豫模糊Maclaurin对称平均算子和概率犹豫模糊Maclaurin对称加权平均算子,并将Maclaurin对称平均算子用于求解概率犹豫模糊环境决策问题,结果显示该方法具有较好的决策效果. 在文献[5]的方法基础上,本文将Maclaurin对称平均算子用于求解属性信息数据为区间数的多属性决策问题中(算法1),该算法以各方案在相同属性上的差异程度对各方案进行排序. 2002年,徐泽水等[6]定义了一个区间数可能度公式,并利用该公式建立了一个可以对各方案进行两两比较的可能度互补判断矩阵,且通过求解该矩阵实现了对方案的排序. 在文献[6]的方法基础上,本文利用区间数的积型贴近度公式建立了一个在所有属性上可以进行积型模糊互补判断的矩阵,并通过求解该矩阵对应的排序向量大小来区分各方案的优劣(算法2). 对算法1和算法2进行案例分析表明,不同的决策思路不会影响方案的排序结果.

## 1 基础知识

**定义1**[7] 若 $\tilde{a}=[a^{L},a^{U}]=\{x\,|\,a^{L}\leqslant x\leqslant a^{U}\}$,则称 $\tilde{a}$ 为一个区间数. 当 $a^{L}=a^{U}$ 时,$\tilde{a}$ 为一个实数. 设 $\tilde{a}=[a^{L},a^{U}]$ 和 $\tilde{b}=[b^{L},b^{U}]$,且 $\lambda\geqslant 0$,则:① $\tilde{a}=\tilde{b}$ 当且仅当 $a^{L}=b^{L}$, $a^{U}=b^{U}$; ② $\tilde{a}+\tilde{b}=[a^{L}+b^{L},a^{U}+b^{U}]$; ③ $\lambda\tilde{a}=[\lambda a^{L},\lambda a^{U}]$,特别地若 $\lambda=0$,则 $\lambda\tilde{a}=0$; ④ $ab=[a^{-}b^{-},a^{+}b^{+}]$; ⑤ $\dfrac{a}{b}=\left[\dfrac{a^{-}}{b^{+}},\dfrac{a^{+}}{b^{-}}\right]$,特别地 $\dfrac{1}{b}=\left[\dfrac{1}{b^{-}},\dfrac{1}{b^{+}}\right]$.

**定义2**[8] 称 $T(\tilde{a}\times\tilde{b})=\dfrac{a^{L}\times a^{U}}{b^{L}\times b^{U}}\times\dfrac{a^{L}+a^{U}}{b^{L}+b^{U}}$ 为非负区间数 $\tilde{a}(\tilde{a}=[a^{L},a^{U}])$ 和 $\tilde{b}(\tilde{b}=[b^{L},b^{U}])$ 的积型贴近度,并定义若 $\tilde{a}=\tilde{b}=0$,则 $T(\tilde{a}\times\tilde{b})=1$. 区间数 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 的积型贴近度模型有如下运算性质:① 当 $\tilde{a}=\tilde{b}$ 时,$T(\tilde{a}\times\tilde{b})=1$;② 当 $\tilde{a}>\tilde{b}$ 时,$T(\tilde{a}\times\tilde{b})>1$;③ 当 $\tilde{a}<\tilde{b}$ 时,$T(\tilde{a}\times\tilde{b})<1$;④ 当 $T(\tilde{a}\times\tilde{b})=t$ 时,$T(\tilde{b}\times\tilde{a})=\dfrac{1}{t}$;⑤ 当 $T(\tilde{a}\times\tilde{b})>1$, $T(\tilde{b}\times\tilde{c})>1$ 时,$T(\tilde{a}\times\tilde{c})>1$.

**定义3** 在由方案集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 和属性集 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$ 构成的多属性决策问题中,属性权重 $\omega_j$ 为已知,属性评价值用区间数 $q_{ij}=[q_{ij}^{-},q_{ij}^{+}]$ 表示(本文中只考虑区间数的非负情形,即 $q_{ij}^{-}\geqslant 0$, $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, $j\in\{1,2,\cdots,m\}$),决策矩阵为 $\boldsymbol{q}=[q_{ij}]_{n\times m}$. 本文仅考虑成本型($J_1$)与效益型($J_2$)两种类型的属性,并用 $|J_1|$、$|J_2|$ 分别表示成本型属性与效益型属性的个数,且有 $|J_1|+|J_2|=m$.

**定义4** 将属性的理想属性值 $\tilde{q}_j$ 定义为:

$$\tilde{q}_j=[\min_i q_{ij}^{-},\min_i q_{ij}^{+}],\ j\in J_1;\ \tilde{q}_j=[\max_i q_{ij}^{-},\max_i q_{ij}^{+}],\ j\in J_2.$$

**定义5** 将决策矩阵 $\boldsymbol{q}=[q_{ij}]_{n\times m}$ 规范化处理为矩阵 $\tilde{\boldsymbol{q}}=[\tilde{q}_{ij}]_{n\times m}$,其中:$\tilde{q}_{ij}=\dfrac{\tilde{q}_j}{q_{ij}}$, $j\in J_1$;$\tilde{q}_{ij}=\dfrac{q_{ij}}{\tilde{q}_j}$, $j\in J_2$.

**定义6** 令 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组非负实数,且 $r=1,2,\cdots,n$. 若

$$MSM^{(r)}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\left(\frac{\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\prod\limits_{j=1}^{r}a_{i_j}}{C_n^r}\right)^{\frac{1}{r}},\tag{1}$$

则称式(1) 为 Maclaurin 对称平均算子，其中 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 为遍历组合 $1, 2, \cdots, n$ 中的一切 $r$ 元组，$C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ 为二项式系数. 由式(1) 可知，Maclaurin 对称平均算子有如下性质：

1) 对于任意的 $i$，若 $a_i = a \geqslant 0$，则 $MSM^{(r)}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a$；

2) 对于任意的 $i$，若 $0 \leqslant a_i \leqslant b_i$，则有 $MSM^{(r)}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant MSM^{(r)}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$；

3) 对于任意的 $a_i \geqslant 0$，有 $\min(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant MSM^{(r)}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant \max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

## 2　两种决策算法的决策步骤

### 2.1　算法 1 的决策步骤

根据定义 3 得算法 1 的决策步骤为：

第 1 步　首先根据决策矩阵 $\boldsymbol{q} = [q_{ij}]_{n \times m}$ 及定义 4 确定各属性的理想属性值 $\tilde{q}_j$，然后规范化决策矩阵 $\boldsymbol{q}$，以此得到规范化矩阵 $\bar{\boldsymbol{q}} = [\bar{q}_{ij}]_{n \times m}$(其中：$\bar{q}_{ij} = \dfrac{\tilde{q}_j}{q_{ij}}$，$j \in J_1$；$\bar{q}_{ij} = \dfrac{q_{ij}}{\tilde{q}_j}$，$j \in J_2$).

第 2 步　根据定义 4 及规范化矩阵 $\bar{\boldsymbol{q}} = [\bar{q}_{ij}]_{n \times m}$ 确定规范化后的理想属性值 $\tilde{\bar{q}}_j$，并依据定义 2 建立测度矩阵 $\tilde{\boldsymbol{q}} = [\tilde{q}_{ij}]_{n \times m}$(其中：$\tilde{q}_{ij} = T(\tilde{\bar{q}}_j \times \bar{q}_{ij})$，$j \in J_1$；$\tilde{q}_{ij} = T(\bar{q}_{ij} \times \tilde{\bar{q}}_j)$，$j \in J_2$).

第 3 步　对各方案的属性测度结果进行加权，并建立加权后的测度矩阵 $\tilde{\tilde{\boldsymbol{q}}} = [\tilde{\tilde{q}}_{ij}]_{n \times m} = [(\tilde{q}_{ij})^{\omega_j}]_{n \times m}$.

第 4 步　利用定义 6 计算各方案的 Maclaurin 对称平均结果($MSM_{a_i}^{(r)}(\tilde{\tilde{q}}_{i1}, \tilde{\tilde{q}}_{i2}, \cdots, \tilde{\tilde{q}}_{im})$).

第 5 步　统计 $MSM_{a_i}^{(r)}$ 的值，并根据 $MSM_{a_i}^{(r)}$ 值的大小对各方案进行排序.

第 6 步　决策分析与比较.

第 7 步　结束.

由于区间数的除法规则和 Maclaurin 对称平均算子都具有单调递增性质，因此由上述算法 1 可知：① 若方案中的属性类型均为成本型时，其属性的理想属性值由算法 1 的第 1 步和第 2 步确定. 对于由成本型属性构成的方案而言，其成本型属性值越小方案越优，故此时最小的 $MSM_{a_i}^{(r)}$ 值所对应的方案 $a_i$ 为优. ② 若方案中的属性类型均为效益型时，其属性的理想属性值仍由算法 1 的第 1 步和第 2 步确定. 但对于由效益型属性构成的方案而言，其成本型属性值越大方案越优，故此时最大的 $MSM_{a_i}^{(r)}$ 值所对应的方案 $a_i$ 为优. ③ 若方案中的属性类型既有成本型又有效益型时，决策者需要根据实际情况调整排序规则，以满足决策需求. ④$MSM_{a_i}^{(r)}$ 的取值范围为 $MSM_{a_i}^{(r)} \in [0, 1]$. $MSM_{a_i}^{(r)}$ 取值范围的证明过程如下：

由式(1) 可知，无论 $r$ 取何值，当 $\tilde{\tilde{q}}_{im} = 0$ 时，$MSM_{a_i}^{(r)} = 0$；当 $\tilde{\tilde{q}}_{im} = 1$ 时，$MSM_{a_i}^{(r)} = 1$. 当 $\tilde{\tilde{q}}_{im} \neq 0$，$\tilde{\tilde{q}}_{im} \neq 1$ 时，由算法 1 中 $\tilde{\tilde{q}}_{im}$ 值的计算过程可知，$\tilde{\tilde{q}}_{im} \in (0, 1)$. 由上述可知证明 $MSM_{a_i}^{(r)} \in (0, 1)$，在此只需证明 $\dfrac{\sum\limits_{1 \leqslant l_1 < \cdots < l_r \leqslant m} \prod\limits_{j=1}^{r} (\tilde{\tilde{q}}_{im})_{l_j}}{C_m^r} \in (0, 1)$ 即可. 因为 $0 < \prod\limits_{j=1}^{r} (\tilde{\tilde{q}}_{im})_{l_j} < \tilde{\tilde{q}}_{im} < 1$，所以 $\sum\limits_{1 \leqslant l_1 < \cdots < l_r \leqslant m} \prod\limits_{j=1}^{r} (\tilde{\tilde{q}}_{im})_{l_j} < \sum\limits_{1 \leqslant l_1 < \cdots < l_r \leqslant m} \tilde{\tilde{q}}_{im} = C_m^r \tilde{\tilde{q}}_{im} < C_m^r$，即 $\dfrac{\sum\limits_{1 \leqslant l_1 < \cdots < l_r \leqslant m} \prod\limits_{j=1}^{r} (\tilde{\tilde{q}}_{im})_{l_j}}{C_m^r} \in (0, 1)$ 成立. 综上可得 $MSM_{a_i}^{(r)} \in [0, 1]$.

### 2.2　算法 2 的决策步骤

根据定义 3 得算法 2 的决策步骤为：

第 1 步　首先根据决策矩阵 $\boldsymbol{q} = [q_{ij}]_{n \times m}$ 及定义 4 确定各属性的理想属性值 $\tilde{q}_j$，然后规范化处理

决策矩阵 $\boldsymbol{q}$,以此得到规范化矩阵 $\bar{\boldsymbol{q}}=[\bar{q}_{ij}]_{n\times m}$(其中:$\bar{q}_{ij}=\dfrac{\tilde{q}_j}{q_{ij}}$, $j\in J_1$; $\bar{q}_{ij}=\dfrac{q_{ij}}{\tilde{q}_j}$, $j\in J_2$).

第2步 利用定义2对不同方案在相同属性上的属性值进行两两比较,并以此建立不同方案在单个属性上的两两比较测度矩阵 $\tilde{\boldsymbol{q}}(j)=[\tilde{q}_{ii'}]_{n\times n}$(其中 $\tilde{q}_{ii'}=T(\bar{q}_{ij}\times\bar{q}_{i'j})$, $j=1,2,\cdots,m$).显然,矩阵 $\tilde{\boldsymbol{q}}(j)=[\tilde{q}_{ii'}]_{n\times n}$ 为积型模糊互补判断矩阵,即 $\tilde{q}_{ii}=1$, $\tilde{q}_{ii'}\cdot\tilde{q}_{i'i}=1$.

第3步 计算在第 $j$ 个属性上的积型模糊互补判断矩阵 $\tilde{\boldsymbol{q}}(j)=[\tilde{q}_{ii'}]_{n\times n}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\eta}^j=(\eta_1^j,\eta_2^j,\eta_i^j,\cdots,\eta_n^j)^{\mathrm{T}}$,其中 $\eta_i^j=\prod\limits_{i'=1}^{n}\tilde{q}_{ii'}$, $i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,m$.

第4步 加权排序向量 $\boldsymbol{\eta}^j$,得加权的属性排序向量 $\boldsymbol{\eta}^j(\omega_j)=(|\eta_1^j|,|\eta_2^j|,|\eta_i^j|,\cdots,|\eta_n^j|)^{\mathrm{T}}$,其中 $|\eta_i^j|=(\prod\limits_{i'=1}^{n}\tilde{q}_{ii'})^{\omega_j}$.

第5步 建立方案在所有属性上的积型模糊互补判断矩阵 $\tilde{\boldsymbol{q}}(j)=[\tilde{q}_{ii'}]_{n\times n}(j=1,2,\cdots,m)$,并依次计算其对应的属性排序向量 $\boldsymbol{\eta}^j$ 及其加权的属性排序向量 $\boldsymbol{\eta}^j(\omega_j)$.

第6步 汇总各方案的总排序向量 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\eta_i,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$,其中 $\eta_i=\sum\limits_{j=1}^{m}|\eta_i^j|=\sum\limits_{j=1}^{m}(\prod\limits_{i'=1}^{n}\tilde{q}_{ii'})^{\omega_j}$.

第7步 根据排序向量 $\boldsymbol{\eta}$ 的分量 $\eta_i$ 大小对方案进行排序,最大的 $\eta_i$ 值所对应的方案 $a_i$ 为优.

第8步 比较排序结果.

第9步 结束.

## 3 数值算例

由某高职院校领导组成的考核小组分别从教学建设项目($G_1$)、党建学务项目($G_2$)、行政管理项目($G_3$)、社会服务项目($G_4$)等4个方面对管理学院($a_1$)、财经学院($a_2$)、智能制造学院($a_3$)、建筑与艺术设计学院($a_4$)、信息工程学院($a_5$)等5个二级学院进行年终考核.考核所得分数经过技术处理后以区间数形式给出,见表1.根据表1,利用算法1和算法2分别求出各自算法的考核排名结果.已知4个考核因素的权重分别为 $\omega=(0.35,0.3,0.15,0.2)^{\mathrm{T}}$.

**表1 考核评分表**

| 二级学院 | 教学建设项目($G_1$) | 党建学务项目($G_2$) | 行政管理项目($G_3$) | 社会服务项目($G_4$) |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | [0.75,0.86] | [0.78,0.84] | [0.85,0.93] | [0.75,0.84] |
| $a_2$ | [0.82,0.91] | [0.62,0.71] | [0.74,0.82] | [0.79,0.89] |
| $a_3$ | [0.73,0.79] | [0.65,0.73] | [0.76,0.83] | [0.75,0.84] |
| $a_4$ | [0.71,0.81] | [0.66,0.74] | [0.66,0.74] | [0.71,0.79] |
| $a_5$ | [0.83,0.88] | [0.72,0.79] | [0.78,0.89] | [0.84,0.93] |

### 3.1 算法1的计算过程及结果

首先,根据表1建立决策矩阵 $\boldsymbol{q}$、确定属性理想属性值 $\tilde{q}_j(j=1,2,3,4)$ 和规范化矩阵 $\bar{\boldsymbol{q}}$,分别为:

$$\boldsymbol{q}=[q_{ij}]_{5\times4}=\begin{bmatrix}[0.75,0.86] & [0.78,0.84] & [0.85,0.93] & [0.75,0.84]\\ [0.82,0.91] & [0.62,0.71] & [0.74,0.82] & [0.79,0.89]\\ [0.73,0.79] & [0.65,0.73] & [0.76,0.83] & [0.75,0.84]\\ [0.71,0.81] & [0.66,0.74] & [0.66,0.74] & [0.71,0.79]\\ [0.83,0.88] & [0.72,0.79] & [0.78,0.89] & [0.84,0.93]\end{bmatrix},$$

$\tilde{q}_1=[0.83,0.91]$, $\tilde{q}_2=[0.78,0.84]$, $\tilde{q}_3=[0.85,0.93]$, $\tilde{q}_4=[0.84,0.93]$,

$$\bar{\boldsymbol{q}}=[\bar{q}_{ij}]_{5\times 4}=\begin{bmatrix}[0.8242,1.0361] & [0.9286,1.0769] & [0.9140,1.0941] & [0.8065,1.0000]\\ [0.9011,1.0964] & [0.7381,0.9103] & [0.7957,0.9647] & [0.8495,1.0595]\\ [0.8022,0.9518] & [0.7738,0.9359] & [0.8172,0.9765] & [0.8065,1.0000]\\ [0.7802,0.9759] & [0.7857,0.9487] & [0.7097,0.8706] & [0.7634,0.9405]\\ [0.9121,1.0602] & [0.8571,1.0128] & [0.8387,1.0471] & [0.9032,1.1071]\end{bmatrix}.$$

其次,利用矩阵 $\bar{\boldsymbol{q}}$ 得到规范化后的理想属性值 $\tilde{\tilde{q}}_j\,(j=1,2,3,4)$ 和测度矩阵 $\tilde{\boldsymbol{q}}$:

$$\tilde{\tilde{q}}_1=[0.9121,1.0964],\ \tilde{\tilde{q}}_2=[0.9286,1.0769],\ \tilde{\tilde{q}}_3=[0.9140,1.0941],\ \tilde{\tilde{q}}_4=[0.9032,1.1071],$$

$$\tilde{\boldsymbol{q}}=[\tilde{q}_{ij}]_{5\times 4}=\begin{bmatrix}0.7910 & 1.0000 & 1.0000 & 0.7248\\ 0.9826 & 0.5523 & 0.6729 & 0.8547\\ 0.6668 & 0.6174 & 0.7128 & 0.7248\\ 0.6657 & 0.6446 & 0.4863 & 0.6086\\ 0.9496 & 0.8094 & 0.8247 & 1.0000\end{bmatrix}.$$

再次,加权各方案的属性测度结果,以此建立加权的测度矩阵 $\tilde{\tilde{\boldsymbol{q}}}$:

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{q}}}=[\tilde{\tilde{q}}_{ij}]_{5\times 4}=\begin{bmatrix}0.9212 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9377\\ 0.9939 & 0.8369 & 0.9423 & 0.9691\\ 0.8678 & 0.8653 & 0.9505 & 0.9377\\ 0.8673 & 0.8766 & 0.8975 & 0.9055\\ 0.9821 & 0.9385 & 0.9715 & 1.0000\end{bmatrix}.$$

最后,计算 $MSM_{a_i}^{(r)}$, $i=1,2,3,4,5$. 不失一般性,令 $r=1$,则可得:$MSM_{a_1}^{(1)}=0.9647$, $MSM_{a_2}^{(1)}=0.9356$, $MSM_{a_3}^{(1)}=0.9053$, $MSM_{a_4}^{(1)}=0.8867$, $MSM_{a_5}^{(1)}=0.9730$. 由于案例中的 4 个考核因素类型均为效益型,故最大的 $MSM_{a_i}^{(r)}$ 值所对应的方案 $a_i$ 为优. 由此得各二级学院的年终考核排名为 $a_5\succ a_1\succ a_2\succ a_3\succ a_4$. 另外,经计算,当 $r=2$ 和 $r=1$ 时得出的排序结果相同. 这说明以方案内部属性差异程度对方案进行排序时, Maclaurin 算子中的参数对决策结果的影响较小.

### 3.2　算法 2 的计算过程及结果

首先,确定规范化矩阵 $\bar{\boldsymbol{q}}=[\bar{q}_{ij}]_{n\times m}$.

其次,以第 1 个属性为例,建立各方案在第 1 个属性上可进行两两比较的积型模糊互补判断矩阵 $\tilde{\boldsymbol{q}}(1)$ 为:

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(1)=[\tilde{q}_{ii'}]_{5\times 5}=\begin{bmatrix}1.0000 & 0.8050 & 1.1863 & 1.1882 & 0.8330\\ 1.2422 & 1.0000 & 1.4736 & 1.4760 & 1.0348\\ 0.8430 & 0.6786 & 1.0000 & 1.0016 & 0.7022\\ 0.8416 & 0.6775 & 0.9984 & 1.0000 & 0.7011\\ 1.2005 & 0.9664 & 1.4241 & 1.4264 & 1.0000\end{bmatrix}.$$

在计算 $\tilde{\boldsymbol{q}}(1)$ 时,由于 $\tilde{q}_{ii'}$ 是采取四舍五入的方法获取的,故有 $\tilde{q}_{ii'}\times\tilde{q}_{i'i}\approx 1$, $i\neq i'$, $i,i'=1,2,\cdots,5$. 因此,方案 1 在第 1 个属性上的排序向量 $\boldsymbol{\eta}^1$ 为:

$$\boldsymbol{\eta}^1=(\eta_1^1,\eta_2^1,\eta_3^1,\eta_4^1,\eta_5^1)^{\mathrm{T}}=(0.9452,2.7959,0.4023,0.3991,2.3567)^{\mathrm{T}},$$

即 $\boldsymbol{\eta}^1(\omega_1)=(|\eta_1^1|,|\eta_2^1|,|\eta_3^1|,|\eta_4^1|,|\eta_5^1|)^{\mathrm{T}}=(0.9805,1.4331,0.7271,0.7251,1.3499)^{\mathrm{T}}$.

同理可得:

$$\boldsymbol{\eta}^2(\omega_2)=(|\eta_1^2|,|\eta_2^2|,|\eta_3^2|,|\eta_4^2|,|\eta_5^2|)^{\mathrm{T}}=(1.6786,0.6889,0.8143,0.8688,1.2223)^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\eta}^3(\omega_3)=(|\eta_1^3|,|\eta_2^3|,|\eta_3^3|,|\eta_4^3|,|\eta_5^3|)^{\mathrm{T}}=(1.2805,0.9514,0.9934,0.7456,1.1082)^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\eta}^4(\omega_4)=(|\eta_1^4|,|\eta_2^4|,|\eta_3^4|,|\eta_4^4|,|\eta_5^4|)^{\mathrm{T}}=(0.9395,1.1079,0.9395,0.7889,1.2962)^{\mathrm{T}}.$$

再次,汇总各方案的总排序向量 $\boldsymbol{\eta}$,由此得到各方案的总排序向量为 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5)^{\mathrm{T}}=(4.8791,4.1813,3.4743,3.1284,4.9766)^{\mathrm{T}}$. 由该结果可得方案的排序结果为 $a_5 \succ a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4$,该结果与算法 1 的排序结果相同.

### 3.3 两种决策算法与其他决策算法的比较

由上述可知,算法 1 和算法 2 的决策思路虽然不同,但对方案的排序结果相同. 为了进一步确定算法 1 和算法 2 决策结果的有效性,本文利用文献[8]中的算法(对不同方案的属性进行两两测度后,通过比较不同方案的属性优劣个数进行方案排序)对案例中的各二级学院的考核分数进行了排序,结果显示其排序结果与算法 1 和算法 2 的排序结果相同. 该结果进一步表明,决策过程或者决策模型不会影响方案的排序.

## 4 结语

本文研究表明,用不同视角建立的两种决策算法都能解决决策信息数据为区间数的多属性决策问题,而且排序结果不受决策过程或者决策模型的影响. 其中:算法 1 拓宽了 Maclaurin 对称平均算子的应用范围;算法 2(利用积型模糊互补判断矩阵进行决策)有别于传统的模糊互补判断矩阵、模糊一致性矩阵等决策方法,丰富了利用模糊判断矩阵解决区间信息多属性决策问题的方法. 在今后的研究中,我们将进一步研究不同决策视角下的不同决策信息数据的多属性决策方法.

## 参考文献:

[1] 陈晓红,刘益凡. 基于区间数群决策矩阵的专家权重确定方法及其算法实现[J]. 系统工程与电子技术,2010,32(10):2128-2131.
[2] 朱国成,庄乐. 构建区间数排序准则下的多属性群决策理论与实践[J]. 东莞理工学院学报,2021,28(1):24-30.
[3] 孙爱民. 基于熵权法的区间数多指标决策方法及应用[J]. 数学的实践与认识,2020,50(7):171-179.
[4] 朱方霞,陈华友. 基于可能度的决策矩阵排序的一种新方法[J]. 系统工程,2005(7):29-32.
[5] 李宝萍,陈华友. 概率犹豫模糊 Maclaurin 对称平均算子及其多属性群决策模型[J]. 模糊系统与数学,2018,32(5):130-142.
[6] 徐泽水,孙在东. 一类不确定型多属性决策问题的排序方法[J]. 管理科学学报,2002(3):35-39.
[7] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用[M]. 北京:科学出版社,2008.
[8] 朱国成,庄乐. 基于构建区间数排序准则的多属性群决策方法[J]. 广东石油化工学院学报,2020,30(4):64-69.