

文章编号: 1004-4353(2021)04-0289-08

## 与广义二次矩阵相关的广义 Jordan 积秩的不变性

吕洪斌<sup>1</sup>, 陈梅香<sup>2</sup>, 杨忠鹏<sup>2</sup>, 冯晓霞<sup>3</sup>

( 1. 北华大学 数学与统计学院, 吉林 吉林 132013; 2. 莆田学院 数学与金融学院, 福建 莆田 351100;  
3. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000 )

**摘要:** 设  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  为广义二次矩阵,  $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 并定义广义 Jordan 积为  $AC + CB$ . 应用广义二次矩阵和幂等矩阵的互为确定的关系, 得到了由两个不同的幂等矩阵确定的广义二次矩阵  $A$  和  $B$  与任意矩阵  $C$  的广义 Jordan 积的秩不变性. 该结果改进了已有二次矩阵的相关结果.

**关键词:** 二次矩阵; 广义二次矩阵; 秩; 广义 Jordan 积; 不变性

**中图分类号:** O151.21

**文献标识码:** A

## Invariance of rank for generalized Jordan products of generalized quadratic matrices

LÜ Hongbin<sup>1</sup>, CHEN Meixiang<sup>2</sup>, YANG Zhongpeng<sup>2</sup>, FENG Xiaoxia<sup>3</sup>

( 1. School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin 132013, China;

2. School of Mathematics and Finance, Putian University, Putian 351100, China;

3. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China )

**Abstract:**  $AC + CB$  is called as the generalized Jordan product of generalized quadratic matrices  $A$  and  $B$ , for any  $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . By applying mutual determination relationship between generalized quadratic matrix and idempotent matrix, we obtained invariance of rank for generalized Jordan products of generalized quadratic matrices  $A$ ,  $B$  and any complex matrix  $C$ , in which  $A, B$  are determined by two different idempotent matrices. The results improve the relevant results of quadratic matrices.

**Keywords:** quadratic matrix; generalized quadratic matrix; rank; generalized Jordan product; invariance

### 0 引言

设  $\mathbb{C}^{m \times n}$  为复数域  $\mathbb{C}$  上的  $m \times n$  阶矩阵集合,  $r(A)$  表示  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  的秩,  $I$  表示单位矩阵,  $I_t$  表示  $t \times t$  阶单位矩阵, 矩阵  $X^{(1)}$  为矩阵  $X$  的满足  $XX^{(1)}X = X$  的广义逆. 记  $\Gamma = \{(a, b) : a + b \neq 0, ab \neq 0; a, b \in \mathbb{C}\}$ .

设  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 称  $AB + BA$  为矩阵  $A$  与  $B$  的 Jordan 积<sup>[1]</sup>. Tian 等研究了幂等矩阵  $P$  与  $Q$  的 Jordan

收稿日期: 2021-09-07

基金项目: 吉林省科技发展计划项目(20190201139JC); 福建省自然科学基金(2021J011103)

第一作者: 吕洪斌(1964—), 男, 博士, 教授, 研究方向为数值代数、矩阵理论及其应用.

通信作者: 杨忠鹏(1947—), 男, 学士, 教授, 研究方向为矩阵理论及其应用.

积的秩<sup>[2-5]</sup>; Koliha 等给出了  $PQ + QP$  可逆性的充要条件<sup>[6]</sup>. Tian 等<sup>[2]</sup> 从秩的不变性角度得到:

$$r(aPQ + bQP) = r(PQ + QP), P^2 = P, Q^2 = Q, (a, b) \in \Gamma. \quad (1)$$

Tian 还研究了  $P$  和  $Q$  为幂等矩阵、 $C \in \mathbf{C}^{m \times n}$  的  $r(PC + CQ)$  的更一般情况<sup>[5]</sup>:

$$r[PC + CQ] = r \begin{pmatrix} CQ & P \\ PC & 0 \end{pmatrix} - r(P) = r \begin{pmatrix} PC & CQ \\ Q & 0 \end{pmatrix} - r(Q) \quad (2)$$

$$= r \begin{bmatrix} CQ - PCQ \\ PC \end{bmatrix} = r[PC - PCQ, CQ], P^2 = P, Q^2 = Q, C \in \mathbf{C}^{m \times n}. \quad (3)$$

由于当  $P=Q$  时,  $PC + CQ = PC + CP$  为矩阵  $P$  与  $C$  的 Jordan 积, 所以称  $PC + CQ$  为矩阵  $P, Q$  与  $C$  的广义 Jordan 积<sup>[7]</sup>.

若有  $\lambda (\neq 0) \in \mathbf{C}$  使  $P^2 = \lambda P$ , 则称  $P$  是由  $\lambda$  确定的数量幂等矩阵<sup>[3]</sup>. 文献[4, 8-9] 的作者给出了这类矩阵的相关性质.

若  $d_A, e_A \in \mathbf{C}$  使  $(A - d_A I)(A - e_A I) = 0$ , 则称  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$  为由  $d_A$  和  $e_A$  确定的二次矩阵<sup>[10-13]</sup>. 二次矩阵在随机理论、微分方程、量子力学等领域有着重要应用. 对于二次矩阵  $A$ , 当  $e_A = 0$  时,  $A$  为由  $d_A$  确定的数量幂等矩阵; 若还有  $d_A = 1$ , 则  $A$  为幂等矩阵. 当  $d_A = -e_A \neq 0$  时,  $A$  是数量对合矩阵<sup>[14]</sup>, 且当  $d_A = -e_A = \pm 1$  时,  $A$  为对合矩阵. 2005 年, Farebrother 等给出了如下广义二次矩阵的概念<sup>[15]</sup>: 对给定的幂等矩阵  $P$ , 若  $AP = PA = A$  且有  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$  使得  $A^2 = \alpha A + \beta P$ , 则称  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$  为由幂等矩阵  $P$  确定的广义二次矩阵. 文献[12, 16-17] 的作者给出了如下广义二次矩阵的定义: 对给定的幂等矩阵  $P$ , 若  $AP = PA = A$  且有  $d, e \in \mathbf{C}$  使  $(A - dP)(A - eP) = 0$ , 则称  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$  为由  $d$  和  $e$  确定的广义二次矩阵. 由  $(A - dP)(A - eP) = A^2 - (d + e)A + deP$  以及文献[16] 可知, 文献[12, 16-17] 中的关于广义二次矩阵的定义与文献[15] 中的定义是等价的. 因此, 本文记

$$\Omega_n(P; d, e) = \{A \in \mathbf{C}^{n \times n} : (A - dP)(A - eP) = 0, AP = PA = A\}, \quad (4)$$

进而可记所有由幂等矩阵  $P$  确定的广义二次矩阵的集合为:

$$\Omega_n(P) = \bigcup_{d, e \in \mathbf{C}} \Omega_n(P; d, e). \quad (5)$$

由式(4)、(5) 知广义二次矩阵是比二次矩阵(相应于分别记为  $\Omega_n(I; d, e), \Omega_n(I)$ ) 更为广泛的矩阵类.

$$\text{例 1 由文献[17, 例 4] 知 } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & -1 \\ -6 & 7 & 2 & -1 \end{pmatrix} = P^2, \text{ 且 } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & -2 & 1 \\ 5 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \Omega_4(P; -1, 0).$$

由文献[18, 例 1] 知有二次矩阵

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 & 6 \\ 1 & -8 & 16 & 9 \\ 0 & -3 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \Omega_4(I; 2, 1), B_2 = \begin{pmatrix} -6 & 52 & -84 & -48 \\ 0 & -8 & 12 & 6 \\ -2 & 20 & -32 & -18 \\ 4 & -48 & 76 & 42 \end{pmatrix} \in \Omega_4(I; 0, -2)$$

$$\text{和幂等矩阵 } Q = \begin{pmatrix} -1 & 20 & -32 & -18 \\ 1 & -9 & 16 & 9 \\ -1 & 10 & -15 & -9 \\ 3 & -30 & 48 & 28 \end{pmatrix}, \text{ 同时有 } B = -B_1 - \frac{1}{2}B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -20 & 32 & 18 \\ -1 & 12 & -22 & -12 \\ 1 & -7 & 9 & 6 \\ -3 & 28 & -44 & -26 \end{pmatrix} \in$$

$\Omega_4(Q; -2, -1)$ . 于是由

$$AQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & -2 & 1 \\ 5 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 20 & -32 & -18 \\ 1 & -9 & 16 & 9 \\ -1 & 10 & -15 & -9 \\ 3 & -30 & 48 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 104 & -178 & -98 \\ -6 & 104 & -178 & -98 \end{pmatrix} \neq A$$

和式(4)、(5)可知  $A \in \Omega_4(P)$ , 但  $A \notin \Omega_4(Q)$ , 即  $A$  是由幂等矩阵  $P$  所确定的广义二次矩阵, 但非由幂等矩阵  $Q$  确定的广义二次矩阵.

例1说明广义二次矩阵  $A \in \Omega_n(P; d_A, e_A)$  和  $B \in \Omega_n(Q; d_B, e_B)$  比二次矩阵更为复杂. 对给定的幂等矩阵  $P$  和  $Q$ , 本文研究与广义二次矩阵  $A \in \Omega_n(P; d_A, e_A)$  和  $B \in \Omega_n(Q; d_B, e_B)$  相关的广义 Jordan 积的秩的不变性. 本文结果可改进文献[7]中与二次矩阵相关的基本结论.

## 1 预备知识

**引理1** 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , 则对任意的非零复数  $\lambda, a$  和  $b$  有:

$$r \begin{pmatrix} X & 0 & aXC \\ 0 & Y & Y \\ X & bCY & 0 \end{pmatrix} = r(X) + r(Y) + r(aXC + bCY), \quad X \in \mathbb{C}^{m \times m}, Y \in \mathbb{C}^{n \times n}. \quad (6)$$

$$\text{证明} \quad \text{由} \begin{pmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ -I_m & -bC & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 & aXC \\ 0 & Y & Y \\ X & bCY & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 & -aC \\ 0 & I_n & -I_n \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix} = \text{diag}(X, Y, -(aXC + bCY))$$

可知式(6)成立.

由式(4)、(5)可得如下引理:

**引理2** 设  $P$  为给定的幂等矩阵,  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  且  $AP = PA = A$ , 则  $A \in \Omega_n(P) \Leftrightarrow$  存在  $d_A, e_A \in \mathbb{C}$  使得  $(A - d_AP)(A - e_AP) = 0$ .

当  $A \in \Omega_n(P; d_A, e_A)$  且  $d_A = e_A$  时, 由式(4)和式(5)可知  $(A - d_AP)^2 = 0$ , 即  $A$  是广义二次幂零的. 因此, 不失一般性, 当  $A \in \Omega_n(P)$  时总约定  $d_A \neq e_A$ .

**引理3** 设  $P^2 = P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  且  $AP = PA = A$ , 则有可逆矩阵  $G$  与  $W$ , 且使得:

$$P = G \text{diag}(I_r, 0) G^{-1}, \quad r(P) = r; \quad A = G \text{diag}(A_1, 0) G^{-1}, \quad A_1 \in \mathbb{C}^{r \times r}; \quad (7)$$

$$A \in \Omega_n(P; d_A, e_A) \Leftrightarrow A_1 \in \Omega_r(I_r; d_A, e_A); \quad (8)$$

$$A = W \text{diag}(d_A I_t, e_A I_{r-t}, 0) W^{-1} \in \Omega_n(P; d_A, e_A), \quad r(P) = r, \text{ 当 } d_A \neq e_A \text{ 时}. \quad (9)$$

**证明** 由文献[18, 问题 3.4.25] 和文献[19, 推论 3.3.8] 知, 有可逆矩阵  $G$ , 使得  $P = G \text{diag}(I_r, 0) G^{-1}$ ,  $r(P) = r$ . 设  $A = G \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} G^{-1}$ , 于是由  $PA = G \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} G^{-1} = G \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} G^{-1} = AP = A$  知式(7)成立. 再由式(7)可得:

$$(A - d_AP)(A - e_AP) = G \text{diag}((A_1 - d_A I_r)(A_1 - e_A I_r), 0) G^{-1}. \quad (10)$$

于是由式(4)、(5)知式(8)成立.

当  $A \in \Omega_n(P; d_A, e_A)$  且  $d_A \neq e_A$  时, 由式(10)知  $(x - d_A)(x - e_A)$  为  $A_1 \in \Omega_r(I_r; d_A, e_A)$  的化零多项式. 于是由文献[18, 问题 3.4.25] 或文献[19, 推论 3.3.8] 知, 有可逆矩阵  $G_1$ , 使得  $A_1 = G_1 \text{diag}(d_A I_t, e_A I_{r-t}) G_1^{-1}$ . 显然  $W = GG_1$  是可逆的, 再由式(7)知式(9)成立.

**引理4** 设  $P$  为给定的幂等矩阵,  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  且  $AP = PA = A$ , 则有:

1)  $A \in \Omega_n(P) \Leftrightarrow$  存在  $d_A, e_A \in \mathbb{C}$ ,  $d_A \neq e_A$ , 使得  $\frac{1}{e_A - d_A}(A - d_AP)$  是幂等的;

2) 当  $A \in \Omega_n(P; d_A, e_A)$  时, 则  $A - d_AP$  是由  $e_A - d_A$  确定的数量幂等矩阵, 且  $A - d_AP$  是以  $e_A - d_A$  和 0 为特征值的可对角化矩阵.

**证明** 1) 由  $AP = PA = A$  知, 当  $d_A \neq e_A$  时有:

$$(A - d_AP)(A - e_AP) = (A - d_AP)[(A - d_AP) - (e_A - d_A)P] =$$

$(e_A - d_A)^2 \left[ \frac{1}{e_A - d_A} (A - d_A P) \right] \left[ \frac{1}{e_A - d_A} (A - d_A P) - P \right],$   
 即  $\frac{1}{(e_A - d_A)^2} (A - d_A P)(A - e_A P) = \left[ \frac{1}{e_A - d_A} (A - d_A P) \right]^2 - \left[ \frac{1}{e_A - d_A} (A - d_A P) \right]$ . 再应用式(4)、

(5) 知引理 4 中的 1) 成立.

2) 由上述证明 1) 得  $(A - d_A P)^2 = (e_A - d_A)(A - d_A P)$ , 即  $A - d_A P$  是由  $e_A - d_A$  确定的数量幂等矩阵. 再由引理 3 及式(8)、(9) 知  $A - d_A P$  是以  $e_A - d_A$  和 0 为特征值的可对角化矩阵.

引理 5<sup>[20]</sup> 设  $F \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $G \in \mathbb{C}^{m \times p}$ ,  $K \in \mathbb{C}^{q \times n}$ , 则有:

$$r \begin{pmatrix} F \\ K \end{pmatrix} = r(F) + r(K - KF^{(1)}F) = r(K) + r(F - KF^{(1)}K), \quad (11)$$

$$r(F, G) = r(F) + r(G - FF^{(1)}G) = r(G) + r(F - GG^{(1)}F). \quad (12)$$

## 2 广义二次矩阵的广义 Jordan 积秩的不变性

定理 1 设  $C \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $P^2 = P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $Q^2 = Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $(a, b) \in \Gamma$ , 则有:

$$r(aPC + bCQ) = r(PC + CQ) \quad (13)$$

$$= r \begin{pmatrix} CQ & P \\ PC & 0 \end{pmatrix} - r(P) = r \begin{pmatrix} PC & CQ \\ Q & 0 \end{pmatrix} - r(Q) \quad (14)$$

$$= r \begin{bmatrix} CQ - PCQ \\ PC \end{bmatrix} = r(PC - PCQ, CQ). \quad (15)$$

证明 设  $M = \begin{pmatrix} P & 0 & aPC \\ 0 & Q & Q \\ P & bCQ & 0 \end{pmatrix}$ . 由

$$\begin{pmatrix} I & 0 & -P \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 & aPC \\ 0 & Q & Q \\ P & bCQ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & \frac{b}{a}Q & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & aPC \\ 0 & \frac{a+b}{a}Q & Q \\ P & bCQ & 0 \end{pmatrix} = M_1$$

知

$$r(M) = r \begin{pmatrix} P & 0 & aPC \\ 0 & Q & Q \\ P & bCQ & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 & 0 & aPC \\ 0 & \frac{a+b}{a}Q & Q \\ P & bCQ & 0 \end{pmatrix} = r(M_1), \quad ab \neq 0. \quad (16)$$

当  $(a, b) \in \Gamma$  时, 由

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -\frac{ab}{a+b}C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & aPC \\ 0 & \frac{a+b}{a}Q & Q \\ P & bCQ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -\frac{a}{a+b}I \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & aPC \\ 0 & \frac{a+b}{a}Q & 0 \\ P & 0 & -\frac{ab}{a+b}CQ \end{pmatrix}$$

和式(16) 有

$$r(M) = r \begin{pmatrix} 0 & 0 & aPC \\ 0 & \frac{a+b}{a}Q & 0 \\ P & 0 & -\frac{ab}{a+b}CQ \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 & aPC \\ P & -\frac{ab}{a+b}CQ \end{pmatrix} + r(Q).$$

注意到

$$\begin{pmatrix} -\frac{b}{a+b}I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & aPC \\ P & -\frac{ab}{a+b}CQ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -\frac{ab}{a+b}I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & PC \\ P & CQ \end{pmatrix},$$

且

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & PC \\ P & CQ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CQ & P \\ PC & 0 \end{pmatrix},$$

于是有:

$$r(M) = r \begin{pmatrix} P & 0 & aPC \\ 0 & Q & Q \\ P & bCQ & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} CQ & P \\ PC & 0 \end{pmatrix} + r(Q), \quad ab \neq 0, a+b \neq 0. \quad (17)$$

在式(6)中取  $X=P, Y=Q$ , 则由式(17)可得式(14)中的第1个秩等式. 式(17)表明, 当  $(a, b) \in \Gamma$  时,

$$r(M) \text{ 与 } a \text{ 和 } b \text{ 的选取无关. 因此当选取 } a=b=1 \text{ 时可由式(6)、(17)得 } r(PC+CQ) = r \begin{pmatrix} CQ & P \\ PC & 0 \end{pmatrix} - r(P),$$

于是由式(14)中的第1式可知式(13)成立. 再应用式(2)、(3)可知式(14)中的第2式和式(15)成立.

定理1说明, 相对于文献[5, 定理4.5]中的广义 Jordan 积的秩等式(2)、(3), 在约束  $(a, b) \in \Gamma$  之下,  $r(aPC+bCQ)$  具有不变性.

**定理2** 设  $P^2=P \in \mathbb{C}^{m \times m}, Q^2=Q \in \mathbb{C}^{n \times n}, C \in \mathbb{C}^{m \times n}$  且复数  $d_A, e_A, d_B, e_B \in \mathbb{C}$  使得  $A \in \Omega_m(P; d_A, e_A), B \in \Omega_n(Q; d_B, e_B)$ . 若  $(a, b) \in \Gamma$ , 则有:

$$\begin{aligned} & r[a(e_B-d_B)AC + b(e_A-d_A)CB - (a(e_B-d_B)d_A PC + b(e_A-d_A)d_B CQ)] = \\ & r[(e_B-d_B)AC + (e_A-d_A)CB - ((e_B-d_B)d_A PC + (e_A-d_A)d_B CQ)] \end{aligned} \quad (18)$$

$$= r \begin{pmatrix} C(B-d_B Q) & A-d_A P \\ (A-d_A P)C & 0 \end{pmatrix} - r(A-d_A P) \quad (19)$$

$$= r \begin{pmatrix} (A-d_A P)C & C(B-d_B Q) \\ B-d_B Q & 0 \end{pmatrix} - r(B-d_B Q) \quad (20)$$

$$= r \begin{bmatrix} ((e_A-d_A)I - (A-d_A P))C(B-d_B Q) \\ (A-d_A P)C \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$= r((A-d_A P)C((e_B-d_B)I - (B-d_B Q)) \quad C(B-d_B Q)). \quad (22)$$

**证明** 由式(10)知

$$\frac{1}{e_A-d_A}(A-d_A P), \frac{1}{e_B-d_B}(B-d_B Q) \text{ 都是幂等矩阵.} \quad (23)$$

注意到  $d_A \neq e_A, d_B \neq e_B$  的约定, 据此有:

$$\begin{aligned} & x(e_B-d_B)AC + y(e_A-d_A)CB - [x(e_B-d_B)d_A PC + y(e_A-d_A)d_B CQ] = \\ & x(e_B-d_B)(A-d_A P)C + y(e_A-d_A)C(B-d_B Q) = \\ & \frac{1}{(e_A-d_A)(e_B-d_B)} \left[ \frac{x}{e_A-d_A}(A-d_A P)C + \frac{y}{e_B-d_B}C(B-d_B Q) \right]. \end{aligned}$$

由上式可得:

$$\begin{aligned} & r[x(e_B-d_B)AC + y(e_A-d_A)CB - (x(e_B-d_B)d_A PC + y(e_A-d_A)d_B CQ)] = \\ & r \left[ \frac{x}{e_A-d_A}(A-d_A P)C + \frac{y}{e_B-d_B}C(B-d_B Q) \right], \quad x, y \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (24)$$

于是由式(13)–(15)和式(23)–(24)知, 当  $(a, b) \in \Gamma$  且取  $x=a, y=b$  时有:

$$\begin{aligned}
& r[a(e_B - d_B)AC + b(e_A - d_A)CB - (a(e_B - d_B)d_AP C + b(e_A - d_A)d_B CQ)] = \\
& r\left[\frac{a}{e_A - d_A}(A - d_AP)C + \frac{b}{e_B - d_B}C(B - d_BQ)\right] = \\
& r\left[\frac{1}{e_A - d_A}(A - d_AP)C + \frac{1}{e_B - d_B}C(B - d_BQ)\right] = \\
& r[(e_B - d_B)AC + (e_A - d_A)CB - ((e_B - d_B)d_AP C + (e_A - d_A)d_B CQ)].
\end{aligned}$$

由上式可知式(18)成立. 再由

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} C(B - d_BQ) & A - d_AP \\ (A - d_AP)C & 0 \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} (e_B - d_B)I & 0 \\ 0 & (e_A - d_A)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{e_B - d_B}C(B - d_BQ) & \frac{1}{e_A - d_A}(A - d_AP) \\ \frac{1}{e_A - d_A}(A - d_AP)C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{e_A - d_A}{e_B - d_B}I \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} (e_A - d_A)I & 0 \\ 0 & (e_B - d_B)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{e_A - d_A}(A - d_AP)C & \frac{1}{e_B - d_B}C(B - d_BQ) \\ \frac{1}{e_B - d_B}(B - d_BQ) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{e_B - d_B}{e_A - d_A}I \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} (A - d_AP)C & C(B - d_BQ) \\ B - d_BQ & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

由式(13)、式(14)中的第1式和式(18)知式(19)成立.

类似的由式(13)、式(14)中的第2式和式(18)知式(20)成立. 再由

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} (e_A - d_A)(e_B - d_B)I & 0 \\ 0 & (e_A - d_A)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I_m - \frac{1}{e_A - d_A}(A - d_AP))\frac{1}{e_B - d_B}C(B - d_BQ) \\ \frac{1}{e_A - d_A}(A - d_AP)C \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} ((e_A - d_A)I_m - (A - d_AP))C(B - d_BQ) \\ (A - d_AP)C \end{pmatrix}, \\
& \left(\frac{1}{e_A - d_A}(A - d_AP)C(I_n - \frac{1}{e_B - d_B}(B - d_BQ)) - \frac{1}{e_B - d_B}C(B - d_BQ)\right) \times \\
& \begin{pmatrix} (e_A - d_A)(e_B - d_B)I & 0 \\ 0 & (e_B - d_B)I \end{pmatrix} = ((A - d_AP)C((e_B - d_B)I_n - (B - d_BQ)) - C(B - d_BQ))
\end{aligned}$$

和式(13) - (15)、(18)、(20)知式(21)、(22)成立.

在定理2中取  $P = Q = I_n$  即可得到文献[7]中的基本结论(文献[7]中的式(14)).

**推论 1** 设  $P^2 = P, Q^2 = Q \in C^{n \times n}$ , 且有复数  $d_A, e_A, d_B, e_B \in C$  使得  $A \in \Omega_n(P; d_A, e_A), B \in \Omega_n(Q; d_B, e_B)$ . 若  $(a, b) \in \Gamma$ , 则有:

$$\begin{aligned}
& r[a(e_B - d_B)A + b(e_A - d_A)B - (a(e_B - d_B)d_AP + b(e_A - d_A)d_BQ)] = \\
& r[(e_B - d_B)A + (e_A - d_A)B - ((e_B - d_B)d_AP + (e_A - d_A)d_BQ)] \quad (25)
\end{aligned}$$

$$= r \begin{pmatrix} B - d_BQ & A - d_AP \\ A - d_AP & 0 \end{pmatrix} - r[A - d_AP] = r \begin{pmatrix} A - d_AP & B - d_BQ \\ B - d_BQ & 0 \end{pmatrix} - r[B - d_BQ] \quad (26)$$

$$= r \begin{pmatrix} ((e_A - d_A)I - (A - d_AP))(B - d_BQ) \\ (A - d_AP) \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$= r \begin{pmatrix} (A - d_AP)((e_B - d_B)I - (B - d_BQ)) & B - d_BQ \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$=r[\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}]+r[((e_A-d_A)\mathbf{I}-(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}))(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q})((e_A-d_A)\mathbf{I}-(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}))] \quad (29)$$

$$=r[\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q}]+r[((e_B-d_B)\mathbf{I}-(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q}))(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})((e_B-d_B)\mathbf{I}-(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q}))]. \quad (30)$$

**证明** 在定理2中取 $\mathbf{C}=\mathbf{I}$ 和 $m=n$ 即可得到式(25)–(28). 由引理4知 $(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})^2=(e_A-d_A)\times(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})$ , 进而得 $(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})\left[\frac{1}{(e_A-d_A)^2}(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})\right](\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})=\frac{1}{(e_A-d_A)^2}(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})^3=(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})$ . 由上式知 $\frac{1}{(e_A-d_A)^2}(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})$ 和 $\frac{1}{(e_B-d_B)^2}(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q})$ 分别为 $\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q}$ 的广义逆, 从而可得:

$$\begin{aligned} & ((e_A-d_A)\mathbf{I}-(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}))(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q})(\mathbf{I}-(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})^{(1)}(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}))= \\ & \frac{1}{e_A-d_A}((e_A-d_A)\mathbf{I}-(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}))(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q})((e_A-d_A)\mathbf{I}-(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})); \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I}-(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q})^{(1)}(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q}))(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})((e_B-d_B)\mathbf{I}-(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q}))= \\ & \frac{1}{e_B-d_B}((e_B-d_B)\mathbf{I}-(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q}))(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})((e_B-d_B)\mathbf{I}-(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q})). \end{aligned} \quad (32)$$

于是由式(11)、(12)、(31)和式(32)有:

$$\begin{aligned} & r\left[\begin{array}{c} ((e_A-d_A)\mathbf{I}-(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}))(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q}) \\ (\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}) \end{array}\right]= \\ & r[\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}]+r[((e_A-d_A)\mathbf{I}-(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}))(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q})((e_A-d_A)\mathbf{I}-(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}))], \\ & r((\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})((e_B-d_B)\mathbf{I}-(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q}))(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q}))= \\ & r[\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q}]+r[((e_B-d_B)\mathbf{I}-(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q}))(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})((e_B-d_B)\mathbf{I}-(\mathbf{B}-d_B\mathbf{Q}))]. \end{aligned}$$

再由式(27)、(28)可得式(29)、(30)成立.

在推论1中取 $\mathbf{P}=\mathbf{Q}=\mathbf{I}_n$ 即可得文献[7]中的基本结论(文献[7]中的式(27)).

在定理2中取 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 即可得广义二次矩阵与任意矩阵的广义 Jordan 积的秩的不变性.

**推论2** 设 $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ ,  $\mathbf{C}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ , 且有复数 $d_A, e_A\in\mathbf{C}$ 使得 $\mathbf{A}\in\Omega_n(\mathbf{P}; d_A, e_A)$ . 若 $(a, b)\in\Gamma$ , 则有:

$$r[a\mathbf{AC}+b\mathbf{CA}-d_A(a\mathbf{PC}+b\mathbf{CP})]=r[\mathbf{AC}+\mathbf{CA}-d_A(\mathbf{PC}+\mathbf{CP})] \quad (33)$$

$$=r\left(\begin{array}{cc} \mathbf{C}(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}) & \mathbf{A}-d_A\mathbf{P} \\ (\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{array}\right)-r[\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}] \quad (34)$$

$$=r\left[\begin{array}{c} ((e_A-d_A)\mathbf{I}-(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}))\mathbf{C}(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P}) \\ (\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})\mathbf{C} \end{array}\right]. \quad (35)$$

**证明** 在定理2中取 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ , 由此得 $\mathbf{P}=\mathbf{Q}$ , 于是由式(18)可得式(33)成立. 再由式(19)、(21)可得式(34)、(35)成立.

文献[3]给出了与数量 $\lambda$ 和 $\mu$ 有关的数量幂等矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的和、差、换位子、Jordan 积的秩等式, 文献[9]得到了与数量 $\lambda$ 和 $\mu$ 无关的数量幂等矩阵的秩等式. 以下本文将给出数量幂等矩阵与任意矩阵线性组合的 Jordan 积的秩不变性.

**定理3** 设 $\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是由非零数 $e$ 确定的数量幂等矩阵, 即 $\mathbf{A}^2=e\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ , 则有:

$$r[a\mathbf{AC}+b\mathbf{CA}]=r[\mathbf{AC}+\mathbf{CA}]=r\left(\begin{array}{cc} \mathbf{CA} & \mathbf{A} \\ \mathbf{AC} & \mathbf{0} \end{array}\right)-r[\mathbf{A}], \mathbf{C}\in\mathbf{C}^{n\times n}, (a, b)\in\Gamma. \quad (36)$$

**证明** 设 $\mathbf{P}=\frac{1}{e}\mathbf{A}$ , 则 $\mathbf{P}^2=\frac{1}{e^2}\mathbf{A}^2=\frac{1}{e}\mathbf{A}=\mathbf{P}$ 且 $\mathbf{PA}=\frac{1}{e}\mathbf{A}^2=\mathbf{AP}=\mathbf{A}$ . 令 $d_A=0, e_A=e$ , 于是由

$(\mathbf{A}-d_A\mathbf{P})(\mathbf{A}-e_A\mathbf{P})=\mathbf{A}(\mathbf{A}-e\mathbf{P})=\mathbf{A}^2-e\mathbf{A}=\mathbf{0}$ 和式(4)知 $\mathbf{A}$ 是由 $d_A=0, e_A=e$ 和幂等矩阵 $\mathbf{P}=\frac{1}{e}\mathbf{A}$

所确定的广义二次矩阵, 即  $\mathbf{A} \in \Omega_n(\mathbf{P}; 0, e)$ . 应用式(33)、(34) 可知式(36)成立.

式(36)说明数量幂等矩阵  $\mathbf{A}$  (即  $\mathbf{A}^2 = e\mathbf{A}$ ) 与任意矩阵的 Jordan 积的秩等式的不变性不仅与组合系数无关, 而且与数  $e$  也无关. 因此, 定理 3 推广和改进了文献[2] 中定理 9 的结论.

### 参考文献:

- [1] GAU H L, WANG C J, WONG N C. Invertibility and Fredholmness of linear combinations of quadratic,  $k$ -potent and nilpotent operators[J]. Operators and Matrices, 2008, 2(2): 193-199.
- [2] TIAN Y, STYAN G P H. Rank equalities for idempotent matrices with applications[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 191: 77-97.
- [3] TIAN Y, STYAN G P H. Rank equalities for idempotent and involutory matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2001, 335: 101-117.
- [4] TIAN Y, STYAN G P H. When does  $\text{rank}(\mathbf{ABC}) = \text{rank}(\mathbf{AB}) + \text{rank}(\mathbf{BC}) - \text{rank}(\mathbf{B})$  hold? [J]. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2002, 33: 127-137.
- [5] TIAN Y. Rank equalities related to generalized inverses of matrices and their inverses of matrices and their applications[J]. Mathematics, 2000, 49(4): 269-288.
- [6] KOLIHA J J, RAKOČEVIĆ V, STRAŠKRABA I. The difference and sum of projectors[J]. Linear Algebra Appl, 2004, 388: 279-288.
- [7] 吕洪斌, 杨忠鹏, 陈梅香, 等. 二次矩阵广义 Jordan 积秩的不变性[J]. 吉林大学学报(理学版), 2017, 55(6): 1416-1424.
- [8] OSKAR M B, ROGER A H, GÖTZ T. Problem 41-13: range additivity of  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{A}^*$  [J]. IMAGE 41: The Bulletin of the International Linear Algebra Society, 2008(41): 44.
- [9] 黄少武, 杨忠鹏, 晏瑜敏. 数量幂等矩阵的一些秩等式[J]. 广西民族大学学报(自然科学版), 2010, 16(3): 60-66.
- [10] ALEKSIEJCZYK M, SMOKTUNOWICZ A. On properties of quadratic matrices[J]. Math Pannon, 2000, 11: 239-248.
- [11] UÇ M, ÖZDEMİR H, ÖZBANB A Y. On the quadraticity of linear combinations of quadratic matrices[J]. Linear Multilinear Algebra, 2015, 63(6): 1125-1137.
- [12] UÇ M, PETİK T, ÖZDEMİR H. The generalized quadraticity of linear combinations of two commuting quadratic matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2016, 64(9): 1696-1715.
- [13] 陈梅香, 杨忠鹏, 吕洪斌, 等. 矩阵空间的二次矩阵基与基秩[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(19): 199-205.
- [14] 张金辉, 曾敏丽, 杨忠鹏. 一个矩阵秩恒等式与对合矩阵秩等式的推广[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2009, 10(5): 389-393.
- [15] FAREBROTHER R W, TRENKLER G. On generalized quadratic matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2005, 410: 244-253.
- [16] 陈梅香, 叶铃滢, 杨忠鹏. 广义二次矩阵与其幂等矩阵线性组合幂等性的非平凡解[J]. 吉林大学学报(理学版), 2021, 59(2): 221-228.
- [17] PETİK T, ÖZDEMİR H, BENÍTEZ J. On the spectra of some combinations of two generalized quadratic matrices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 268: 978-990.
- [18] ZHANG F Z. Matrix Theory: Basic Results and Techniques[M]. New York: Springer, 1999.
- [19] HORN R A, JOHNSON C R. Matrix Analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1985.
- [20] MARSAGLIA G, STYAN G P H. Equalities and inequalities for ranks of matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1974, 2(3): 269-292.