第 47 卷 第 4 期 延边大学学报(自然科学版) Vol. 47 No. 4
2021 年 12 月 Journal of Yanbian University (Natural Science Edition) Dec. 2021

文章编号：1004-4353(2021)04-0283-06

一类具有位势的二维非线性薛定谔系统解的渐近行为

马瑞， 李春花
（延边大学 理学院，吉林 延吉 133002）

摘要：利用质量共振的性质、薛定谔方程的 Strichartz 估计、薛定谔算子的性质和先验估计的方法，讨论了一类具有位势的二维三次非线性薛定谔系统的小初值问题.证明了该问题整体解的存在性、解的时间衰减估计，并给出了解的长时间渐近行为.

关键词：非线性薛定谔方程；位势；质量共振；解的渐近行为
中图分类号：O175.29 **文献标识码**：A

Asymptotic behavior of solutions to nonlinear Schrödinger systems with potentials in 2D

MA Rui， LI Chunhua
（*College of Science*，*Yanbian University*，*Yanji* 133002，*China*）

Abstract：The small initial value problem of a class of two-dimensional cubic nonlinear Schrödinger systems with potential is discussed by using the characters of mass resonance，the Strichartz estimates of Schrödinger equations，the properties of Schrödinger operators and the method of a priori estimates. The existence of the global solution and the time decay estimates of the solution are proved，and the long-time asymptotic behavior of the solution is given.

Keywords：nonlinear Schrödinger equation；potentials；mass resonance；asymptotic behavior of solution

0 引言

本文考虑如下具有位势的非线性薛定谔系统的初值问题：

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t v_j + \left(\dfrac{1}{2m_j}\Delta - V_j(x)\right)v_j = F_j(v_1, v_2), \ (t, x) \in (1, \infty) \times \mathbf{R}^2; \\ v_j(1, x) = \phi_j(x), \ x \in \mathbf{R}^2. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $F_1(v_1, v_2) = v_1^2 \bar{v}_2$，$F_2(v_1, v_2) = \bar{v}_1 v_2^2$，$v_j(t, x)$ 是复值函数，$V_j(x)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的实值函数，$\bar{v}_j$ 是 v_j 的复共轭，m_j 是粒子质量，$j = 1, 2$. 令 $W_j(x) = 2m_j V_j(x)$，则由初值问题(1)可得：

收稿日期：2021－10－08
基金项目：国家自然科学基金(11461074)；吉林省中青年科技创新领军人才及团队项目(20200301053RQ)
第一作者：马瑞(1966—)，女，在读硕士，研究方向为微分方程及其应用.
通信作者：李春花(1977—)，女(朝鲜族)，博士，副教授，研究方向为微分方程及其应用.

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t v_j + \dfrac{1}{2m_j}\Delta_{W_j} v_j = F_j(v_1, v_2),\ (t, x) \in (1, \infty) \times \mathbf{R}^2; \\ v_j(1, x) = \phi_j(x),\ x \in \mathbf{R}^2. \end{cases} \tag{2}$$

其中：$\Delta_{W_j} = \Delta - W_j(x)$, $j = 1, 2$; $F_1(v_1, v_2) = v_1^2 \bar{v}_2$, $F_2(v_1, v_2) = \bar{v}_1 v_2^2$. 为了研究初值问题(2)解的渐近行为,本文假设：

(H1) $m_1 = m_2$;

(H2) $W_j(x)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的实值函数,且 $W_j(x) \in C^1$ 满足衰减估计 $|W_j(x)| + |x \cdot \nabla W_j(x)| \leqslant \dfrac{c}{\langle x \rangle^{\beta}}$,其中 $j = 1, 2$, $c > 0$, $\beta > 3$;

(H3) $W_j(x)$ 是非负的;

(H4) 零是一个正则点[1].

当 $W_j(x) \equiv 0$, $j = 1, 2$ 时,初值问题(2) 可转化为：

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t v_j + \dfrac{1}{2m_j}\Delta v_j = F_j(v_1, v_2),\ (t, x) \in (1, \infty) \times \mathbf{R}^2; \\ v_j(1, x) = \phi_j(x),\ x \in \mathbf{R}^2. \end{cases} \tag{3}$$

其中 $F_1(v_1, v_2) = v_1^2 \bar{v}_2$, $F_2(v_1, v_2) = \bar{v}_1 v_2^2$, $j = 1, 2$. 若在假设(H1) 条件下, $u_j = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t m_j c^2} v_j$, $j = 1, 2$,则可将初值问题(3) 看作是如下 Klein-Gordon 方程的非相对论极限[2]：

$$\frac{1}{2c^2 m_j}\partial_t^2 u_j - \frac{1}{2m_j}\Delta u_j + \frac{m_j c^2}{2} u_j = -F_j(u_1, u_2),\ (t, x) \in (1, \infty) \times \mathbf{R}^2,$$

其中 $F_1(u_1, u_2) = u_1^2 \bar{u}_2$, $F_2(u_1, u_2) = \bar{u}_1 u_2^2$, $j = 1, 2$, c 是光速.

非线性薛定谔方程在非线性光学、等离子物理等领域均有重要的应用. 近年来,带有位势函数的非线性薛定谔方程初值问题解的渐近性质受到学者们的广泛关注,并获得了一些结果[3-4];但对带有位势函数的二维非线性薛定谔方程初值问题解的渐近性质研究得较少. 文献[1] 的作者仅研究了不含粒子质量、带有位势函数的二维非线性薛定谔方程初值问题. 本文在系统质量共振的条件(H1) 下证明薛定谔系统的初值问题(2) 整体解的存在性,并讨论解的长时间渐近行为.

本文中向量函数空间和标量函数空间使用相同的符号. 对任意的 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, L^p 表示 $\mathbf{R}^2$ 上关于勒贝格测度的 p 方可积函数空间, $\|\ \|_{L^p}$ 表示 L^p 上的范数. 对任意 $m, s \in \mathbf{R}$,定义加权索伯列夫空间 $H^{m,s}$ 如下：

$$H^{m,s} = \left\{ f = (f_1, f_2) \in S';\ \|f\|_{H^{m,s}} = \sum_{j=1}^{2} \|f_j\|_{H^{m,s}} < \infty \right\},$$

其中 $\|f_j\|_{H^{m,s}} = \|(1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}}(1 - \Delta)^{\frac{m}{2}} f_j\|_{L^2}$, $j = 1, 2$; S' 是缓增广义函数空间. 为表达方便,简记 $H^{m,0} = H^m$. 对任意的 $s \geqslant 0$,定义

$$\dot{H}^{0,s} = \left\{ f = (f_1, f_2) \in S';\ \|f\|_{\dot{H}^{0,s}} = \sum_{j=1}^{2} \|f_j\|_{\dot{H}^{0,s}} < \infty \right\},$$

其中 $\|f_j\|_{\dot{H}^{0,s}} = \||x|^s f_j\|_{L^2}$, $j = 1, 2$. 定义 $C(I, Y)$ 是区间 $I \subseteq \mathbf{R}$ 到巴拿赫空间 Y 的连续函数空间. 简记 $F_j(v_1, v_2)$ 为 F_j. 若无特殊说明,始终假定空间维数为 2. 为方便行文,本文用字母 C 表示正常数,且 C 在不同的地方表示不同的值.

1 预备知识

首先定义

$$(D_\alpha\phi)(x)=\frac{1}{\mathrm{i}\alpha}\phi\left(\frac{x}{\alpha}\right),\ \alpha\neq 0,\ E(t)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}t|\xi|^2},\ M(t)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2t}|x|^2},\ t\neq 0;$$

$$|J_W|^\alpha(t)=M(-t)^m\left(-\frac{t^2}{m^2}\Delta_W\right)^{\frac{\alpha}{2}}M(t)^m,\ \Delta_W=\Delta-W(x),\ m\neq 0.$$

再令 $U_\alpha(t)=\mathscr{F}^{-1}E(t)^\alpha\mathscr{F}$，其中 $\mathscr{F}f$ 是 f 的 Fourier 变换，$\mathscr{F}^{-1}g$ 是 g 的 Fourier 的逆变换，$\alpha\neq 0$. 则当 $t\neq 0$ 时，$U_\alpha(t)$ 和 $U_\alpha(-t)$ 可分别写成如下形式：

$$(U_\alpha(t)\phi)(x)=M(t)^{-\frac{1}{\alpha}}D_{\alpha t}(\mathscr{F}M(t)^{-\frac{1}{\alpha}}\phi)(x),$$

$$(U_\alpha(-t)\phi)(x)=M(t)^{\frac{1}{\alpha}}(\mathscr{F}^{-1}D_{\alpha t}^{-1}M(t)^{\frac{1}{\alpha}}\phi)(x),$$

并且有 $|J_{\frac{1}{m}}|^\alpha(t):=U_{\frac{1}{m}}(t)|x|^\alpha U_{\frac{1}{m}}(-t)=M(-t)^m\left(-\frac{t^2}{m^2}\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}M(t)^m$[5-8].

令 $[E,F]=EF-FE$，并考虑如下两个引理：

引理 1　设 $W(x)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的实值函数，$m\in\mathbf{R}^+$，$\alpha>0$. 令 $A(\alpha):=\alpha(-\Delta_W)^{\frac{\alpha}{2}}+[x\cdot\nabla,(-\Delta_W)^{\frac{\alpha}{2}}]$，则下式成立：

$$\left[\mathrm{i}\partial_t+\frac{1}{2m}\Delta_W,|J_W|^\alpha(t)\right]=\mathrm{i}m^{-\alpha}t^{\alpha-1}M(-t)^mA(\alpha)M(t)^m,\ x\in\mathbf{R}^2.$$

引理 2　设 $W(x)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的实值函数，$m\in\mathbf{R}^+$，$0<\alpha<2$. 令 $U:=2W+(x\cdot\nabla W)$，则下式成立：

$$A(\alpha)=c(\alpha)\int_0^\infty\tau^{\frac{\alpha}{2}}(\tau-\Delta_W)^{-1}U(\tau-\Delta_W)^{-1}\mathrm{d}\tau,\ x\in\mathbf{R}^2,$$

其中 $c(\alpha)^{-1}=\int_0^\infty\tau^{\frac{\alpha}{2}-1}(\tau+1)^{-1}\mathrm{d}\tau$.

由于引理 1 和引理 2 的证明与文献[1]中的证明不同之处只在于本文引入了粒子质量 m，需要考察算子 $|J_W|^\alpha(t)=M(-t)^m\left(-\frac{t^2}{m^2}\Delta_W\right)^{\frac{\alpha}{2}}M(t)^m$ 的性质，而文献[1]中考察的是算子 $|J_V|^s(t)=M(-t)(-t^2\Delta_V)^{\frac{s}{2}}M(t)$ 的性质，故本文在此省略引理 1 和引理 2 的证明.

注 1　通过引理 1 和引理 2 可知，若 $W(x)\equiv 0$，则 $A(\alpha)\equiv 0$，且有 $\left[\mathrm{i}\partial_t+\frac{1}{2m}\Delta,|J_{\frac{1}{m}}|^\alpha\right]\equiv 0$ 成立.

设 (p,q) 为薛定谔容许对，满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$，$p\geqslant 2$，$q\geqslant 2$，$(p,q)\neq(2,\infty)$，则有如下的 Strichartz 估计：

引理 3[1]　设 $W(x)$ 满足条件(H2)—(H4). 令 $a,b\in\mathbf{R}$，C 是一个正常数，(p,q) 和 (r,k) 是薛定谔容许对，则可以得到：

$$\|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2m_j}t\Delta_W}f\|_{L^p(\mathbf{R};L^q)}\leqslant C\|f\|_{L^2},\ \forall f\in L^2;$$

$$\left\|\int_a^t\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2m_j}(t-\tau)\Delta_W}F(s,\cdot)\mathrm{d}s\right\|_{L^p([a,b];L^q)}\leqslant C\|F\|_{L^{r'}([a,b];L^{k'})},\ \forall F\in L^1_{\mathrm{loc}}([a,b],L^2)\cap L^{r'}([a,b],L^{k'}),$$

其中 $m_j\neq 0$，$j=1,2$，$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$，$\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$.

引理 4[1]　设 $W(x)$ 满足条件(H2)和(H3)，C 是一个正常数，则可以得到如下估计：

(i) 对于任意的 $1\leqslant\alpha<2$，$0<\sigma<1$，有

$$\|(-\Delta_W)^{\frac{\alpha}{2}}f-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}f\|_{L^2}\leqslant C\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}f\|_{L^2}^{\frac{\sigma}{\alpha}}\|f\|_{L^2}^{1-\frac{\sigma}{\alpha}};\tag{4}$$

(ii) 对于任意的 $\alpha\geqslant 0$，有

$$\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}f\|_{L^2}\leqslant C\|(-\Delta_W)^{\frac{\alpha}{2}}f\|_{L^2};\tag{5}$$

(iii) 对于任意的 $1<\alpha<2$,有

$$\|f\|_{L^\infty}\leqslant Ct^{-1}\||J_W|^\alpha(t)f(t,\cdot)\|_{L^2}^{\frac{1}{\alpha}}\|f(t,\cdot)\|_{L^2}^{1-\frac{1}{\alpha}}. \tag{6}$$

引理 5 设系统(2)满足质量共振条件(H1),$W_j(x)$,$j=1,2$ 满足条件(H2)和(H3),C 是一个正常数,则有:

$$\||J_{W_1}|^\alpha(t)F_1(v_1,v_2)\|_{L^2}\leqslant Ct^{-2}(\||J_W|^\alpha(t)v\|_{L^2}^{\frac{2}{\alpha}+1}+\||J_W|^\alpha(t)v\|_{L^2}^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\sigma}{\alpha}}\|v\|_{L^2}^{1-\frac{\sigma}{\alpha}})\|v\|_{L^2}^{2-\frac{2}{\alpha}}, \tag{7}$$

$$\||J_{W_2}|^\alpha(t)F_2(v_1,v_2)\|_{L^2}\leqslant Ct^{-2}(\||J_W|^\alpha(t)v\|_{L^2}^{\frac{2}{\alpha}+1}+\||J_W|^\alpha(t)v\|_{L^2}^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\sigma}{\alpha}}\|v\|_{L^2}^{1-\frac{\sigma}{\alpha}})\|v\|_{L^2}^{2-\frac{2}{\alpha}}. \tag{8}$$

其中 $F_1(v_1,v_2)=v_1^2\bar{v}_2$,$F_2(v_1,v_2)=\bar{v}_1v_2^2$,$\||J_W|^\alpha(t)v\|_{L^2}:=\sum_{j=1}^{2}\||J_{W_j}|^\alpha(t)v_j\|_{L^2}$,$1<\alpha<2$,$0<\sigma<1$.

证明 利用 $|J_{W_j}|^\alpha(t)=M(-t)^{m_j}\left(-\frac{t^2}{m_j^2}\Delta_{W_j}\right)^{\frac{\alpha}{2}}M(t)^{m_j}$ 和质量共振条件(H1),有

$$|J_{W_j}|^\alpha(t)F_j(v_1,v_2)=M(-t)^{m_j}\left(-\frac{t^2}{m_j^2}\Delta_{W_j}\right)^{\frac{\alpha}{2}}F_j(M^{m_1}v_1,M^{m_2}v_2).$$

在上式的基础上,应用引理 4 中的式(4)、式(6)以及条件(H1)可得:

$$\begin{aligned}
&\||J_{W_1}|^\alpha(t)F_1(v_1,v_2)\|_{L^2}=\left\|\left(-\frac{t^2}{m_1^2}\Delta_{W_1}\right)^{\frac{\alpha}{2}}M(t)^{m_1}v_1^2\bar{v}_2\right\|_{L^2}=\\
&\left\|\left(-\frac{t^2}{m_1^2}\Delta_{W_1}\right)^{\frac{\alpha}{2}}(M(t)^{m_1}v_1)^2\overline{M(t)^{m_2}v_2}\right\|_{L^2}\leqslant C\left(\left\|\left(-\frac{t^2}{m_1^2}\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}(M(t)^{m_1}v_1)^2\overline{M(t)^{m_2}v_2}\right\|_{L^2}+\right.\\
&\left.\left\|\left(-\frac{t^2}{m_1^2}\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}(M(t)^{m_1}v_1)^2\overline{M(t)^{m_2}v_2}\right\|_{L^2}^{\frac{\sigma}{\alpha}}\|(M(t)^{m_1}v_1)^2\overline{M(t)^{m_2}v_2}\|_{L^2}^{1-\frac{\sigma}{\alpha}}\right)\leqslant\\
&C\|v_1\|_{L^\infty}^2\left\|\left(-\frac{t^2}{m_1^2}\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}\overline{M(t)^{m_2}v_2}\right\|_{L^2}+C\left\|\left(-\frac{t^2}{m_1^2}\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}M(t)^{m_1}v_1\right\|_{L^2}\|v_1\|_{L^\infty}\|v_2\|_{L^\infty}+\\
&C\left(\|v_1\|_{L^\infty}^2\left\|\left(-\frac{t^2}{m_1^2}\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}\overline{M(t)^{m_2}v_2}\right\|_{L^2}+\left\|\left(-\frac{t^2}{m_1^2}\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}M(t)^{m_1}v_1\right\|_{L^2}\|v_1\|_{L^\infty}\|v_2\|_{L^\infty}\right)^{\frac{\sigma}{\alpha}}\times\\
&(\|v_1\|_{L^\infty}^2\|v_2\|_{L^2}+\|v_1\|_{L^2}\|v_1\|_{L^\infty}\|v_2\|_{L^\infty})^{1-\frac{\sigma}{\alpha}},
\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $1<\alpha<2$, $0<\sigma<1$. 为了方便引理 5 的以下证明,定义

$$\||J_W|^\alpha(t)v\|_{L^2}:=\sum_{j=1}^{2}\||J_{W_j}|^\alpha(t)v_j\|_{L^2}, \tag{10}$$

则应用式(5)、(6)、(9) 和式(10) 可得:

$$\begin{aligned}
&\||J_{W_1}|^\alpha(t)F_1(v_1,v_2)\|_{L^2}\leqslant C\|v_1\|_{L^\infty}^2\left\|\left(-\frac{t^2}{m_1^2}\Delta_{W_2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\overline{M(t)^{m_2}v_2}\right\|_{L^2}+\\
&C\left\|\left(-\frac{t^2}{m_1^2}\Delta_{W_1}\right)^{\frac{\alpha}{2}}M(t)^{m_1}v_1\right\|_{L^2}\|v_1\|_{L^\infty}\|v_2\|_{L^\infty}+C\left(\|v_1\|_{L^\infty}^2\left\|\left(-\frac{t^2}{m_1^2}\Delta_{W_2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\overline{M(t)^{m_2}v_2}\right\|_{L^2}+\right.\\
&\left.\left\|\left(-\frac{t^2}{m_1^2}\Delta_{W_1}\right)^{\frac{\alpha}{2}}M(t)^{m_1}v_1\right\|_{L^2}\|v_1\|_{L^\infty}\|v_2\|_{L^\infty}\right)^{\frac{\sigma}{\alpha}}(\|v_1\|_{L^\infty}^2\|v_2\|_{L^2}+\|v_1\|_{L^2}\|v_1\|_{L^\infty}\|v_2\|_{L^\infty})^{1-\frac{\sigma}{\alpha}}\leqslant\\
&Ct^{-2}(\||J_W|^\alpha(t)v\|_{L^2}^{\frac{2}{\alpha}+1}+\||J_W|^\alpha(t)v\|_{L^2}^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\sigma}{\alpha}}\|v\|_{L^2}^{1-\frac{\sigma}{\alpha}})\|v\|_{L^2}^{2-\frac{2}{\alpha}},
\end{aligned}$$

其中 $1<\alpha<2$, $0<\sigma<1$. 由以上知式(7) 成立. 通过类似的方法可得式(8) 成立. 证毕.

引理 6[1] 设 $W_j(x)(j=1,2)$ 满足条件(H2) 和(H3),$1\leqslant q\leqslant 2$,$1<\alpha<2$,$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$,$C$ 是一个正常数,则有 $\|A(\alpha)f\|_{L^q}\leqslant C\|f\|_{L^{q'}}$.

2 主要结果及其证明

定理 1 设问题(2)满足质量共振条件(H1)，W_j 满足条件(H2)—(H4)，C 是一个正常数，并且 $1<\alpha<\frac{4}{3}$，$j=1,2$，则当 $\|\phi_j\|_{H^\alpha\cap\dot H^{0,\alpha}}$ 充分小时，初值问题(2)存在唯一解 (v_1,v_2) 并满足：

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2m_j}\Delta_{W_j}}v_j\in C([1,\infty),H^\alpha\cap H^{0,\alpha}),\ j=1,2;$$

$$\|v\|_{L^\infty}=\sum_{j=1}^{2}\|v_j\|_{L^\infty}\leqslant Ct^{-1},\ t\geqslant 1. \tag{11}$$

另外，还存在 $(\psi_{1+},\psi_{2+})\in H^\alpha\cap\dot H^{0,\alpha}$ 使得

$$\|v_j(t)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2m_j}\Delta_{W_j}}\psi_{j+}\|_{H^\alpha\cap H^{0,\alpha}}\to 0,\ t\to+\infty,\ j=1,2. \tag{12}$$

证明 定义如下的函数空间：

$$X_T=\{f=(f_1,f_2)\in C([1,T];S');\||f|\|_{X_T}=\||J_W|^\alpha(t)f\|_{L^\infty([1,T];L^2)}+\sup_{t\in[1,T]}\|f\|_{H^\alpha}<\infty\},$$

其中 $\||f|\|_{X_T}=\sum_{j=1}^{2}\||J_{W_j}|^\alpha(t)f_j\|_{L^\infty([1,T];L^2)}+\sum_{j=1}^{2}\sup_{t\in[1,T]}\|f_j\|_{H^\alpha}$，$T>1$，$1<\alpha<\frac{4}{3}$.

利用压缩映射原理，容易证明初值问题(2)解的局部存在性，因此本文省略这部分的证明. 将 $|J_{W_j}|^\alpha(t)(j=1,2)$ 作用于方程(2)的两边，并应用引理 1 可得：

$$\left(\mathrm{i}\partial_t+\frac{1}{2m_j}\Delta_{W_j}\right)|J_{W_j}|^\alpha(t)v_j=|J_{W_j}|^\alpha(t)F_j(v_1,v_2)+\mathrm{i}m_j^{-\alpha}t^{\alpha-1}M(-t)^{m_j}A(\alpha)M(t)^{m_j}v_j.$$

由上式可得：

$$|J_{W_j}|^\alpha(t)v_j=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2m_j}t\Delta_{W_j}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2m_j}\Delta_{W_j}}|J_{W_j}|^\alpha(1)\phi_j(x)-\mathrm{i}\int_1^t\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2m_j}(t-\tau)\Delta_{W_j}}|J_{W_j}|^\alpha(\tau)F_j(v_1,v_2)\mathrm{d}\tau+$$
$$m_j^{-\alpha}\int_1^t\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2m_j}(t-\tau)\Delta_{W_j}}\tau^{\alpha-1}M(-\tau)^{m_j}A(\alpha)M(\tau)^{m_j}v_j(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{13}$$

根据引理 3 和式(13)有：

$$\||J_{W_j}|^\alpha(t)v_j\|_{L^\infty([1,T];L^2)}\leqslant C(\||J_{W_j}|^\alpha(1)\phi_j(x)\|_{L^2}+$$
$$\||J_{W_j}|^\alpha(t)F_j(v_1,v_2)\|_{L^1([1,T];L^2)}+\|t^{\alpha-1}M(-t)^{m_j}A(\alpha)M(t)^{m_j}v_j\|_{L^{p'_1}([1,T];L^{q'_1})}), \tag{14}$$

其中 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p'_1}=1$，$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q'_1}=1$，$(p_1,q_1)\neq(2,\infty)$.

首先考虑 $\||J_{W_j}|^\alpha(t)F_j(v_1,v_2)\|_{L^1([1,T];L^2)}$，$j=1,2$. 应用引理 5 有：

$$\||J_{W_j}|^\alpha(t)F_1(v_1,v_2)\|_{L^2}\leqslant$$
$$Ct^{-2}(\||J_W|^\alpha(t)v\|_{L^2}^{\frac{2}{\alpha}+1}+\||J_W|^\alpha(t)v\|_{L^2}^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\sigma}{\alpha}}\|v\|_{L^2}^{1-\frac{\sigma}{\alpha}})\|v\|_{L^2}^{2-\frac{2}{\alpha}},\ j=1,2. \tag{15}$$

其次估计 $\|t^{\alpha-1}M(-t)^{m_j}A(\alpha)M(t)^{m_j}v_j\|_{L^{p'_1}([1,T];L^{q'_1})}$. 应用引理 6 和索伯列夫不等式 $\|v\|_{L^{q_1}}\leqslant C\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}\|v\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}$ $(0<\alpha<\frac{4}{3}$，$q_1=\frac{8}{4-3\alpha})$ 可得：

$$\|M(-t)^{m_j}A(\alpha)M(t)^{m_j}v_j\|_{L^{q'_1}}\leqslant C\|v_j\|_{L^{q_1}}\leqslant C\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v_j\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}\|v_j\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\leqslant$$
$$C\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v_j\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}\|\phi_j\|_{L^2}^{\frac{1}{4}},\ 1<\alpha<\frac{4}{3}, \tag{16}$$

其中 $q_1=\frac{8}{4-3\alpha}$. 由式(10)、(16)可得：

$$\|t^{\alpha-1}M(-t)^{m_j}A(\alpha)M(t)^{m_j}v_j\|_{L^{p'_1}([1,T];L^{q'_1})}\leqslant C\|\phi_j\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\|t^{\frac{\alpha}{4}-1}\||J_W|^\alpha(t)v\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}\|_{L^{p'_1}([1,T])}\leqslant$$

$$C\|\phi_j\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\|t^{\frac{\alpha}{4}-1}\|_{L^{p'_1}([1,T])}\|\||J_W|^{\alpha}(t)v\|_{L^2}\|_{L^\infty([1,T])}^{\frac{3}{4}},\ 1<\alpha<\frac{4}{3},$$

其中$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p'_1}=1$, $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q'_1}=1$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{2}$ 且 $1<q'_1\leqslant 2$. 由于$\frac{1}{p'_1}=\frac{8-3\alpha}{8}$, $1<\alpha<\frac{4}{3}$,因此有 $(\frac{\alpha}{4}-1)p'_1+1=-\frac{\alpha}{8-3\alpha}<0$, $\|t^{\frac{\alpha}{4}-1}\|_{L^{p'_1}([1,T])}\leqslant C$,由此可得:

$$\|t^{\alpha-1}M(-t)^{m_j}A(\alpha)M(t)^{m_j}v_j\|_{L^{p'_1}([1,T];L^{q'_1})}\leqslant C\|\phi_j\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\|\||J_W|^{\alpha}(t)v\|_{L^2}\|_{L^\infty([1,T])}^{\frac{3}{4}}. \tag{17}$$

由式(7)、(8)、(14) 和式(17) 可得:

$$\||J_{W_j}|^{\alpha}(t)v_j\|_{L^\infty([1,T];L^2)}\leqslant C(\|\phi_j(x)\|_{H^\alpha\cap\dot{H}^{0,\alpha}}+\|\phi(x)\|_{H^\alpha\cap\dot{H}^{0,\alpha}}^{2-\frac{2}{\alpha}}\||J_W|^{\alpha}(t)v\|_{L^\infty([1,T];L^2)}^{\frac{2}{\alpha}+1})+$$
$$C\|\phi(x)\|_{H^\alpha\cap\dot{H}^{0,\alpha}}^{3-\frac{2}{\alpha}-\frac{\sigma}{\alpha}}\||J_W|^{\alpha}(t)v\|_{L^\infty([1,T];L^2)}^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\sigma}{\alpha}}+C\|\phi_j\|_{H^\alpha\cap\dot{H}^{0,\alpha}}^{\frac{1}{4}}\||J_W|^{\alpha}(t)v\|_{L^\infty([1,T];L^2)}^{\frac{3}{4}}. \tag{18}$$

再由式(10)、(18) 可得:

$$\||J_W|^{\alpha}(t)v\|_{L^\infty([1,T];L^2)}\leqslant C(\|\phi(x)\|_{H^\alpha\cap\dot{H}^{0,\alpha}}+\|\phi(x)\|_{H^\alpha\cap\dot{H}^{0,\alpha}}^{2-\frac{2}{\alpha}}\||J_W|^{\alpha}(t)v\|_{L^\infty([1,T];L^2)}^{\frac{2}{\alpha}+1})+$$
$$C\|\phi(x)\|_{H^\alpha\cap\dot{H}^{0,\alpha}}^{3-\frac{2}{\alpha}-\frac{\sigma}{\alpha}}\||J_W|^{\alpha}(t)v\|_{L^\infty([1,T];L^2)}^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\sigma}{\alpha}}+C\|\phi(x)\|_{H^\alpha\cap\dot{H}^{0,\alpha}}^{\frac{1}{4}}\||J_W|^{\alpha}(t)v\|_{L^\infty([1,T];L^2)}^{\frac{3}{4}},$$

其中 $1<\alpha<\frac{4}{3}$, $0<\sigma<1$. 由此可知若$\|\phi(x)\|_{H^\alpha\cap\dot{H}^{0,\alpha}}$ 足够小就可以找到常数 $C_1>0$,使得

$$\||J_W|^{\alpha}(t)v\|_{L^\infty([1,T];L^2)}\leqslant C_1\|\phi(x)\|_{H^\alpha\cap\dot{H}^{0,\alpha}}. \tag{19}$$

应用类似上述的方法,可以找到常数 $C_2>0$,使得

$$\|v\|_{H^\alpha}\leqslant C_2\|\phi(x)\|_{H^\alpha\cap\dot{H}^{0,\alpha}}. \tag{20}$$

由式(19)、(20) 可得初值问题(2) 整体解的存在性. 再由引理 4 中的式(6) 即可得整体解的衰减估计式(11) 成立. 令 $\psi_{j+}=e^{-\frac{i}{2m_j}\Delta_{W_j}}\phi_j(x)-i\int_1^\infty e^{-\frac{i}{2m_j}\tau\Delta_{W_j}}F_j(v_1,v_2)d\tau$, $j=1,2$. 则有:

$$v_j-e^{\frac{i}{2m_j}t\Delta_{W_j}}\psi_{j+}=i\int_t^\infty e^{-\frac{i}{2m_j}(t-\tau)\Delta_{W_j}}F_j(v_1,v_2)d\tau,\ j=1,2.$$

基于上述应用 Strichartz 估计和类似初值问题(2) 整体解衰减估计的证明即可得式(12) 成立. 证毕.

参考文献:

[1] GEORGIEV V, LI C H. On the scattering problem for the nonlinear Schrödinger equation with a potential in 2D[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2019,398:208-218.

[2] KAWAHARA Y, SUNAGAWA H. Global small amplitude solutions for two-dimensional nonlinear Klein-Gordon systems in the presence of mass resonance[J]. J Differential Equations, 2011,251(9):2549-2567.

[3] LI Z, ZHAO Z F. Decay and scattering of solutions to nonlinear Schrödinger equations with regular potentials for nonlinearities of sharp growth[J]. J Math Study, 2017,50(3):277-290.

[4] CUCCAGNA S, GEORGIEV V, VISCIGLIA N. Decay and scattering of small solutions of pure power NLS in R with $p>3$ and with a potential[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2014,67(2):957-981.

[5] HAYASHI N, OZAWA T. Scattering theory in weighted $L^2(\mathbf{R}^n)$ spaces for some Schrödinger equations[J]. Ann Inst H Poincaré Phys Théor, 1988,48(1):17-37.

[6] HAYASHI N, LI C H, NAUMKIN P I. On a system of nonlinear Schrödinger equations in 2D[J]. Differential Integral Equations, 2011,24(5/6):417-434.

[7] KATAYAMA S, LI C H, SUNAGAWA H. A remark on decay rates of solutions for a system of quadratic nonlinear Schrödinger equations in 2D[J]. Differential Integral Equations, 2014,27(3/4):301-312.

[8] LI C H. On a system of quadratic nonlinear Schrödinger equations and scale invariant spaces in 2D[J]. Differential and Integral Equations, 2015,28(3/4):201-220.