文章编号: 1004-4353(2021)03-0243-06

证券市场中庄家与散户间的确定性微分博弈

潘素娟[1], 李时银[2], 赵佩[2]
(1.福建商学院 信息工程学院,福州 350012; 2.厦门大学 数学学院,福建 厦门 361005)

摘要: 基于确定性微分博弈理论,建立了一种庄家与散户间的连续时间的博弈模型.首先将所有散户作为一个整体与庄家进行博弈,以博弈双方持股率的动态关系作为动态系统方程,并以此构建了一个确定性微分博弈模型;然后运用开环纳什均衡和反馈纳什均衡分别求解出满足共态函数的常微分方程组和满足价值函数的 Issacs-Bellman 偏微分方程,以此得到庄家与散户博弈的开环纳什均衡策略和反馈纳什均衡策略.该结果可为金融监管部门监管证券市场和证券市场投资者买卖股票提供参考.

关键词: 动态系统; 开环纳什均衡; 反馈纳什均衡; Issacs-Bellman 偏微分方程; 确定性微分博弈
中图分类号: O225; F830.5 **文献标识码**: A

Deterministic differential game of individual market makers in securities market

PAN Sujuan[1], LI Shiyin[2], ZHAO Pei[2]
(1. *College of Information Engineering*, *Fujian Business College*, *Fuzhou* 350012, *China*;
2. *College of Mathematics*, *Xiamen University*, *Xiamen* 361005, *China*)

Abstract: Based on the theory of deterministic differential game, a continuous time game model between the dealer and the retail investor is established. Firstly, all retail investors are regarded as a whole to play a game with the makers, and the dynamic relationship of the shareholding ratio of the two sides in the game is regarded as the dynamic system equation; Then, the open-loop Nash equilibrium and the feedback Nash equilibrium are used to solve the ordinary differential equations satisfying the common state function and the Issacs Bellman partial differential equations satisfying the value function, respectively, so as to obtain the open-loop Nash equilibrium strategy and the feedback Nash equilibrium strategy of the game between the dealer and the retail investor. The results can provide a reference for financial regulators to supervise the securities market and investors to buy and sell stocks in the securities market.

Keywords: dynamic system; open-loop Nash equilibrium; feedback Nash equilibrium; Issacs-Bellman partial differential equation; deterministic differential game

在现实的博弈决策中,由于时间是不间断的,因此博弈的参与者必须时刻作出决策.研究表明,可应用确定性微分博弈来分析连续时间的决策行为.例如:Dominika 等[1]针对竞争细分市场给出了一种商誉模型的开环均衡解存在的充分条件;Zhou 等[2]将 Pontryagin 最大值原理作为最优性条件,研究了参与者不断更新的合作微分对策;Puduru 等[3]在事件树上给出了约束线性二次动态博弈的反馈和开环纳

收稿日期: 2021-03-21
基金项目: 福建省中青年教师教育科研项目(JAT190502);福建省自然科学基金(2021J011253);福建商学院教学改革与建设项目(2021JGB08)
作者简介: 潘素娟(1982—),女,硕士,副教授,研究方向为金融工程与金融数学.

什均衡解;程粟粟等[4]利用动态博弈的方法研究发现,在战略合作下博弈参与国捕获和封存的二氧化碳数量最多;Abraham 等[5]根据广义纳什博弈理论,给出了在离散时间动态博弈(DTDG)中存在开环纳什均衡条件的一种新的求解方法.众所周知,在证券市场中庄家和散户的博弈对证券市场的走势具有重要的影响.但目前为止,尚未见到将确定性微分博弈理论应用于庄家和散户间的连续时间博弈的研究中.为此,本研究运用动态博弈理论中的确定性微分博弈对专家和散户之间的博弈行为进行分析,得到了庄家和散户博弈的开环纳什均衡策略和反馈纳什均衡策略.

1 微分博弈的动态系统

1.1 动态博弈理论

1)假设在一个微分博弈中,每位参与者的目标函数为:

$$\max_{\{u_i\}} \int_{t_0}^{T} g^i\,[t,x(t),u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t)]\,\mathrm{d}t+\varphi^i(x(T)),\tag{1}$$

其中 n 为总人数,$g^i(\cdot)\geqslant 0$,$\varphi^i(\cdot)\geqslant 0$.目标函数(1)的值取决于如下的确定性动态系统[6]:

$$\dot{x}(t)=f\,[t,x(t),u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t)]\,,\ x(t_0)=x_0.\tag{2}$$

式中:$t\,(t\in[t_0,T])$代表博弈的一个时间点,$T-t_0$ 为博弈的持续期间(t_0 和 T 分别是博弈的开始时刻和结束时刻);$x(t)\,(x(t)\subset R^m)$表示状态变量,其进展变化取决于动态系统(2);$u_i\,(u_i\in U^i)$表示参与者 i 的控制,它是一条随着时间的变化而变化的策略路径.由动态系统(2)可知,系统(2)的状态在时点 t 的变化 $\dot{x}(t)$ 取决于函数 $f\,[t,x(t),u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t)]$,而该函数又取决于当前状态 $x(t)$、当前时刻 t 以及所有参与者在当前的控制$(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))$.用 $g^i\,[t,x(t),u_1,u_2,\cdots,u_n]$ 表示每个参与者 i 的瞬时支付,即参与者 i 在每一时间点的支付;用 $\varphi^i(\cdot)$ 表示每个参与者 i 的终点支付.当 $i\in\mathbf{N}$ 和 $t\in[t_0,T]$ 时,函数 $f\,[t,x,u_1,u_2,\cdots,u_n]$、$g^i\,[t,x(t),u_1,u_2,\cdots,u_n]$ 和 $\varphi^i(\cdot)$ 都是可微分函数.

2)将 $\eta^i(\cdot)\,(i\in\mathbf{N})$ 定义为一个集合函数,并表示为:

$$\eta^i(s)=\{x(t),t_0\leqslant t\leqslant \varepsilon_s^i\}\,,\ t_0\leqslant \varepsilon_s^i\leqslant s.\tag{3}$$

式中 ε_s^i 对于 s 是非递减的,$\eta^i(\cdot)$ 表示的是参与者 i 的资讯结构(information structure).对于任意的参与者 $i\,(i\in\mathbf{N})$,存在 Borel 集 $B\,(B\subset S_0)$,使得柱集(cylinder sets)$\{x\in S_0,x(t)\in B\}$ 均可以在 S_0 内产生一个 sigma 域 N_s^i,其中 $0\leqslant t\leqslant \varepsilon_s$,sigma 域 $N_s^i\,(s\geqslant t_0)$ 是参与者 i 的资讯领域(information field).此外,在 $u_i(s)=v_i(s,x)$ 中,v_i 的映射为 $[t_0,T]\times S_0\rightarrow U^i$,且该映射的预设类别 Γ^i 是可测量的[7].令 U^i 是参与者 i 的策略空间,且空间中的每个元素 v_i 都是参与者 i 的可允许策略.

3)令 $v_{-i}^*(t)=\{v_1^*(t),v_2^*(t),\cdots,v_{i-1}^*(t),v_{i+1}^*(t),\cdots,v_n^*(t)\}$ 是由所有参与者(参与者 i 除外)的最优策略所组成的向量.若不等式

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{T} g^i\,[t,x^*(t),v_i^*(t),v_{-i}^*(t)]\,\mathrm{d}t+\varphi^i(x^*(T))\geqslant\\&\quad\int_{t_0}^{T} g^i\,[t,x^{[i]}(t),v_i(t),v_{-i}^*(t)]\,\mathrm{d}t+\varphi^i(x^{[i]}(T))\end{aligned}\tag{4}$$

对于所有的 $v_i(t)\in U^i\,(i\in\mathbf{N})$ 都成立,则策略集合 $\{v_1^*(t),v_2^*(t),\cdots,v_n^*(t)\}$ 是一个 n 人微分博弈的非合作纳什均衡解[8].当 $t\in[t_0,T]$ 时,有:

$$\dot{x}^*(t)=f\,[t,x^*(t),v_1^*(t),v_2^*(t),\cdots,v_n^*(t)]\,,\ x^*(t_0)=x_0;$$

$$\dot{x}^{[i]}(t)=f\,[t,x^{[i]}(t),v_i(t),v_{-i}^*(t)]\,,\ x^{[i]}(t_0)=x_0.$$

其中 $\dot{x}^*(t)$ 和 $\dot{x}^{[i]}(t)$ 分别为博弈的均衡状态和参与者 i 独自偏离均衡时的博弈状态($i=1,2,\cdots,n$).在纳什均衡的情况下,当所有参与者(参与者 i 除外)都采用各自的最优策略时,如果参与者 i 独自偏离其最优策略,则博弈的状态变成 $x^{[i]}(t)$;如果参与者 i 选择的策略集合为$\{v_1^*(t),v_2^*(t),\cdots,v_{i-1}^*(t),$

$v_i(t), v_{i+1}^*(t), \cdots, v_n^*(t)\}$，则其支付会低于纳什均衡时其所获得的支付. 因此，理性的参与者不会独自采取非最优策略.

1.2　资讯结构的类型

1.2.1　开环资讯结构(OLIS)　如果在博弈的开始时刻即可确定整个博弈过程的策略，则该资讯结构是开环的[9]. 开环资讯结构下每个参与者 i 的资讯结构为 $\eta^i(s)=\{x_0\}$，$s\in[t_0,T]$. 参与者的策略是由当前时间点 s 和开始状态所决定的，即 $\{u_i(s)=\psi_i(s,x_0), \forall i\in\mathbf{N}\}$. 由上述可知，开环资讯结构存在一旦选定策略就无法做出改变的局限.

1.2.2　闭环完美状态(CLPS)　如果每个参与者的策略是由开始到当前的状态和时间确定的，则可将该资讯结构视为闭环完美状态. 闭环完美状态下参与者在博弈的过程中所采用的策略为 $\eta^i(s)=\{x(t), t_0\leqslant t\leqslant s\}$，现实中大部分的资讯结构都属于这一类.

1.2.3　无记忆完美状态(MPS)　如果每位参与者的策略都是由开始状态、当前时间和当前状态所决定，则可将该资讯结构视为无记忆完美状态[10]. 无记忆完美状态下每个参与者 i 的资讯结构为 $\eta^i(s)=\{x_0, x(s)\}$，$s\in[t_0,T]$. 此时参与者的策略是当前时间点 s、开始状态 x_0 和当前状态 $x(s)$ 的函数，即 $\{u_i(s)=\psi_i(s,x(s)x_0), \forall i\in\mathbf{N}\}$. 在无记忆完美状态下，参与者的策略与过去的资讯(开始时刻除外)无关，只与开始时刻和当前的资讯有关.

2　证券市场的微分博弈

2.1　庄家与散户间博弈的模型假设

1) 将股票市场中的散户投资者作为一个整体与庄家进行博弈，即博弈参与双方为庄家和散户.

2) 庄家和散户均为理性人，每个博弈参与者都能对自己和其他人的行为有正确的预期. 庄家和散户在采取任何策略之前，都会考虑截至目前的历史股价走势，并预期自己的行为对随后决策所造成的影响.

3) 博弈的结构和完全理性对每个参与者而言都是常识，博弈中一方的增持必然意味着另一方的减持.

4) 庄家和散户间的博弈信息是不完全和非对称性的. 由于庄家能够密切了解上市公司的动态和宏观政策的变化，所以在预测股票价格的变动时，庄家通常比散户具有更及时、准确的信息.

2.2　证券市场微分博弈的动态系统

由于庄家和散户都希望最大化一段时间内的投资回报，因此庄家和散户的目标函数可分别表达为：

$$\int_0^T\left[q_1x(t)-\frac{c_1}{2}u_1(t)^2\right]\exp(-rt)\mathrm{d}t+\exp(-rT)S_1x(T), \tag{5}$$

$$\int_0^T\left[q_2(1-x(t))-\frac{c_2}{2}u_2(t)^2\right]\exp(-rt)\mathrm{d}t+\exp(-rT)S_2(1-x(T)). \tag{6}$$

其中：T 表示庄家在这只股票上的持股时间；状态 $x(t)$ 表示庄家在时间点 t 的持股率，即该股票在时间点 t 的庄家控盘系数；$1-x(t)$ 为散户投资者在时间点 t 的持股率；q_i 表示持股率对投资者 i 收益的短期边际影响，即股票瞬时收益率；c_i 是交易成本率；r 为贴现利率；S_i 是持股结束时持股率对股票收益的边际影响；$u_i(t)$ 为 t 期庄家或散户净买卖股票的数量；$u_i(t)>0$ 表示净买进的股票数量；$u_i(t)<0$ 表示净卖出的股票数量；r、q_i、c_i 和 S_i 对于 $i\in\{1,2\}$ 都是正常数.

在庄家的决策中，假设每个时间点的净买卖股票数量就是庄家的策略空间，由此庄家持股率的变化(博弈的动态系统)可表示为

$$\dot{x}(t)=u_1(t)[1-x(t)]^{\frac{1}{2}}-u_2(t)x(t)^{\frac{1}{2}},\ x(0)=x_0. \tag{7}$$

将式(5)—(7)联立即可构成庄家与散户间的确定性微分博弈模型. 庄家和散户根据当前时间和持股率决定最优策略. 在每个时间点 t，如果一方的净买卖股票数量已经确定，则另一方在确定最优策略时，不仅需要考虑持股率变化对自己在当前时刻的瞬时支付(收益)的影响，还要考虑持股率变化对将来收益

的各种影响.

3 确定性微分博弈的求解过程

应用开环纳什均衡和反馈纳什均衡的方法即可求解由公式(5)—(7)联立所构成的确定性微分博弈模型.

3.1 专家和散户的开环纳什均衡解

根据开环纳什均衡的解法,对上述确定性微分博弈模型进行求解可得如下定理 1:

定理 1 在确定性微分博弈中,庄家和散户的开环纳什均衡策略为:

$$u_1^*(t)=\frac{A_1(t)}{c_1}[1-x^*(t)]^{\frac{1}{2}},\ u_2^*(t)=-\frac{A_2(t)}{c_2}[x^*(t)]^{\frac{1}{2}},\tag{8}$$

其中 $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 的值不仅取决于市场利率、交易成本、持股率对投资收益的短期和长期边际影响,而且还受到 $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 的互动影响. $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 依赖如下的动态系统和边际条件:

$$\dot{A}_1(t)=rA_1(t)-q_1+\frac{A_1(t)^2}{2c_1}-\frac{A_1(t)A_2(t)}{2c_2},\ \dot{A}_2(t)=rA_2(t)+q_2+\frac{A_1(t)A_2(t)}{2c_1}-\frac{A_2(t)^2}{2c_2},$$

$$A_1(T)=S_1,\ A_2(T)=-S_2\tag{9}$$

证明 由于定理 1 的证明属于标准最优控制问题,因此可用 Pontryagin 的最大化原理[11] 来证明. 根据开环纳什均衡解法可得:

$$u_1^*(t)=$$

$$\arg\max_{u_1}\left\{\left[q_1x^*(t)-\frac{c_1}{2}u_1(t)^2\right]\exp(-rt)+\Lambda_1(t)\left[u_1(t)(1-x^*(t))^{\frac{1}{2}}-u_2^*(t)x^*(t)^{\frac{1}{2}}\right]\right\};$$

$$u_2^*(t)=$$

$$\arg\max_{u_2}\left\{\left[q_2(1-x^*(t))-\frac{c_2}{2}u_2(t)^2\right]\exp(-rt)+\Lambda_2(t)\left[u_1^*(t)(1-x^*(t))^{\frac{1}{2}}-u_2(t)x^*(t)^{\frac{1}{2}}\right]\right\};$$

$$\dot{x}^*(t)=u_1^*(t)(1-x^*(t))^{\frac{1}{2}}-u_2^*(t)x^*(t)^{\frac{1}{2}},\ x^*(0)=x_0;$$

$$\dot{\Lambda}_1(t)=-q_1\exp(-rt)+\Lambda_1(t)\left[\frac{1}{2}u_1^*(t)(1-x^*(t))^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}u_2^*(t)x^*(t)^{-\frac{1}{2}}\right];$$

$$\dot{\Lambda}_2(t)=q_2\exp(-rt)+\Lambda_2(t)\left[\frac{1}{2}u_1^*(t)(1-x^*(t))^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}u_2^*(t)x^*(t)^{-\frac{1}{2}}\right];$$

$$\Lambda_1(T)=\exp(-rT)S_1,\ \Lambda_2(T)=-\exp(-rT)S_2.\tag{10}$$

由式(10)可知,庄家和散户根据各自的持股率和交易成本,在保证理性的最优化收益的情况下,其在每个时间点净买卖的股票数量分别为:

$$u_1^*(t)=\frac{\Lambda_1(t)\exp(rt)}{c_1}(1-x^*(t))^{\frac{1}{2}},\ u_2^*(t)=-\frac{\Lambda_2(t)\exp(rt)}{c_2}[x^*(t)]^{\frac{1}{2}}.\tag{11}$$

式中:共态函数 $\Lambda_1(t)$ 和 $\Lambda_2(t)$ 的值取决于庄家和散户各自的持股率对股票收益的短期和长期的边际影响,以及各自的交易成本、市场利率和双方共态函数间的互动;最优状态 $x^*(t)$ 取决于市场利率和双方的共态函数、交易成本、持股率. 将式(11)代入式(10)可得如下博弈动态系统(式(12))和 $\Lambda_1(t)$、$\Lambda_2(t)$ 所依赖的非线性常微分方程组(式(13)):

$$\dot{x}^*(t)=\frac{\Lambda_1(t)\exp(rt)}{c_1}[1-x^*(t)]+\frac{\Lambda_2(t)\exp(rt)}{c_2}x^*(t),\ x^*(0)=x_0;\tag{12}$$

$$\dot{\Lambda}_1(t)=-q_1\exp(-rt)+\left[\frac{\Lambda_1(t)^2}{2c_1}-\frac{\Lambda_1(t)\Lambda_2(t)}{2c_2}\right]\exp(rt);$$

$$\dot{\Lambda}_2(t)=q_2\exp(-rt)+\left[\frac{\Lambda_1(t)\Lambda_2(t)}{2c_1}-\frac{\Lambda_2(t)^2}{2c_2}\right]\exp(rt);$$

$$\Lambda_1(T)=S_1\exp(-rT),\ \Lambda_2(T)=-S_2\exp(-rT). \tag{13}$$

求解式(12) 和式(13) 所组成的微分方程组可得

$$\Lambda_1(t)=A_1(t)\exp(-rt),\ \Lambda_2(t)=A_2(t)\exp(-rt). \tag{14}$$

将式(14) 代入式(11) 即可证得定理 1.

由上述开环纳什均衡策略可以得到以下结论:

1) 在最初开始时刻,最优状态与博弈的开始状态相同,而最优状态在当前的变化取决于当前的状态、时间以及专家和散户的最优策略;

2) 如果专家和散户中的一方采用自己的最优策略,则另一方在选择最优策略时,除了要考虑自己在当前状态的瞬时支付,还要考虑自己在未来状态的所有支付;

3) 假设专家和散户都采用自己的最优策略,且他们的最优策略都只依赖于开始状态和当前时间,则专家和散户的共态函数就可以反映出最优状态给他们的未来支付所带来的影响.

3.2　专家和散户的反馈纳什均衡解

为了避免在推导纳什均衡时能够碰到资讯非唯一性的问题,本文假设专家和散户的资讯结构都为无记忆完美状态(MPS) 或闭环完美状态(CLPS). 根据反馈纳什均衡解法,对上述确定性微分博弈模型进行求解可得如下定理 2:

定理 2　在连续时间下,庄家和散户在确定性微分博弈中的反馈纳什均衡策略为:

$$\phi_1^*(t,x)=\frac{A_1(t)}{c_1}(1-x)^{\frac{1}{2}},\ \phi_2^*(t,x)=-\frac{A_2(t)}{c_2}(x)^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

证明　根据 Bellman 的动态规划,微分博弈的反馈纳什均衡解应满足以下 Issacs-Bellman 偏微分方程组:

$$-V_{1t}(t,x)=\max_{u_1}\left\{\left[q_1x-\frac{c_1}{2}u_1^2\right]\exp(-rt)+V_{1x}(t,x)\left[u_1(1-x)^{\frac{1}{2}}-\phi_2^*(t,x)x^{\frac{1}{2}}\right]\right\},$$

$$-V_{2t}(t,x)=\max_{u_2}\left\{\left[q_2(1-x)-\frac{c_2}{2}u_2^2\right]\exp(-rt)+V_{2x}(t,x)\left[\phi_1^*(t,x)(1-x)^{\frac{1}{2}}-u_2x^{\frac{1}{2}}\right]\right\},$$

$$V_1(T,x)=\exp(-rT)S_1x,\ V_2(T,x)=\exp(-rT)S_2(1-x). \tag{16}$$

其中 $V_i(t,x)$ 是参与者 i 的价值函数,$V_{it}(t,x)$、$V_{ix}(t,x)$ 分别是 $V_i(t,x)$ 对 t 和 x 的一阶偏导.

下面利用反馈纳什均衡解法求最优策略 $\phi_i^*(t,x)$ 及最优策略下的价值函数 $V_i(t,x)(i=1,2)$,其方法为:首先求解出 Issacs-Bellman 偏微分方程(16) 的最优策略;然后将 $\phi_i^*(t,x)$ 代入 Issacs-Bellman 偏微分方程,并去掉上确界符号后解关于 $V_i(t,x)$ 的偏微分方程;最后求解价值函数,并将所求解的价值函数代入到 $\phi_i^*(t,x)$ 中,由此即可得到纳什均衡策略. 具体过程如下:

1) 求解公式(4)—(9) 中的最大值,由此得到如下最优策略:

$$\phi_1^*(t,x)=\frac{V_{1x}(t,x)}{c_1}(1-x)^{\frac{1}{2}}\exp(rt),\ \phi_2^*(t,x)=-\frac{V_{2x}(t,x)}{c_2}x^{\frac{1}{2}}\exp(rt). \tag{17}$$

2) 将在式(17) 中求得的 $\phi_1^*(t,x)$ 和 $\phi_2^*(t,x)$ 代入式(16),得:

$$-V_{1t}(t,x)=q_1x\exp(-rt)-\frac{V_{1x}^2(t,x)\exp(rt)}{2c_1}(1-x)+V_{1x}(t,x)\exp(rt)\cdot$$
$$\left[\frac{V_{1x}(t,x)(1-x)}{c_1}+\frac{V_{2x}(t,x)x}{c_2}\right],$$

$$-V_{2t}(t,x)=q_2(1-x)\exp(-rt)-\frac{V_{2x}^2(t,x)\exp(rt)}{2c_2}x+V_{2x}(t,x)\exp(rt)\cdot$$
$$\left[\frac{V_{1x}(t,x)(1-x)}{c_1}+\frac{V_{2x}(t,x)x}{c_2}\right],$$

$$V_1(T,x)=\exp(-rT)S_1x,\ V_2(T,x)=\exp(-rT)S_2(1-x). \tag{18}$$

3)求解方程组(18),得如下庄家和散户的价值函数:

$$V_1(t,x)=\exp(-rt)\left[A_1(t)x+B_1(t)\right],\ V_2(t,x)=\exp(-rt)\left[A_2(t)(1-x)+B_2(t)\right]. \tag{19}$$

其中:$A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 的值不仅取决于市场利率、交易成本、持股率对投资收益的短期和长期的边际影响,而且还受 $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 互动的影响;而 $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 的值不仅取决于市场利率和交易成本,还取决于 $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 的值. $A_1(t)$、$A_2(t)$、$B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 依赖如下动态系统:

$$\dot{A}_1(t)=rA_1(t)-q_1+\frac{A_1(t)^2}{2c_1}+\frac{A_1(t)A_2(t)}{c_2},\ \dot{A}_2(t)=rA_2(t)-q_2+\frac{A_1(t)A_2(t)}{c_1}+\frac{A_2(t)^2}{2c_2},$$

$$\dot{B}_1(t)=rB_1(t)-\frac{A_1(t)^2}{2c_1},\ \dot{B}_2(t)=r\left[A_2(t)+B_2(t)\right]-\dot{A}_2(t)-q_2+\frac{A_1(t)A_2(t)}{c_1}. \tag{20}$$

$A_1(t)$、$A_2(t)$、$B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 的边际条件为:

$$A_1(T)=S_1,\ B_1(T)=0,\ A_2(T)=S_2,\ B_2(T)=0. \tag{21}$$

4)用式(19)中的价值函数 $V_1(t,x)$ 和 $V_2(t,x)$ 分别对 x 求偏导,将所得结果代入式(17)即可求得庄家和散户的反馈纳什均衡策略.

由上述反馈纳什均衡策略可知,庄家和散户根据当前状态和时间选定最优策略时,专家和散户的价值函数将随着时间的改变而改变,其中价值函数在每一瞬间的改变量相当于状态的最优变化为价值函数所带来的转变与它的瞬时支付之和. 另外,庄家和散户在最后时间点 T 时的支付(收益)等于其在博弈的终点支付.

4 结论

本文利用动态博弈的方法和多种资讯结构类型,针对证券市场建立了一种庄家与散户在证券市场中的确定性微分博弈模型,并分别运用开环纳什均衡和反馈纳什均衡的方法求解出了博弈双方较为完美的反馈纳什均衡策略和开环纳什均衡策略. 本文研究结果可以为金融监管部门监管证券市场和证券市场投资者买卖股票提供参考. 本文在研究过程中未能考虑到随机因素对博弈模型的影响,因此在今后的研究中我们将用随机微分方程理论描述国内外机构投资者和散户群体所参与的博弈,以此进一步提高本文模型的适用性.

参考文献:

[1] DOMINIKA M, ANDRZEJ N. Competition in defensive and offensive advertising strategies in a segmented market [J]. Eur J Control, 2020,53:98-108.

[2] ZHOU J G, TUR A, PETROSIAN O, et al. Transferable utility cooperative differential games with continuous updating using pontryagin maximum principle[J]. Mathematics, 2021,9(2):163.

[3] PUDURU V R, GEORGES Z. Open-loop and feedback Nash equilibria in constrained linear-quadratic dynamic games played over event trees[J]. Automatica, 2019,107:162-174.

[4] 程粟粟,易永锡,李寿德. 碳捕获与碳封存机制下跨界污染控制微分博弈[J]. 系统管理学报,2019,28(5):864-872.

[5] ABRAHAM M P, KULKARNI A A. New results on the existence of open loop Nash equilibria in discrete time dynamic games via generalized Nash games[J]. Math Meth Operat Res, 2019,89(2):157-172.

[6] 杨荣基,彼得罗项,李颂志. 动态合作:尖端博弈论[M]. 北京:中国市场出版社,2007.

[7] 史蒂文·E 施里夫. 金融随机分析:连续时间模型:第2卷[M]. 陈启宏,陈迪华,译. 上海:上海财经大学出版社,2016.

[8] BASAK G K, GHOSH M K, MUKHERJEE D. Equilibrium and stability of a stock market game with big traders [J]. Diff Equat Dynam Syst, 2010,17(3):283-299.

[9] 班允浩. 合作微分博弈问题研究[D]. 大连:东北财经大学,2009.

[10] YEUNG D W K, PETROSYAN L A. Cooperative Stochastic Differential Games[M]. New York: Springer, 2006.

[11] JORGENSEN S, YEUNG D W K. A strategic concession game[J]. Int Game Theory Rev, 1999,1(1):103-129.