文章编号: 1004-4353(2021)03-0212-04

一类随机变量序列加权和的强大数定律

高　萍
(厦门工学院 数据科学与智能工程学院, 福建 厦门 361021)

摘要: 研究一类被随机控制的随机变量序列加权和的 Marcinkiewicz-Zygmund 型强大数定律. 在满足 Rosenthal 型不等式的情况下得到了比经典 Marchinkiewicz-Zygmund 型强大数定律稍强的大数定律,并将所得结论推广到了更为广泛的一类随机变量序列上.

关键词: 随机控制; 强大数定律; Rosenthal 型不等式; 加权和
中图分类号: O211　　　　**文献标识码**: A

The strong law of large numbers for weighted sums of some random variables

GAO Ping
(*Data Science and Intelligent Engineering School*, *Xiamen Institute of Technology*, *Xiamen* 361021, *China*)

Abstract: A class of stochastically dominated Marcinkiewicz-Zygmund type strong law of large numbers for weighted sums of random variable is studied. Under the condition of satisfying Rosenthal type inequality, a law of large numbers which is slightly stronger than the classical Marchinkiewicz-Zygmund type strong law of large numbers is obtained, and the obtained results is extended to a wider class of random variable sequences.

Keywords: stochastically dominated; strong law of large numbers; Rosental type inequality; weighted sums

0　引言

经典的 Marcinkiewicz-Zygmund 型强大数定律考虑的是零均值的独立同分布随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$: 若对任意的 $1\leqslant p<2$, $E|X_1|^p<\infty$, 则有 $n^{-\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^{n}X_k\rightarrow 0$ a. s.. 2000 年, Bai 等[1]研究了独立同分布的随机变量加权和的 Marchinkiewicz-Zygmund 型强大数定律,随后其研究结果被推广到许多不同的序列上,如 Wu[2]将其研究结果推广到了被随机控制的 NOD 序列上, Huang 等[3]将其研究结果推广到了 φ 混合序列上, Wu 等[4]和 Yi 等[5]则将其研究结果推广到了能满足某种 Rosenthal 型不等式的随机变量序列上. 本文研究了一类被随机控制的随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$, 并得到如下结果: 若对于任意的 $n\geqslant 1$ 和 $s\geqslant 2$, 该随机变量序列满足以下 Rosenthal 型不等式:

$$E\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(f_{nk}(X_k)-Ef_{nk}(X_k))\right|^s\leqslant C_s\sum_{k=1}^{n}E|f_{nk}(X_k)|^s+g(n,s)\Big(\sum_{k=1}^{n}(f_{nk}(X_k))^2\Big)^{\frac{s}{2}}, \tag{1}$$

收稿日期: 2021-04-21
基金项目: 福建省中青年教师教育科研项目(JT180771)
作者简介: 高萍(1983—),女,硕士,讲师,研究方向为概率极限理论.

则有 $n^{-\frac{1}{p}}\max\limits_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum\limits_{k=1}^{m}a_{nk}X_k\right|\rightarrow 0$ a. s.. 公式(1)中$\{f_{nk}(x),1\leqslant k\leqslant n,n\geqslant 1\}$是非减的函数阵列，$g(x,y)>0$，且对任意的$y>0$存在$\tau>0$使得$g(x,y)=O(x^{\tau})$. 本文结果与文献[3]中给出的主要定理类似，但减弱了文献[3]中的矩条件. 另外，本文还将所得结论推广到了更为广泛的一类随机变量序列上.

1　定义与引理

定义 1[2]　称随机变量序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$是由随机变量X随机控制的，若存在常数$D>0$，使得对任意$n\geqslant 1,x\geqslant 0$，有$P(|X_n|>x)\leqslant DP(|X|>x)$.

定义 2　若对任意的$n\geqslant 1$，存在常数k，使得$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{nk}|^{\alpha}\leqslant nk$，则记$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{nk}|^{\alpha}=O(n)$.

引理 1[6]　若随机变量序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$是由随机变量X随机控制的，则对任意的$\alpha>0,t>0$和$n\geqslant 1$有：

$$E|X_n|^{\alpha}I(|X_n|\leqslant t)\leqslant CE|X|^{\alpha}I(|X|\leqslant t)+t^{\alpha}P(|X|>t),$$

$$E|X_n|^{\alpha}I(|X_n|>t)\leqslant CE|X|^{\alpha}I(|X|>t),$$

其中$C>0$为某常数.

引理 2　若$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{nk}|^{\alpha}=O(n)$，则$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_{nk}|\leqslant kn^{\frac{1}{\alpha}}$.

证明　由引理 2 的条件可知$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_{nk}|^{\alpha}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{nk}|^{\alpha}\leqslant Cn$，因此$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_{nk}|\leqslant C^{\frac{1}{\alpha}}n^{\frac{1}{\alpha}}=kn^{\frac{1}{\alpha}}$.

引理 3　设$s>\alpha$，若$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{nk}|^{\alpha}=O(n)$，则$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{nk}|^{s}=O(n^{\frac{s}{\alpha}})$.

证明　由于$\dfrac{s}{\alpha}>1$，因此$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{nk}|^{s}=\sum\limits_{k=1}^{n}(|a_{nk}|^{\alpha})^{\frac{s}{\alpha}}\leqslant\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{nk}|^{\alpha}\right)^{\frac{s}{\alpha}}\leqslant k^{\frac{s}{\alpha}}n^{\frac{s}{\alpha}}$.

2　主要结论及其证明

定理 1　设$1\leqslant p<2$，$\alpha,\beta>0$，$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$. $\{X_n,n\geqslant 1\}$是零均值的随机变量序列，且被随机变量X随机控制，$E|X|^{\beta}<\infty$. 若$\{X_n\}$满足条件(1)，则有：

$$n^{-\frac{1}{p}}\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{nk}X_k\right|\rightarrow 0\ \text{a. s.},\tag{2}$$

其中$\{a_{nk},1\leqslant k\leqslant n,n\geqslant 1\}$为函数阵列，$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{nk}|^{\alpha}=O(n)$.

证明　设：

$$Y_{nk}=X_kI(|X_k|\leqslant n^{\frac{1}{\beta}})+n^{\frac{1}{\beta}}I(X_k>n^{\frac{1}{\beta}})-n^{\frac{1}{\beta}}I(X_k<-n^{\frac{1}{\beta}}),$$

$$Z_{nk}=(X_k-n^{\frac{1}{\beta}})I(X_k>n^{\frac{1}{\beta}})+(X_k+n^{\frac{1}{\beta}})I(X_k<-n^{\frac{1}{\beta}}),$$

$$n^{-\frac{1}{p}}\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{nk}X_k\right|\leqslant n^{-\frac{1}{p}}\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{nk}Z_{nk}\right|+n^{-\frac{1}{p}}\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{nk}EY_{nk}\right|+$$

$$n^{-\frac{1}{p}}\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{nk}(Y_{nk}-EY_{nk})\right|\triangleq I_1+I_2+I_3.$$

由引理 1 及$E|X|^{\beta}<\infty$可得$\sum\limits_{k=1}^{n}P(|X_k|>k^{\frac{1}{\beta}})\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}P(|X|>k^{\frac{1}{\beta}})\leqslant CE|X|^{\beta}<\infty$.

再由$|Z_{nk}|\leqslant|X_k|I(|X_k|>n^{\frac{1}{\beta}})$、引理 2 以及 Borel-Cantelli 引理可知：

$$|I_1|=n^{-\frac{1}{p}}\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{nk}Z_{nk}\right|\leqslant n^{-\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}||X_k|I(|X_k|>n^{\frac{1}{\beta}})\leqslant$$

$$n^{-\frac{1}{p}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_{nk}|\sum_{k=1}^{n}|X_k|I(|X_k|>n^{\frac{1}{\beta}})\leqslant Cn^{-\frac{1}{p}}n^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}|X_k|I(|X_k|>n^{\frac{1}{\beta}})\leqslant$$

$$Cn^{\frac{1}{\beta}}\sum_{k=1}^{n}|X_k|I(|X_k|>k^{\frac{1}{\beta}})\to 0\ \text{a.s.}(n\to\infty).$$

于是由 $EX_n=0$，$|Z_{nk}|\leqslant|X_k|I(|X_k|>n^{\frac{1}{\beta}})$，$\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|^{\alpha}=O(n)$，$E|X|^{\beta}<\infty$ 可知：

$$|I_2|=n^{-\frac{1}{p}}\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{nk}EY_{nk}\right|\leqslant n^{-\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^{m}|a_{nk}|E|Z_{nk}|\leqslant$$

$$Cn^{-\frac{1}{p}}E|X|I(|X|>n^{\frac{1}{\beta}})\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|\leqslant Cn^{1-\frac{1}{p}}E|X|I(|X|>n^{\frac{1}{\beta}})\leqslant$$

$$Cn^{-\frac{1}{\alpha}}E|X|^{\beta}I(|X|>n^{\frac{1}{\beta}})\to 0\ (n\to\infty).$$

下面考虑 I_3. 由Borel-Cantelli引理知，要证明 $|I_3|\to 0$ a.s. 只需证明对任意的 $\varepsilon>0$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty}P(|I_3|>\varepsilon)<\infty$ 即可. 令 $f_{nk}(x)=xI(|x|\leqslant n^{\frac{1}{\beta}})+n^{\frac{1}{\beta}}I(x>n^{\frac{1}{\beta}})-n^{\frac{1}{\beta}}I(x<-n^{\frac{1}{\beta}})$，由此可得 $f_{nk}(x)$ 是单调不减的，且有 $f_{nk}(x)=a_{nk}Y_{nk}$. 再由条件(1)可知：

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|I_3|>\varepsilon)\leqslant C_s\sum_{n=1}^{\infty}E|I_3|^s=C_s\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{p}}E\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(f_{nk}(X_k)-Ef_{nk}(X_k))\right|^s\leqslant$$

$$C_s\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{p}}\Big[\sum_{k=1}^{n}E|f_{nk}(X_k)|^s+g(n,s)\Big(\sum_{k=1}^{n}(f_{nk}(X_k))^2\Big)^{\frac{s}{2}}\Big]=$$

$$C_s\Big[\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{p}}\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|^sE|Y_{nk}|^s+\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{p}}g(n,s)\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{nk}^2Y_{nk}^2\Big)^{\frac{s}{2}}\Big]\triangleq C_s(I_4+I_5).$$

下面证明 $I_4<\infty$ 和 $I_5<\infty$. 因为

$$E|Y_{nk}|^s=E[|X_k|^sI(|X_k|\leqslant n^{\frac{1}{\beta}})+n^{\frac{s}{\beta}}I(|X_k|>n^{\frac{1}{\beta}})]\leqslant$$

$$DE[|X|^sI(|X|\leqslant n^{\frac{1}{\beta}})+2Dn^{\frac{s}{\beta}}P(|X|>n^{\frac{1}{\beta}})],$$

所以当取 $s>\max\{\alpha,\beta\}$ 时由引理3可得

$$I_4=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{p}}\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|^sE|Y_{nk}|^s\leqslant CD\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{\beta}}\sum_{k=1}^{n}E|X|^sI(|X|\leqslant n^{\frac{1}{\beta}})+$$

$$2CD\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>n^{\frac{1}{\beta}})\leqslant CDE|X|^{\beta}<\infty.$$

又因为 $EY_{nk}^2=E[X_k^2I(|X_k|\leqslant n^{\frac{1}{\beta}})+n^{\frac{2}{\beta}}I(|X_k|>n^{\frac{1}{\beta}})]\leqslant 2DEX^2I(|X|\leqslant n^{\frac{1}{\beta}})+2Dn^{\frac{2}{\beta}}P(|X|>n^{\frac{1}{\beta}})$，且当 $\beta\geqslant 2$ 时 $EY_{nk}^2\leqslant DEX^2<\infty$，由此根据引理3可得

$$I_5=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{p}}g(n,s)\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{nk}^2Y_{nk}^2\Big)^{\frac{s}{2}}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{p}}n^{\tau}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{nk}^2\Big)^{\frac{s}{2}}\leqslant$$

$$\begin{cases}C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{p}}\cdot n^{\tau}\cdot n^{\frac{s}{2}},\ \alpha>2;\\ C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{p}}\cdot n^{\tau}\cdot(n^{\frac{2}{\alpha}})^{\frac{s}{2}},\ \alpha\leqslant 2\end{cases}\leqslant\begin{cases}C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{s}{2}-\frac{s}{p}+\tau},\ \alpha>2;\\ C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\tau-\frac{s}{\beta}},\ \alpha\leqslant 2\end{cases}<\infty,$$

上式中取 $s\geqslant\max\{\frac{2p}{2-p}(\tau+1),\beta(\tau+1)\}$. 因当 $\beta<2$ 时 $\alpha>2$，故有：

$$EY_{nk}^2\leqslant 2DEX^2I(|X|\leqslant n^{\frac{1}{\beta}})+2Dn^{\frac{2}{\beta}}P(|X|>n^{\frac{1}{\beta}})\leqslant$$

$$Dn^{\frac{2-\beta}{\beta}}E|X|^{\beta}I(|X|\leqslant n^{\frac{1}{\beta}})+2Dn^{\frac{2}{\beta}-1}E|X|^{\beta}I(|X|>n^{\frac{1}{\beta}})\leqslant 3Dn^{\frac{2-\beta}{\beta}}E|X|^{\beta},$$

$$I_5=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{p}}g(n,s)\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{nk}^2Y_{nk}^2\Big)^{\frac{s}{2}}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{p}+\tau+\frac{s(2-\beta)}{2\beta}}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{nk}^2\Big)^{\frac{s}{2}}\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{p}+\tau+\frac{s(2-\beta)}{2\beta}}\cdot n^{\frac{s}{2}}=C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{s}{\alpha}+\tau}<\infty,$$

上式中取 $s\geqslant\alpha(\tau+1)$. 综上可知，当取 $s\geqslant\max\{\frac{2p}{2-p}(\tau+1),\beta(\tau+1),\alpha(\tau+1)\}$ 时即可使得 $I_5<\infty$，从而得 $|I_3|\to 0$，式(2)得证.

推论 1　设 $\beta>1$，$1\leqslant p<\min\{2,\beta\}$，$\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是零均值的随机变量序列且被随机变量 X 随机控制，$E|X|^{\beta}<\infty$. 若 $\{X_n\}$ 满足条件(1)，则有：

$$n^{-\frac{1}{p}}\max_{1\leqslant m\leqslant n}\Big|\sum_{k=1}^{m}X_k\Big|\to 0\ \text{a.s.}.\tag{3}$$

证明　取 $a_{nk}=1$ 时显然知对任意的 $\alpha>0$，$\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|^{\alpha}=O(n)$ 始终成立. 故由定理 1 知对任意的 $1\leqslant p<\min\{\beta,2\}$，当取 $\alpha=\frac{p\beta}{\beta-p}>0$ 时式(3)成立. 证毕.

参考文献：

[1] BAI Z D, CHENG P E. Marcinkiewicz strong laws for linear statistics[J]. Stat Probab Lett, 2000, 46: 105-112.
[2] WU Q. A strong limit theorem for weighted sums of sequences of negatively dependent random variables[J]. J Inequal Appl, 2010, 1: 1-8.
[3] HUANG H, WANG D, PENG J. On the strong law of large numbers for weighted sums of φ-mixing random variables[J]. J Math Inequal, 2014, 8(3): 465-473.
[4] WU Y, WANG X, HU S, et al. Weighted version of strong law of large numbers for a class of random variables and its applications[J]. Test, 2018, 27: 379-406.
[5] YI Y, CHEN P, SUNG S H. Strong laws for weighted sums of random variables satisfying generalized Rosenthal type inequalities[J]. J Inequal Appl, 2020, 43: 1-8.
[6] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京：科学出版社，2006.
[7] CUZICK J. A strong law for weighted sums of i. i. d. random variables[J]. J Theor Probab, 1995, 8: 625-641.
[8] CHANDRA T K, GHOSAL S. Extensions of the strong law of large numbers of Marcinkiewicz and Zygmund for dependent variables[J]. Acta Math Hung, 1996, 71(4): 327-336.