文章编号：1004-4353(2021)03-0200-06

一类 Choquard 方程的无穷多解

伍慧玲

(闽江学院 数学与数据科学学院，福州 350108)

摘要：利用喷泉定理和 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式证明了一类具有一般的次临界非线性项以及变号位势函数的 Choquard 方程无穷多解的存在性. 该结果将文献[16]中的关于 Schrödinger 方程的结论拓展到了 Choquard 方程中.

关键词：Choquard 方程；无穷多解；喷泉定理；Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式；变号位势

中图分类号：O175.25 **文献标识码**：A

Infinitely many solutions for a Choquard equation

WU Huiling

(*College of Mathematics and Data Science*, *Minjiang University*, *Fuzhou* 350108, *China*)

Abstract: The existence of infinitely many solutions of a Choquard type equation with general subcritical nonlinearities and sign-changing potential is proved by a Fountain theorem and the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality. This result extends the result for a Schrödinger equation in literature [16] to a Choquard type equation.

Keywords: Choquard equation; infinitely many solutions; Fountain theorem; Hardy-Littlewood-Sobolev inequality; sign-changing potentional

0 引言

本文考虑如下 Choquard 类型方程：

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = (I_\alpha * F(x,u))f(x,u) + |u|^{q-2}u, \ x \in \mathbf{R}^N; \\ u \in H^1(\mathbf{R}^N). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $N \geqslant 3$，$\alpha \in (0,N)$，$2 < q < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$，$I_\alpha = \Gamma(\dfrac{N-\alpha}{2}) / \left(2^\alpha \pi^{\frac{N}{2}} \Gamma(\dfrac{\alpha}{2}) |x|^{N-\alpha} \right)$，$\Gamma$ 为 Gamma 函数，$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\mathrm{d}t$.

Choquard 类型方程有着重要的物理背景，如 Pekar 用方程

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (I_\alpha * |u|^2)u, \ x \in \mathbf{R}^N; \\ u \in H^1(\mathbf{R}^N) \end{cases} \tag{2}$$

描述了极化子的量子理论[1]，Choquard 用方程(2)描述了电子阱模型[2]，等等[3-4]. 但由于 Choquard 类方程中存在卷积项，因此在研究该方程时存在很多困难. 为此，学者们进行了较多探索. 例如：1977 年，

收稿日期：2021-05-06

基金项目：福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JAT190614)

作者简介：伍慧玲(1986—)，女，硕士，讲师，研究方向为非线性分析.

Lieb 利用变分方法讨论了方程(2)解的存在性[2]；1980 年，Lions 证明了方程(2)存在无穷多解[5]；2013 年，Moroz 等证明了当把方程(2)中的非线性项的幂指数换成 $p(\frac{N+\alpha}{N}<p<\frac{N+\alpha}{N-2})$ 时，方程的基态解具有存在性、对称性、正则性与衰减性[6].

对于更一般的 Choquard 方程(1)，当其不含有局部项 $|u|^{q-2}u$ 时，Moroz 等研究发现当 $f(x,u)$ 不依赖于 x 且满足 Berestychi-Lions 条件时方程(1)存在基态解[7]. Li 等[8]和 Alves 等[9]研究发现当位势函数为渐近周期函数和位势函数在无穷远处趋于 0 时，方程(1)存在正解. Zhang 等研究发现当方程(1)的系数为周期函数时存在无穷多解，而当系数为渐近周期函数时方程(1)存在基态解[10]. 2020 年，Chen 等[11]探讨了方程(1)含次临界局部项时其基态解的存在性. 本文在上述研究的基础上探讨方程(1)无穷多解的存在性. 本文假设 V 和 f 满足以下条件：

(V1) $V\in C(\mathbf{R}^N,\mathbf{R})$ 且 $\inf_{\mathbf{R}^N}V(x)>-\infty$.

(V2) 对任意的 $a>0$，$\operatorname{meas}(\{x\in\mathbf{R}^N:V(x)\leqslant a\})<\infty$，其中 $\operatorname{meas}(\cdot)$ 表示 $\mathbf{R}^N$ 上的 Lebesgue 测度.

(F1) $f\in C(\mathbf{R}^{N+1},\mathbf{R})$，且对任意的 $(x,s)\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}$，$f(x,-s)=-f(x,s)$.

(F2) 存在 $C_1,C_2>0$ 及 $p\in\left(\frac{N+\alpha}{N},\frac{N+\alpha}{N-2}\right)$ 使得 $|f(x,s)|\leqslant C_1|s|^{\frac{\alpha}{N}}+C_2|s|^{p-1}$，$\forall(x,s)\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}$.

(F3) $f(x,s)$ 在 $\mathbf{R}$ 上关于 s 单调不减.

根据上述假设可得到如下定理：

定理 1　假设(V1)—(V2)和(F1)—(F3)成立，则方程(1)存在无穷多解.

注 1　以下的证明中，本文假设 V 有正的下界. 事实上，由于 $\inf_{\mathbf{R}^N}V(x)>-\infty$，因此存在 $L>0$，使得 $\inf_{\mathbf{R}^N}V(x)>-L$. 令 $\tilde{V}(x)=V(x)+L$，则方程(1) 等价于

$$\begin{cases}-\Delta u+\tilde{V}(x)u=(I_\alpha*F(x,u))f(x,u)+|u|^{q-2}u+Lu,\ x\in\mathbf{R}^N;\\ u\in H^1(\mathbf{R}^N).\end{cases}\tag{3}$$

1　记号及引理

记 $H=\left\{u\in H^1(\mathbf{R}^N):\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x<+\infty\right\}$，并定义范数 $\|u\|=(\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$. 其中，$H$ 是一个 Hilbert 空间，范数 $\|\cdot\|$ 是 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 中的一个等价范数. 为证明系统(1)在 H 中存在无穷多解，首先定义泛函 $E_\eta(u):H\mapsto\mathbf{R}$ 为：

$$E_\eta(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x-\frac{\eta}{2}\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u))F(x,u)\mathrm{d}x-\frac{\eta}{q}\int_{\mathbf{R}^N}|u|^q\mathrm{d}x=P(u)-\eta Q(u).\tag{4}$$

其中 $P(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x$，$Q(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u))F(x,u)\mathrm{d}x+\frac{1}{q}\int_{\mathbf{R}^N}|u|^q\mathrm{d}x$. 由式(4) 可知，$E_\eta(u)\in C^1(H,\mathbf{R})$，且

$$E_\eta'(u)v=\int_{\mathbf{R}^N}(\nabla u\nabla v+V(x)uv)\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u))f(x,u)v\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^N}|u|^{q-1}v\mathrm{d}x.$$

因此，当 $\eta=1$ 时泛函 $E_\eta(u)$ 的临界点等价于系统(1) 的解.

为了简便，本文用 $|u|_p$ 表示 u 在 $L^p(\mathbf{R}^N)$ 中的范数，即 $|u|_p=\left(\int_{\mathbf{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$，用 $C_i(i=1,2,3,4)$

表示正常数,用 $o_n(1)$ 表示 $n\to\infty$ 时的无穷小.

引理 1[12](Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式) 令 $\mu,\nu>1$, $\alpha\in(0,N)$ 满足 $\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\nu}=1+\dfrac{\alpha}{N}$, $g\in L^{\mu}(\mathbf{R}^N)$, $f\in L^{\nu}(\mathbf{R}^N)$,则 $\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha * f)g\,\mathrm{d}x\leqslant|f|_\mu|g|_\nu$.

引理 2[13] 假设(V2)成立,则当 $2\leqslant p<2^*$ 时, $H\subset L^p(\mathbf{R}^N)$ 是紧嵌入.

引理 3 若(F1)和(F3)成立,则对任意的 $u\in H\setminus\{0\}$, $t\geqslant 0$,有

$$E_\eta(u)\geqslant E_\eta(tu)+\frac{1-t^2}{2}E_\eta'(u)u. \tag{5}$$

证明 以下采用文献[9]中引理 2.2 的方法证明引理 3.首先证明 $\forall x\in\mathbf{R}^N$, $s_1,s_2\in\mathbf{R}$, $t\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\psi(x,s_1,s_2,t)=&F(x,ts_1)F(x,ts_2)-F(x,s_1)F(x,s_2)+\\&\frac{1-t^2}{2}(F(x,s_1)f(x,s_2)s_2+F(x,s_2)f(x,s_1)s_1)\geqslant 0.\end{aligned} \tag{6}$$

由(F1)和(F3)可得 $f(x,0)=0$, $f(x,s)s-F(x,s)\geqslant 0$.因此,当 $t=0$ 时式(6)成立,且 $\dfrac{F(x,s)}{s}$ 在 $s\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上关于 s 单调不减.于是有 $\forall x\in\mathbf{R}^N$, $s_1,s_2\in\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t}=&ts_1s_2\left(f(x,ts_1)\frac{F(x,ts_2)}{ts_2}+f(x,ts_2)\frac{F(x,ts_1)}{ts_1}-f(x,s_1)\frac{F(x,s_2)}{s_2}-f(x,s_2)\frac{F(x,s_1)}{s_1}\right)\\&\begin{cases}\leqslant 0,\ t\in(0,1);\\ \geqslant 0,\ t\in[1,+\infty),\end{cases}\end{aligned}$$

即: $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\leqslant 0$, $t\in(0,1)$; $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\geqslant 0$, $t\in[1,+\infty)$.于是有 $\psi(x,s_1,s_2,t)\geqslant\psi(x,s_1,s_2,1)=0$, $\forall x\in\mathbf{R}^N$, $s_1,s_2\in\mathbf{R}$, $t\geqslant 0$,由此表明式(6)成立.

由式(4)可得

$$\begin{aligned}E_\eta(u)-E_\eta(tu)=&\frac{1-t^2}{2}\|u\|^2+\frac{\eta(t^q-1)}{q}\int_{\mathbf{R}^N}|u|^q\mathrm{d}x+\\&\frac{1}{2}\eta\int_{\mathbf{R}^N}((I_\alpha*F(x,tu))F(x,tu)-(I_\alpha*F(x,u))F(x,u))\,\mathrm{d}x=\\&\frac{1-t^2}{2}E_\eta'(u)u+\frac{\eta(2t^q-2+q-qt^2)}{2q}\int_{\mathbf{R}^N}|u|^q\mathrm{d}x+\\&\frac{1}{2}\eta\int_{\mathbf{R}^N}((I_\alpha*F(x,tu))F(x,tu)-(I_\alpha*F(x,u))F(x,u))\,\mathrm{d}x+\\&\frac{\eta(1-t^2)}{2}\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u))f(x,u)u\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{7}$$

令 $g(t)=2t^q-2+q-qt^2$,于是有 $g'(t)=2qt(t^{q-2}-1)$.显然 $g'(t)\leqslant 0$, $\forall t\in[0,1]$; $g'(t)>0$, $\forall t\in(1,+\infty)$.于是可得

$$g(t)=2t^q-2+q-qt^2\geqslant g(1)=0. \tag{8}$$

另外,由于 $\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u))f(x,u)u\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u))f(x,u)u\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*f(x,u)u)\cdot F(x,u)\,\mathrm{d}x$,因此利用引理 3 可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^N}((I_\alpha*F(x,tu))F(x,tu)-(I_\alpha*F(x,u))F(x,u))\,\mathrm{d}x+\\&\quad(1-t^2)\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u))f(x,u)u\,\mathrm{d}x\geqslant 0.\end{aligned} \tag{9}$$

由式(7)—(9) 可得式(5) 成立. 证毕.

令$\{e_j : j\in \mathbf{N}\}$是 H 中的一组正交基，$X_j=\mathrm{span}\{e_j\}$，$\forall j\in\mathbf{N}$，则 $H=\bigoplus_{j\in\mathbf{N}}X_j$. 记 $Y_k=\bigoplus_{j=1}^{k}X_j$，$Z_k=\overline{\bigoplus_{j=k}^{\infty}X_j}$，则 Y_k 是有限维的. 本文采用 Zou 的喷泉定理[14]（以下简称喷泉定理）证明定理 1.

定理 2(喷泉定理)　假设泛函 E_η 满足以下条件：

1) $\forall(\eta,u)\in[1,2]\times H$，$E_\eta(-u)=E_\eta(u)$，$E_\eta$ 将 H 中的有界集映射到 $\mathbf{R}$ 中的有界集；

2) $\forall u\in H$，$Q(u)\geqslant 0$，且当$\|u\|\to\infty$ 时有 $P(u)\to\infty$ 或 $Q(u)\to\infty$；

3) 存在 $R_k>r_k>0$，使得对所有的 $\eta\in[1,2]$，

$$c_k(\eta)=\inf_{u\in Z_k,\|u\|=r_k}E_\eta(u)>d_k(\eta)=\inf_{u\in Y_k,\|u\|=R_k}E_\eta(u)；$$

则 $\forall\eta\in[1,2]$，$c_k(\eta)\leqslant\beta_k(\eta)=\inf\limits_{\varphi\in\Gamma_k}\max\limits_{u\in A_k}E_\eta(\varphi(u))$，其中 $A_k=\{u\in Y_k:\|u\|\leqslant R_k\}$，$\Gamma_k=\{\varphi\in C(A_k,H):\varphi(-u)=-\varphi(u),\varphi|_{\partial A_k}=id\}$. 对 $\eta\in[1,2]$，存在序列$\{u_n^k(\eta)\}_{n=1}^{\infty}$使得 $\sup\limits_n\|u_n^k(\eta)\|<\infty$，且当 $n\to\infty$ 时有 $E_\eta'(u_n^k(\eta))\to 0$，$E_\eta(u_n^k(\eta))\to\beta_k(\eta)$.

2　定理 1 的证明

引理 4　若(V1)—(V2) 和(F1)—(F2) 成立，则存在序列$\{r_k\}$使得当 $k\to\infty$ 时，$r_k\to\infty$ 且

$$c_k(\eta)=\inf_{u\in Z_k,\|u\|=r_k}E_\eta(u)\geqslant\frac{r_k^2}{4}>0,\forall k>0.$$

证明　由引理 2 和文献[15] 中的引理 3.8 可得，当 $2\leqslant l<2^*$ 时，有

$$\gamma_k(l)=\sup_{u\in Z_k,\|u\|=1}|u|_l\to 0,\ k\to\infty.\tag{10}$$

由条件(F1) 和(F2) 可得$|F(x,u)|\leqslant C_1|u|^{\frac{N+\alpha}{N}}+C_2|u|^p$. 结合引理 1 可得

$$\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u))F(x,u)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{\mathbf{R}^N}(C_1|u|^{\frac{N+\alpha}{N}}+C_2|u|^p)^{\frac{2N}{N+\alpha}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N+\alpha}{N}}\leqslant$$
$$C_3|u|_2^{\frac{2(N+\alpha)}{N}}+C_4|u|_{\frac{2Np}{N+\alpha}}^{2p}.$$

再由式(4) 和式(10) 可得，$\forall u\in Z_k$，

$$E_\eta(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2}\eta\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u))F(x,u)\mathrm{d}x-\frac{\eta}{q}\int_{\mathbf{R}^N}|u|^q\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\|u\|^2-\left(C_3\gamma_k^{\frac{2(N+\alpha)}{N}}(2)\|u\|^{\frac{2(N+\alpha)}{N}}+C_4\gamma_k^{2p}(\frac{2Np}{N+\alpha})\|u\|^{2p}\right)-\frac{2\gamma_k^q}{q}\|u\|^q.\tag{11}$$

取 $r_k=\min\left\{\left(\dfrac{1}{12C_3\gamma_k^{\frac{2(N+\alpha)}{N}}(2)}\right)^{\frac{N}{2\alpha}},12\left(\dfrac{1}{6C_4\gamma_k^{2p}(\dfrac{2Np}{N+\alpha})}\right)^{\frac{1}{2p-2}},\left(\dfrac{q}{24\gamma_k^q(q)}\right)^{\frac{1}{q-2}}\right\}$，则由 $c_k(\eta)$ 的定义和式(11) 可得 $c_k(\eta)\geqslant\dfrac{r_k^2}{4}>0$，再由式(10) 可得当 $k\to\infty$ 时 $r_k\to\infty$. 证毕.

引理 5　若(V1)—(V2) 和(F1)—(F3) 成立，则对于引理 4 中的$\{r_k\}$，存在 $R_k>r_k$ 使得

$$d_k(\eta)=\inf_{u\in Y_k,\|u\|=R_k}E_\eta(u)<0,\ \forall k>0.$$

证明　由于 Y_k 是有限维的，所以由文献[16] 中的引理 2.6 可知存在 $\delta_k>0$ 使得 $m(\Omega_k)\geqslant\delta_k$，$\forall u\in Y_k$，$u\neq 0$，其中 $m(\Omega_k)=\{x\in\mathbf{R}^N:|u(x)|\geqslant\delta_k\|u\|\}$. 因为 $q>2$，所以对于所有的 $k>0$ 及任意的 $M>2$，存在 $s_k>0$ 使得$|u|^q\geqslant\dfrac{Mq}{\delta_k^3}|u|^2$，$\forall|u|\geqslant s_k$. 由此有 $\forall u\in Y_k$，$\|u\|\geqslant\dfrac{s_k}{\delta_k}$，

$$E_\eta(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2}\eta\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u))F(x,u)\mathrm{d}x-\frac{\eta}{q}\int_{\mathbf{R}^N}|u|^q\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{q}\int_{\Omega_k}|u|^q\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{q}\delta_k\frac{Mq}{\delta_k^3}|u|^2=-\left(M-\frac{1}{2}\right)\|u\|^2.\tag{12}$$

取 $R_k\geqslant\max\left\{s_k,\frac{s_k}{\delta_k}\right\}$,则由式(12)和 $M>2$ 可得引理 5 成立.

定理 1 的证明 由引理 4 和引理 5 知 $E_\eta(u)$ 满足定理 2(喷泉定理)的条件 3),由假设(V1)—(V2)和(F1)—(F3)知 $E_\eta(u)$ 满足喷泉定理的条件 1)和 2).进而可知对所有的 $k>0$ 和 $\eta\in[1,2]$ 存在一个序列 $\{u_n^k(\eta)\}$,使得当 $n\to\infty$ 时有

$$\sup_n\{u_n^k(\eta)\}<\infty,\ E_\eta'(u_n^k(\eta))\to 0,\ E_\eta(u_n^k(\eta))\to\beta_k(\eta)\geqslant c_k(\eta).\tag{13}$$

其中 $\beta_k(\eta)=\inf_{\varphi\in\Gamma_k}\max_{u\in A_k}E_\eta(\varphi(u))$, $A_k=\{u\in Y_k:\|u\|\leqslant R_k\}$, $\Gamma_k=\{\varphi\in C(A_k,H):\varphi(-u)=-\varphi(u),\varphi|_{\partial A_k}=id\}$.因此对每个 $k>0$ 可以选取 $\eta_m\to 1$ 和其对应的序列 $\{u_n^k(\eta_m)\}$,使得 $\sup_n\{u_n^k(\eta_m)\}<\infty$, $E_{\eta_m}'(u_n^k(\eta_m))\to 0$.

下面先证明

$$u_n^k(\eta_m)\to u_m^k\in H,\ \forall m\in\mathbf{N},\ k>0.\tag{14}$$

事实上,对每个 η_m,由 $\sup_n\{u_n^k(\eta_m)\}<\infty$ 知 $\{u_n^k(\eta_m)\}$ 在 H 上有弱收敛的子列.记弱收敛子列仍为 $u_n^k(\eta_m)$.根据引理 2 可设当 $n\to\infty$ 时对 $\forall m\in\mathbf{N}$, $k>0$ 有:在 H 上 $u_n^k(\eta_m)$ 弱收敛到 u_m^k;在 $L^p(\mathbf{R}^N)$ $(2\leqslant p<2^*)$ 上, $u_n^k(\eta_m)\to u_m^k$;在 $\mathbf{R}^N$ 上, $u_n^k(\eta_m)$ 几乎处处收敛到 u_m^k.于是有 $E_{\eta_m}'(u_m^k)=0$ 和

$$\int_{\mathbf{R}^N}|u_n^k(\eta_m)|^q\mathrm{d}x\to\int_{\mathbf{R}^N}|u_m^k|^q\mathrm{d}x,\ n\to\infty.\tag{15}$$

由式(15)、条件(F2)、引理 1 和 Lebesgue 控制收敛定理可得,当 $n\to\infty$ 时有

$$\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u_n^k(\eta_m)))F(x,u_n^k(\eta_m))\mathrm{d}x\to\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u_m^k))F(x,u_m^k)\mathrm{d}x.\tag{16}$$

再结合式(13)、式(15)和 $E_{\eta_m}'(u_m^k)=0$ 可得式(14)成立.

由引理 4、式(13)以及 $E_{\eta_m}(u_m^k)$ 的表达式可得:

$$E_{\eta_m}(u_m^k)\in\left[\frac{r_k^2}{4},\bar{\beta}_k\right],\text{其中 }\bar{\beta}_k=\max_{u\in A_k}E_1(u).\tag{17}$$

下证对任意的 $k>0$, $\{u_m^k\}$ 是有界的.假设 $\|u_m^k\|\to\infty$,并取 $v_m^k=\frac{u_m^k}{\|u_m^k\|}$,则由此可得 $\|v_m^k\|=1$.不妨设 $v_m^k\rightharpoonup v^k$,由此可断定 $v^k=0$,否则

$$0=\limsup_{m\to\infty}\frac{E_\eta(u_m^k)}{\|u_m^k\|^2}\leqslant\frac{1}{2}-\frac{\eta}{q\|u_m^k\|^2}\int_{\mathbf{R}^N}|u|^q\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{\eta\|u_m^k\|^{q-2}}{q}\int_{\mathbf{R}^N}|v_m^k|^q\mathrm{d}x\to-\infty.$$

因上式左右两侧矛盾,所以 $v^k=0$.于是,由引理 2 可得 $\int_{\mathbf{R}^N}|v_m^k|^l\mathrm{d}x\to 0$, $\forall\, 2\leqslant l<2^*$.再根据条件(F2)可得 $\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u_m^k))F(x,u_m^k)\mathrm{d}x\to 0$.于是,对任意的 $b_k>0$ 有

$$\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,b_ku_m^k))F(x,b_ku_m^k)\mathrm{d}x\to 0.\tag{18}$$

由条件(F3)可得 $f(x,u)u-F(x,u)>0$,进而有

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_k+\mathrm{o}(1)&\geqslant E_{\eta_m}(u_m^k)-\frac{1}{2}E_{\eta_m}'(u_m^k)=\frac{1}{2}\eta_m\int_{\mathbf{R}^N}(I_\alpha*F(x,u_m^k))(f(x,u_m^k)u_m^k-\\&F(x,u_m^k))\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\eta_m\int_{\mathbf{R}^N}|u_m^k|^q\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\eta_m\int_{\mathbf{R}^N}|u_m^k|^q\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{19}$$

即 $\int_{\mathbf{R}^N}|u_m^k|^q\mathrm{d}x$ 是有界的.取 $b_k=2\sqrt{\bar{\beta}_k+1}$, $t_{mk}=\frac{b_k}{\|u_m^k\|}$,于是由式(4)、式(18)和式(19)可得

$$E_{\eta_m}(t_{mk}u_m^k)=E_{\eta_m}(b_kv_m^k)=\frac{1}{2}b_k^2+o_m(1)-\frac{b_k^q}{\|u_m^k\|^q}\int_{\mathbf{R}^N}|u_m^k|^q\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{2}b_k^2+o_m(1)=2(\bar{\beta}_k+1)+o_m(1). \tag{20}$$

由式(17)、式(20) 和引理 3 可得

$$\bar{\beta}_k\geqslant E_{\eta_m}(u_m^k)\geqslant E_{\eta_m}(t_{mk}u_m^k)+\frac{1-t^2}{2}E'_{\eta_m}(u_m^k)\geqslant E_{\eta_m}(t_{mk}u_m^k)+o(1)=2(\bar{\beta}_k+1)+o(1).$$

上式左右两侧矛盾，因此 $\{u_m^k\}$ 是有界的. 再由式(14) 的证明过程可知 $\{u_m^k\}$ 存在强收敛子列. 设 $u_m^k\to u_0^k$，由此可得 $E_1'(u_0^k)=0$，$E_1(u_0^k)\geqslant\frac{r_k^2}{4}$，即 u_0^k 是方程(1) 的解，且 $E_1(u_0^k)\geqslant\frac{r_k^2}{4}\to\infty(k\to\infty)$. 定理 1 证毕.

参考文献：

[1] PEKAR S I. Untersuchungen über die Elektronentheorie der Kristalle[M]. Berlin：Akademie Verlag，1954.

[2] LIEB E H. Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation[J]. Stud Appl Math，1977，57(2)：93-105.

[3] PENROSE R. On gravity's role in quantum state reduction[J]. Gen Relat Gravit，1996，28(5)：581-600.

[4] JONES K R W. Newtonian quantum gravity[J]. Aust J Phys，1995，48：1055-1081.

[5] LIONS P L. The Choquard equation and related questions[J]. Nonlinear Anal，1980，4(6)：1063 -1072.

[6] MOROZ V，VAN SCHAFTINGEN J. Groundstates of nonlinear Choquard equations：existence，qualitative properties and decay asymptotics[J]. J Funct Anal，2013，265：153-184.

[7] MOROZ V，VAN SCHAFTINGEN J. Existence of ground states for a class of nonlinear Choquard equations[J]. Trans Amer Math Soc，2015，367(9)：6557-6579.

[8] LI G D，LI Y Y，LIU X Q，et al. A positive solution of asymptotically periodic Choquard equations with locally defined nonlinearities[J]. Commun Pur Appl Anal，2020，19(3)：1351-1365.

[9] ALVES C O，FIGUEIREDO G M，YANG M T. Existence of solutions for a nonlinear Choquard equation with potential vanishing at infinity[J]. Adv Nonlinear Anal，2016，5(4)：331-345.

[10] ZHANG H，XU J X，ZHANG F B. Existence and multiplicity of solutions for a generalized Choquard equation [J]. Comput Math Appl，2017，73(8)：1804-1814.

[11] CHEN S，TANG X. Ground state solutions for general Choquard equations with a variable potential and a local nonlinearity[J]. RACSAM，2020，114(1)：14.

[12] LIEB E H，LOSS M. Analysis，Graduate Studies in Mathematics：Vol. 14[M]. 2nd Edition. Providence，RI：American Mathematical Society，2001.

[13] BARTSCH T，WANG Z Q，WILLEM M. The Dirichlet Problem for Superlinear Elliptic Equations[M]//Handbook of Differential Equations：Stationary Partial Differential Equations：vol. 2. North Holland：Elsevier，2005：1-55.

[14] ZOU W. Variant fountain theorems and their applications[J]. Manuscripta Math，2001，104：343-358.

[15] WILLEM M. Minimax Theorems[M]. Boston：Birkhäuser，1996.

[16] ZHANG Q，XU B. Multiplicity of solutions for a class of semilinear Schrödinger equations with sign-changing potential[J]. J Math Anal Appl，2011，377：834-840.