文章编号：1004-4353(2021)03-0189-05

乘积度量空间上 Banach-Chaterjia 型不动点定理的改进

朴勇杰
(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要：通过在$[0,1)^3$上引入一个实连续函数φ^*，在乘积度量空间上得到满足C^*-压缩条件的映射具有唯一不动点的存在性定理. 该结果在乘积度量空间上推广和改进了 Banach 型不动点定理、Chaterjia 型不动点定理、Banach-Chaterjia 型不动点定理及其推广的不动点定理.

关键词：乘积度量空间；不动点；C^*-压缩
中图分类号：O177.3；O189.11　　**文献标识码**：A

Improvements of the Banach-Chaterjia type fixed point theorem on multiplicative metric spaces

PIAO Yongjie
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: By introducing a real continuous function φ^* on $[0,1)^3$, the existence theorem of unique fixed points for mappings satisfying C^*-contractive condition on multiplicative metric spaces is obtained. The results generalize and improve Banach type fixed theorem, Chaterjia type fixed point theorem, Banach-Chaterjia type fixed point theorem and the generalized fixed point theorems on multiplicative metric spaces.

Keywords: multiplicative metric space; fixed point; C^*-contraction

2008 年，Bashirov 等[1]首次提出了乘积度量空间的概念，并研究了该空间上的一些基本性质. 随后，Florack 等[2]和 Bashirov 等[3]对乘积度量空间的性质做了进一步研究. 2012 年，Özavsar 等[4]在乘积度量空间上引进了如下乘积压缩映射的概念，并给出了若干个乘积压缩映射的不动点存在定理.

设(X,d)是乘积度量空间，称映射$f:X\to X$为乘积压缩映射[4]是指存在$\lambda\in[0,1)$使得

$$d(fx,fy)\leqslant[d(x,y)]^{\lambda},\ \forall x,y\in X. \tag{1}$$

文献[4]还给出了如下形式的乘积度量空间上 Banach 型不动点定理.

定理 1　完备的乘积度量空间(X,d)上的任何乘积压缩映射f必有唯一不动点.

在文献[4]研究的基础上，文献[5-8]的作者通过引进五元实函数并利用弱交换性、弱相容性等条件给出了乘积度量空间上的 4 个映射的公共不动点存在性定理，这些结果很好地推广了乘积度量空间上(公共)不动点定理.

显然，定理 1 是完备实度量空间上 Banach 不动点定理[9]在乘积度量空间上的表现形式. 在乘积度

收稿日期：2021-08-06
基金项目：国家自然科学基金(11361064)
作者简介：朴勇杰(1962—)，男，理学博士，教授，研究方向为非线性分析和不动点理论.

量空间上称具有如下条件

$$d(fx,fy)\leqslant[d(x,fy)d(y,fx)]^{\lambda},\ \forall\, x,y\in X \tag{2}$$

的 f 为 Chaterjia 型压缩映射,其中 $\lambda\in[0,\frac{1}{2})$.

显然,如下条件

$$d(fx,fy)\leqslant[d(x,y)]^{\alpha}[d(x,fy)]^{\beta}[d(y,fx)]^{\gamma},\ \forall\, x,y\in X \tag{3}$$

是式(1)和式(2)的推广形式,其中 $\alpha,\beta,\gamma\geqslant 0$, $\alpha+2\max\{\beta,\gamma\}<1$.

称满足式(3)的映射 f 为Banach-Chaterjia 型压缩映射. 文献[10]的作者引进了如下一个函数类:$\gamma\in\Gamma$,当且仅当 $\gamma:[1,+\infty)^3\to[1,+\infty)$ 满足:① γ 关于每个变量是连续的且单调递增的;② 存在 $k\in[0,1)$ 使得当 $x,y\geqslant 1$ 且 $x\leqslant\gamma(y,xy,1)$ 或 $x\leqslant\gamma(y,1,xy)$ 时成立 $x\leqslant y^k$. 同时文献[10]的作者还给出了在乘积度量空间上满足 γ-隐式压缩条件映射的唯一不动点存在性定理(定理 2 和定理 3):

定理 2 设(X,d)是完备的乘积度量空间,且 $f:X\to X$ 为映射. 如果存在 $\gamma\in\Gamma$ 使得 $d(fx,fy)\leqslant\gamma(d(x,y),d(x,fy),d(y,fx))$, $\forall\, x,y\in X$,则 f 在 X 中存在不动点. 进一步,如果 γ 满足对任何 $x>1$, $x>\gamma(x,x,x)$,则 f 有唯一不动点.

定理 3 设(X,d)是完备的乘积度量空间,且 $f:X\to X$ 为映射. 如果 f 满足条件式(3),则 f 在 X 存在唯一不动点.

文献[10]中指出定理 3 是定理 2 在极特殊下的结果. 显然,定理 3 推广和改进了 Banach 型定理(定理 1)及 Chaterjia 不动点定理在乘积度量空间上的变形结果. 本文利用连续函数 φ^* 控制映射的压缩条件使定理 3 成立的条件放宽至 $\alpha+2\max\{\beta,\gamma\}\leqslant 1$.

定义 1[1] 设 X 是非空集合,称映射 $d:X\times X\to[0,+\infty)$ 是 X 上的乘积度量是指 d 满足如下条件:

(i) 对任何 $x,y\in X$, $d(x,y)\geqslant 1$, 且 $d(x,y)=1\Leftrightarrow x=y$;

(ii) 对任何 $x,y\in X$, $d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) 对任何 $x,y,z\in X$, $d(x,z)=d(x,y)d(y,z)$.

如果 X 和 d 满足上述条件,则称(X,d)为乘积度量空间.

例 1[6] 设 $X=\mathbf{R}$ 并定义 $d(x,y)=\mathrm{e}^{|x-y|}$, $\forall\, x,y\in X$,则(X,d)是乘积度量空间.

定义 2[1] 设(X,d)是乘积度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的序列且 $x\in X$. 若对任何积性开球 $B_\varepsilon(x)=\{y\in X:d(x,y)<\varepsilon\}$, $\varepsilon>1$,存在自然数 N,且当 $n>N$ 时 $x_n\in B_\varepsilon(x)$ 成立,则称序列 $\{x_n\}$ 乘积收敛于 $x\in X$,并记为 $x_n\to x\ (n\to\infty)$.

引理 1[4] 设(X,d)是乘积度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的序列且 $x\in X$,则

$$x_n\to x\ (n\to\infty)\Leftrightarrow d(x_n,x)\to 1\ (n\to\infty).$$

定义 3[4] 设(X,d)是乘积度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的序列. 若对任何 $\varepsilon>1$,存在自然数 N 使得 $n,m>N$ 时成立 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$,则称序列 $\{x_n\}$ 为乘积柯西序列.

引理 2[4] 设(X,d)是乘积度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的序列,则 $\{x_n\}$ 是乘积柯西序列当且仅当 $d(x_n,x_m)\to 1\ (m,n\to\infty)$.

定义 4[4] 如果乘积度量空间(X,d)中的每个乘积柯西序列都是乘积收敛的,则称(X,d)是完备的.

引理 3[4] 设(X,d)是乘积度量空间, $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 X 中的两个序列且 $x,y\in X$,则

$$x_n\to x,\ y_n\to y\ (n\to\infty)\Rightarrow d(x_n,y_n)\to d(x,y)\ (n\to\infty).$$

定义 5 函数 $\varphi^*:[1,\infty)^3\to[1,\infty)$ 是连续函数,且满足 $\varphi^*(x,y,z)=1\Leftrightarrow x=y=z=1$.

例 2 $\varphi_1^*(x,y,z)=x^py^qz^r$, $\forall x,y,z\geqslant 1$; $\varphi_2^*(x,y,z)=\max\{x,y,z\}^k$, $\forall x,y,z\geqslant 1$; $\varphi_3^*(x,y,z)=\dfrac{x^p+y^q+z^r}{3}$, $\forall\, x,y,z\geqslant 1$. 其中 p、q、r 和 k 都是正数,且均满足定义 5 中的函数.

定理 4　设(X,d)是完备的乘积度量空间，$f:X\to X$ 为映射. 如果对任何 $x,y\in X$，

$$d(fx,fy)\leqslant\frac{[d(x,y)]^{\alpha}[d(x,fy)]^{\beta}[d(y,fx)]^{\gamma}}{\varphi^{*}(d(x,y),d(x,fy),d(y,fx))},\tag{4}$$

其中 α、β、γ 是 3 个实数，使得 $\alpha+\min\{\beta,\gamma\}\geqslant 0$ 且 $\alpha+2\max\{\beta,\gamma\}\leqslant 1$，则 f 在 X 中存在唯一不动点，且称满足式(4) 的 f 为 C^{*}-压缩映射.

证明　任取 $x_0\in X$，并根据 $x_{n+1}=fx_n$，$\forall n=0,1,2,\cdots$ 构造一个序列$\{x_n\}$. 由给定的α、β、γ 条件可得 $0\leqslant\alpha+\min\{\beta,\gamma\}\leqslant\alpha+\beta\leqslant 1-\beta$ 和 $0\leqslant\alpha+\min\{\beta,\gamma\}\leqslant\alpha+\gamma\leqslant 1-\gamma$，因此$\beta\leqslant 1$ 和 $\gamma\leqslant 1$.

如果 $\alpha+\beta=0$，则根据式(4) 知对任何 $n=0,1,2,\cdots$，有

$$d(fx_n,fx_{n+1})\leqslant\frac{[d(x_n,x_{n+1})]^{\alpha}[d(x_n,fx_{n+1})]^{\beta}[d(x_{n+1},fx_n)]^{\gamma}}{\varphi^{*}(d(x_n,x_{n+1}),d(x_n,fx_{n+1}),d(x_{n+1},fx_n))}.\tag{5}$$

整理式(5) 并利用定义 1 中的条件(iii) 可得

$$d(x_{n+1},x_{n+2})\leqslant\frac{[d(x_n,x_{n+1})]^{\alpha}[d(x_n,x_{n+1})d(x_{n+1},x_{n+2})]^{\beta}}{\varphi^{*}(d(x_n,x_{n+1}),d(x_n,x_{n+2}),1)}=\frac{[d(x_{n+1},x_{n+2})]^{\beta}}{\varphi^{*}(d(x_n,x_{n+1}),d(x_n,x_{n+2}),1)}.\tag{6}$$

如果存在某自然数 N 使得$\varphi^{*}(d(x_N,x_{N+1}),d(x_N,x_{N+2}),1)\neq 1$，则由式(6) 和 $\beta\leqslant 1$ 可得 $d(x_{N+1},x_{N+2})<[d(x_{N+1},x_{N+2})]^{\beta}\leqslant d(x_{N+1},x_{N+2})$，矛盾. 于是对任何的 $n=0,1,2,\cdots$，有 $\varphi^{*}(d(x_n,x_{n+1}),d(x_n,x_{n+2}),1)=1$. 根据 φ^{*} 的性质可知 $x_n=x_{n+1}=fx_n$，该结果表明 f 有不动点 x_n. 为方便，本文将 x_n 记为 x^{*}. 若 y^{*} 也是 f 的不动点，则根据式(4) 可得：

$$d(fx^{*},fy^{*})\leqslant\frac{[d(x^{*},y^{*})]^{\alpha}[d(x^{*},fy^{*})]^{\beta}[d(y^{*},fx^{*})]^{\gamma}}{\varphi^{*}(d(x^{*},y^{*}),d(x^{*},fy^{*}),d(y^{*},fx^{*}))}.$$

整理上式并利用 $\alpha+\beta=0$、$\gamma\leqslant 1$ 以及 φ^{*} 的性质可得：

$$d(x^{*},y^{*})\leqslant\frac{d(y^{*},x^{*})}{\varphi^{*}(d(x^{*},y^{*}),d(x^{*},y^{*}),d(y^{*},x^{*}))}\leqslant d(x^{*},y^{*}).$$

由上式可知必有 $\varphi^{*}(d(x^{*},y^{*}),d(x^{*},y^{*}),d(y^{*},x^{*}))=1$. 再根据 φ^{*} 的性质可得 $d(y^{*},x^{*})=1$，由此表明 $y^{*}=x^{*}$ 是 f 的唯一不动点.

若 $\alpha+\beta>0$，则 $\beta<1$，于是可由 $\alpha+2\max\{\beta,\gamma\}\leqslant 1$ 可推出 $\dfrac{\alpha+\beta}{1-\beta}\in(0,1]$. 根据式(4) 知，对任何的 $n=0,1,2,\cdots$，式(5) 仍成立. 再利用定义 1 中的条件(iii) 和 φ^{*} 的性质整理式(5) 可得：

$$d(x_{n+1},x_{n+2})\leqslant\frac{[d(x_n,x_{n+1})]^{\alpha+\beta}[d(x_{n+1},x_{n+2})]^{\beta}}{\varphi^{*}(d(x_n,x_{n+1}),d(x_n,x_{n+2}),1)}\leqslant[d(x_n,x_{n+1})]^{\alpha+\beta}[d(x_{n+1},x_{n+2})]^{\beta}.\tag{7}$$

由式(7) 可得 $d(x_{n+1},x_{n+2})\leqslant[d(x_n,x_{n+1})]^{\frac{\alpha+\beta}{1-\beta}}\leqslant d(x_n,x_{n+1})$. 该结果表明$\{d(x_n,x_{n+1})\}_{n=0}^{\infty}$ 是单调递减且有下界 1 的数列，进而知存在 $u\geqslant 1$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1})=u.\tag{8}$$

根据 φ^{*} 的性质和 u 的定义以及式(5) 易得 $u^{\alpha+2\beta}\leqslant u\leqslant d(x_{n+1},x_{n+2})\leqslant[d(x_n,x_{n+1})]^{\alpha}[d(x_n,x_{n+2})]^{\beta}\leqslant[d(x_n,x_{n+1})]^{\alpha+\beta}[d(x_{n+1},x_{n+2})]^{\beta}$. 对上式取 $n\to\infty$，并根据式(8) 可得

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+2})=u^{2}.\tag{9}$$

对式(7) 取 $n\to\infty$，并根据式(8)、(9) 和 φ^{*} 的性质可得 $u^{\alpha+2\beta}\leqslant u\leqslant\dfrac{u^{\alpha+2\beta}}{\varphi^{*}(u,u^{2},1)}\leqslant u^{\alpha+2\beta}$. 由该式可知必有 $\varphi^{*}(u,u^{2},1)=1$，于是根据 φ^{*} 的性质可得 $u=1$.

假设$\{x_n\}$ 不是乘积柯西序列，则存在实数 $\varepsilon(\varepsilon>1)$ 使得对任意自然数 k 存在两个自然数 $m(k)$ 和

$n(k)(m(k)>n(k))$,且满足

$$d(x_{m(k)},x_{n(k)})>\varepsilon,\ d(x_{m(k)-1},x_{n(k)})\leqslant\varepsilon. \tag{10}$$

由式(10) 和定义 1 中的条件(iii) 可得 $\varepsilon<d(x_{m(k)},x_{n(k)})\leqslant d(x_{m(k)},x_{m(k)-1})d(x_{m(k)-1},x_{n(k)})\leqslant \varepsilon d(x_{m(k)},x_{m(k)-1})$,对上式取 $k\to\infty$,并根据 $u=1$ 可得

$$\lim_{k\to\infty}d(x_{m(k)},x_{n(k)})=\lim_{k\to\infty}d(x_{m(k)-1},x_{n(k)})=\varepsilon. \tag{11}$$

再根据定义 1 中的条件(iii) 可得:

$$\frac{d(x_{m(k)},x_{n(k)})}{d(x_{m(k)+1},x_{m(k)})}\leqslant d(x_{m(k)+1},x_{n(k)})\leqslant d(x_{m(k)+1},x_{m(k)})d(x_{m(k)},x_{n(k)}); \tag{12}$$

$$\frac{d(x_{m(k)},x_{n(k)})}{d(x_{n(k)+1},x_{n(k)})}\leqslant d(x_{m(k)},x_{n(k)+1})\leqslant d(x_{m(k)},x_{n(k)})d(x_{n(k)},x_{n(k)+1}). \tag{13}$$

在式(12) 和式(13) 的两边取 $k\to\infty$,则根据 $u=1$ 和式(11) 可得:

$$\lim_{k\to\infty}d(x_{m(k)+1},x_{n(k)})=\lim_{k\to\infty}d(x_{m(k)},x_{n(k)+1})=\varepsilon. \tag{14}$$

类似地,根据 $u=1$ 和式(14) 以及 $\dfrac{d(x_{m(k)+1},x_{n(k)})}{d(x_{n(k)+1},x_{n(k)})}\leqslant d(x_{m(k)+1},x_{n(k)+1})\leqslant d(x_{m(k)+1},x_{n(k)})d(x_{n(k)},x_{n(k)+1})$ 可得

$$\lim_{k\to\infty}d(x_{m(k)+1},x_{n(k)+1})=\varepsilon. \tag{15}$$

由式(4) 知对任何的 $k=0,1,2,\cdots$,有

$$d(fx_{m(k)},fx_{n(k)})\leqslant\frac{[d(x_{m(k)},x_{n(k)})]^{\alpha}[d(x_{m(k)},fx_{n(k)})]^{\beta}[d(x_{n(k)},fx_{m(k)})]^{\gamma}}{\varphi^{*}(d(x_{m(k)},x_{n(k)}),d(x_{m(k)},fx_{n(k)}),d(x_{n(k)},fx_{m(k)}))}.$$

对上式两边取 $k\to\infty$,并结合式(11)、式(14)、式(15) 以及 φ^{*} 的性质可得:

$$\varepsilon\leqslant\frac{\varepsilon^{\alpha+\beta+\gamma}}{\varphi^{*}(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)}\leqslant\frac{\varepsilon}{\varphi^{*}(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)}\leqslant\varepsilon.$$

由上式可知 $\varphi^{*}(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)=1$,于是可得 $\varepsilon=1$,矛盾,因此 $\{x_n\}$ 是乘积柯西序列. 根据 (X,d) 的完备性可知,存在 $x^{*}\in X$ 使得 $d(x_n,x^{*})\to 1\ (n\to\infty)$. 于是再根据式(4) 可得:

$$d(fx^{*},fx_n)\leqslant\frac{[d(x^{*},x_n)]^{\alpha}[d(x^{*},fx_n)]^{\beta}[d(x_n,fx^{*})]^{\gamma}}{\varphi^{*}(d(x^{*},x_n),d(x^{*},fx_n),d(x_n,fx^{*}))}.$$

整理上式并取 $n\to\infty$ 可得:

$$d(fx^{*},x^{*})\leqslant\frac{[d(x^{*},fx^{*})]^{\gamma}}{\varphi^{*}(1,1,d(x^{*},fx^{*}))}\leqslant\frac{d(x^{*},fx^{*})}{\varphi^{*}(1,1,d(x^{*},fx^{*}))}\leqslant d(x^{*},fx^{*}).$$

由上式可知必有 $\varphi^{*}(1,1,d(x^{*},fx^{*}))=1$,于是根据 φ^{*} 的性质可得 $d(x^{*},fx^{*})=1$,即 $x^{*}=fx^{*}$. 该结果说明 x^{*} 是 f 的一个不动点. 如果 y^{*} 也是 f 的一个不动点,则根据式(4) 可得:

$$d(x^{*},y^{*})=d(fx^{*},fy^{*})\leqslant\frac{[d(x^{*},y^{*})]^{\alpha}[d(x^{*},fy^{*})]^{\beta}[d(y^{*},fx^{*})]^{\gamma}}{\varphi^{*}(d(x^{*},y^{*}),d(x^{*},fy^{*}),d(y^{*},fx^{*}))}\leqslant$$

$$\frac{[d(x^{*},y^{*})]^{\alpha+\beta+\gamma}}{\varphi^{*}(d(x^{*},y^{*}),d(x^{*},y^{*}),d(y^{*},x^{*}))}\leqslant\frac{d(x^{*},y^{*})}{\varphi^{*}(d(x^{*},y^{*}),d(x^{*},y^{*}),d(y^{*},x^{*}))}\leqslant d(x^{*},y^{*}).$$

由上式可知必有 $\varphi^{*}(d(x^{*},y^{*}),d(x^{*},y^{*}),d(x^{*},y^{*}))=1$,于是有 $d(x^{*},y^{*})=1$,即 $x^{*}=y^{*}$. 该结果说明 f 有唯一不动点 x^{*}.

注 1 在定理 3 中要求 α、β、γ 满足 $\alpha,\beta,\gamma\geqslant 0$,$\alpha+2\max\{\beta,\gamma\}<1$,但在定理 4 中利用连续函数 φ^{*} 限制压缩条件后就可将定理 3 中的 α、β、γ 的条件放宽至 $\alpha+\min\{\beta,\gamma\}\geqslant 0$,$\alpha+2\max\{\beta,\gamma\}\leqslant 1$,且不要求 α、β、γ 一定是非负的. 因此定理 4 较好地推广和改进了定理 3,特别是把"小于 1"放宽至"小于等于 1".

(下转第 199 页)

$$\phi_p\left(\frac{(1-\lambda)[\alpha]_q\Gamma_q(\alpha)}{((1-\lambda)[\alpha]_q+\lambda)(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}(1-q)^{(\alpha)}q^n}\right)\left(\frac{1}{(1-b^{p-1})\Gamma_q(\beta+1)}\right)^{-1}\approx 0.461\,4.$$

由以上显然可得:

$$0<L\leqslant\phi_p\left(\frac{(1-\lambda)[\alpha]_q\Gamma_q(\alpha)}{((1-\lambda)[\alpha]_q+\lambda)(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}(1-q)^{(\alpha)}q^n}\right)\left(\frac{1}{(1-b^{p-1})\Gamma_q(\beta+1)}\right)^{-1}.$$

再由定理 1 可知,边值问题(7)至少存在一个解.

参考文献:

[1] YAN F, ZUO M, HAO X. Positive solution for a fractional singular boundary value problem with p-Laplacian operator[J]. Bound Value Probl, 2018,2018(1):51-66.

[2] XIE J, DUAN L. Existence of solutions for fractional differential equations with p-Laplacian operator and integral boundary conditions[J]. J Funct Space, 2020,2020(100):1-7.

[3] CHEN H, KANG S, KONG L, et al. Existence of three positive solutions for a class of boundary value problems of caputo fractional-difference equation[J]. Discrete Dyn Nat Soc, 2018,2018(4):1-9.

[4] AGARWAL R P. Certain fractional q-integrals and q-derivatives[J]. Math Proc Camb Philos Soc, 1969,66(2):365-370.

[5] SLAANA D M, PREDRAG M R, MIOMIR S S. Fractional integrals and derivatives in q-calculus[J]. Appl Anal Discr Math, 2007,1(1):311-323.

[6] AHMAD B, NTOUYAS S K, PURNARAS I K. Existence results for nonlocal boundary value problems of nonlinear fractional q-difference equations[J]. Adv Diff Equa, 2012,2012(140):324-351.

[7] JACKSON H F. On q-Functions and a certain difference operator[J]. Trans Roy Soc Edinburgh, 1909,46:253-281.

(上接第 192 页)

参考文献:

[1] BASHIROV A E, KURPLNARA E M, OZYAPLCL A. Multiplicative calculus and its applications[J]. J Math Anal Appl, 2008,337:36-48.

[2] FLORACK L, ASSEN H V. Multiplicative calculus in biomedical image analysis[J]. J Math Imaging Vis, 2012,42(1):64-75.

[3] BASHIROV A E, MISIRLI E, TANDOGDU Y, et al. On modeling with multiplicative differential equations[J]. Appl Math J Chin Univ Ser B, 2011,26:425-438.

[4] ÖZAVSAR M, CEVIKEL A C. Fixed point of multiplicative contraction mappings on multiplicative metric spaces[J]. Appl Math, 2012,3:35-39.

[5] HE S, SONG M, CHEN D. Common fixed points for weak commutative mappings on amultiplicative metric space[J]. Fixed Point Theory Appl, 2013,4:48.

[6] GU F, CHO Y J. Common fixed points results for four maps satisfying φ-Contractive condition in multiplicative metric spaces[J]. Fixed Point Theory Appl, 2015,2015:165.

[7] 姜云,谷峰. 乘积度量空间中满足 φ-型压缩条件的四个映像的公共不动点定理[J]. 纯粹数学与应用数学,2017,33(2):185-195.

[8] PIAO Y J. Unique common fixed points for four non-continuous mappings satisfying ψ-implicit contractive condition on non-complete multiplicative metric spaces[J]. Adv Fixed Point Theory, 2019,9(2):135-145.

[9] BANACH S. Sur les opérations dans les ensembles abstraist et leur application aux équations inégrales[J]. Fundam Math, 1922,3:138-181.

[10] 朴勇杰. 乘积度量空间上满足 $\sigma(\gamma)$-压缩条件的映射的唯一不动点[J]. 吉林大学学报(理学版),2021,59(3):469-474.

[11] CHATTERJEA S K. Fixed point theorems[J]. C R Acad Bulgare Sci, 1972,25:727-730.