文章编号：1004-4353(2021)02-0146-08

# 决策信息数据为区间数的一种多属性群决策方法

朱国成， 陈利群
（广东创新科技职业学院 通识教育学院，广东 东莞 523960）

**摘要**：为了解决属性值为区间数的多属性群决策问题，提出了一种以决策信息数据为区间数的多属性群决策方法. 首先分析了评价专家权重的计算方法；然后采用区间数熵值法确定属性权重；最后在确定评价专家权重与属性权重后对每个方案的综合有效评价值和属性的正负有效综合理想属性值进行测度，以此求出每个方案的有效综合属性测度结果，并进行排序. 采用实例验证表明，该方法操作简单，便于计算，能够快速取得正确的排序结果.

**关键词**：区间数；多属性群决策；区间数熵值法；排序
**中图分类号**：O159　　**文献标识码**：A

# A multi-attribute group decision-making method for interval number decision information data

ZHU Guocheng， CHENG Liqun
( *School of General Education*, *Guangdong Innovative Technical College*, *Dongguan* 523960, *China* )

**Abstract**: In order to solve the problem of multi-attribute group decision-making with interval number of attribute values, multi-attribute group decision-making with one type interval number decision information data is proposed. Firstly, the calculation method to the evaluation experts' weight is presented. Then, using interval number entropy method, the attribute weight is obtained. Finally, when ascertain the weights of experts and attributes is finished, the comprehensive, effective evaluation value and the comprehensive, ideal, positive, negative, effective attribute value to each scheme are measured, thus the effective, comprehensive attribute measurement results of each scheme is obtained and sorted. A case is employ to verify the method is simple to operate, easy to calculate, quickly and perfect to sort.

**Keywords**: interval number; multi-attribute group decision-making; interval number entropy method; sort

## 0 引言

目前，对于区间数的多属性群决策问题的研究主要集中在评价专家权重模型的建立[1]、确定属性偏好路径的方法[2]和方案排序的算法[3]等问题上. 当属性是成本型和效益型并存时，或者是更多种类型并存时，在计算评价专家权重前均需要对决策数据进行规范化处理[4-6]. 因为区间数熵值法在确定属性权重时能够较为完整地保留决策信息数据，且计算过程相对简单，所以学者在解决属性偏好问题中多采用该方法. 文献[7]针对属性值为区间数的情形，采用区间数熵值法计算了属性权重，并根据各方案的属性

**收稿日期**：2021 - 04 - 03　　**基金项目**：广东创新科技职业学院特色创新类重点项目(2020TSZD005)
**作者简介**：朱国成(1986—)，男，讲师，研究方向为模糊信息决策与最优化.

优良个数对方案的优劣进行了鉴定，经数值算例表明该方法科学有效；文献[8]利用定义的区间数转换公式将由常数构成的属性值转换为区间数，然后利用区间数的积型贴近度模型构建了一种区间数排序理论，实证结果显示该理论能够取得符合实际的决策效果；文献[9]建立了 4 种情形下的评价专家权重的计算模型，并提出了一种可行的区间直觉模糊多属性群决策算法. 本文受文献[7-9]的启发，建立了一种在求解评价专家权重前无需对属性数据先进行规范处理的求解模型，并提出了一种求解方案有效理想综合测度结果的多属性群决策方法，最后通过实例验证了本文方法的可行性.

## 1　预备知识

### 1.1　区间数理论

**定义 1**[10]　记 $a=[a^-,a^+]=\{x\,|\,a^-\leqslant x\leqslant a^+,a^-\leqslant a^+,a^-,a^+\in\mathbf{R}\}$，称 $a$ 为区间数. 若 $0\leqslant a^-\leqslant a^+$，则称 $a$ 为正区间数；若 $a^-=a^+$，则 $a$ 退化为实数.

**定义 2**[11]　设 $a=[a^-,a^+]$，$b=[b^-,b^+]$ 为两个正区间数，则有如下运算：① $a\pm b=[a^-\pm b^-,a^+\pm b^+]$；② $ab=[a^-b^-,a^+b^+]$；③ $\lambda a=[\lambda a^-,\lambda a^+]$；④ $\dfrac{a}{b}=\left[\dfrac{a^-}{b^+},\dfrac{a^+}{b^-}\right]$，特别地 $\dfrac{1}{b}=\left[\dfrac{1}{b^-},\dfrac{1}{b^+}\right]$.

**定义 3**[3]　定义区间数 $\tilde{a}=[a^L,a^U]$ 和 $\tilde{b}=[b^L,b^U]$ 的积型贴近度为 $T(\tilde{a}\times\tilde{b})=\dfrac{a^L\times a^U}{b^L\times b^U}\times\dfrac{a^L+a^U}{b^L+b^U}$. 规定，若 $\tilde{a}=\tilde{b}=0$，则 $T(\tilde{a}\times\tilde{b})=1$. 区间数 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 的积型贴近度模型有如下运算性质：① 当 $\tilde{a}=\tilde{b}$ 时，$T(\tilde{a}\times\tilde{b})=1$；② 当 $\tilde{a}>\tilde{b}$ 时，$T(\tilde{a}\times\tilde{b})>1$；③ 当 $\tilde{a}<\tilde{b}$ 时，$T(\tilde{a}\times\tilde{b})<1$；④ 当 $T(\tilde{a}\times\tilde{b})=t$ 时，$T(\tilde{b}\times\tilde{a})=\dfrac{1}{t}$；⑤ 当 $T(\tilde{a}\times\tilde{b})>1$，$T(\tilde{b}\times\tilde{c})>1$ 时，$T(\tilde{a}\times\tilde{c})>1$.

**定义 4**[12]　若区间数 $a=[a^-,a^+]$，$b=[b^-,b^+]$，则称 $d(a,b)=\sqrt{(b^+-a^+)^2+(b^--a^-)^2}$ 为区间数 $a$ 和 $b$ 的相离度.

### 1.2　多属性群决策理论下的相关定义

**定义 5**　在多属性群决策问题中，设决策专家集 $P=\{P_1,P_2,\cdots,P_l,\cdots,P_H\}$、评价方案集 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots,A_M\}$、属性集 $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_j,\cdots,G_N\}$，决策专家权重和属性权重分别记为 $\omega_{P_l}$、$\omega_{G_j}$（属未知量）. 采用区间数刻画第 $l$ 位决策专家给予第 $i$ 个方案的第 $j$ 个属性评价信息，记为 $q_{lij}=[q_{lij}^-,q_{lij}^+]$. 由于常见的属性类型为成本型属性（$I_1$）和效益型属性（$I_2$），因此本文只考虑成本型属性和效益型属性两种属性类型，其个数分别用 $|I_1|$ 和 $|I_2|$ 表示（$|I_1|+|I_2|=N$），专家组给予的方案评价表为 $[q_{lij}]_{HMN}$.

**定义 6**　属性的理想属性值的计算方法为：

1）$\bar{q}_{lij}=[\bar{q}_{lij}^-,\bar{q}_{lij}^+]=[\min\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^-,\min\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^+]$，$j\in I_1$；

2）$\bar{q}_{lij}=[\bar{q}_{lij}^-,\bar{q}_{lij}^+]=[\max\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^-,\max\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^+]$，$j\in I_2$.

**定义 7**　规范化加权评价表 $[\omega_{P_l}q_{lij}]_{HMN}$，规范的方法为：

$$1）\ |[q_{lij}]_{HMN}|=[\tilde{q}_{lij}]_{HMN}=\left[\frac{\bar{q}_{lij}}{\omega_{P_l}q_{lij}}\right]_{HMN}=\left[\left[\frac{\min\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^-}{\omega_{P_l}q_{lij}^+},\frac{\min\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^+}{\omega_{P_l}q_{lij}^-}\right]_{lij}\right]_{HMN},\ j\in I_1；$$

$$2）\ |[q_{lij}]_{HMN}|=[\tilde{q}_{lij}]_{HMN}=\left[\frac{\omega_{P_l}q_{lij}}{\bar{q}_{lij}}\right]_{HMN}=\left[\left[\frac{\omega_{P_l}q_{lij}^-}{\max\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^+},\frac{\omega_{P_l}q_{lij}^+}{\max\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^-}\right]_{lij}\right]_{HMN},\ j\in I_2.$$

**定义 8**　将第 $i$ 个方案在第 $j$ 个属性的有效评价值用 $\tilde{q}_{ij}$ 表示，并将其定义为：

1) $\tilde{q}_{ij}=[\tilde{q}_{ij}^{-},\tilde{q}_{ij}^{+}]=\left[\min\limits_{i}\left(\dfrac{\min\limits_{j}\omega_{P_l}q_{lij}^{-}}{\omega_{P_l}q_{lij}^{+}}\right),\max\limits_{i}\left(\dfrac{\min\limits_{j}\omega_{P_l}q_{lij}^{+}}{\omega_{P_l}q_{lij}^{-}}\right)\right]$, $j\in I_1$;

2) $\tilde{q}_{ij}=[\tilde{q}_{ij}^{-},\tilde{q}_{ij}^{+}]=\left[\min\limits_{i}\left(\dfrac{\omega_{P_l}q_{lij}^{-}}{\max\limits_{j}\omega_{P_l}q_{lij}^{+}}\right),\max\limits_{i}\left(\dfrac{\omega_{P_l}q_{lij}^{+}}{\max\limits_{j}\omega_{P_l}q_{lij}^{-}}\right)\right]$, $j\in I_2$.

## 2 决策专家权重及属性权重的计算方法

### 2.1 决策专家权重的计算方法

根据定义5,计算决策专家权重的步骤为:

步骤1 绘制专家给予方案的评分表$[q_{lij}]_{HMN}$;

步骤2 根据定义1计算专家对第$i$个方案的第$j$个属性进行评分所得的平均值$\bar{q}_{ij}$,计算公式为:

$$\bar{q}_{ij}=[\sum_{l=1}^{H}q_{lij}^{-}/H,\sum_{l=1}^{H}q_{lij}^{+}/H],\ l\in\{1,2,\cdots,H\},\ i\in\{1,2,\cdots,M\},\ j\in\{1,2,\cdots,N\};$$

步骤3 利用定义3测度$T(q_{lij}\times\bar{q}_{ij})=Q_{lij}$.由离差最大化思想可知,$Q_{lij}$越接近于1,则第$l$位专家给予第$i$个方案中的第$j$个属性评价值越能被评价专家组接受,因此可以赋予其更大的权重;

步骤4 确定专家$P_l$在方案$A_i$中属性$G_j$上的权重$\omega_{P_l}^{ij}$,计算公式为$\omega_{P_l}^{ij}=1-\dfrac{|Q_{lij}-1|}{\sum\limits_{l=1}^{H}|Q_{lij}-1|}$;

步骤5 确定专家$P_l$在属性$G_j$上的权重$\omega_{P_l}^{j}$,计算公式为$\omega_{P_l}^{j}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{M}\left(1-\dfrac{|Q_{lij}-1|}{\sum\limits_{l=1}^{H}|Q_{lij}-1|}\right)}{\sum\limits_{l=1}^{H}\sum\limits_{i=1}^{M}\left(1-\dfrac{|Q_{lij}-1|}{\sum\limits_{l=1}^{H}|Q_{lij}-1|}\right)}$;

步骤6 确定专家$P_l$的权重$\omega_{P_l}$,计算公式为$\omega_{P_l}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\left(1-\dfrac{|Q_{lij}-1|}{\sum\limits_{l=1}^{H}|Q_{lij}-1|}\right)}{\sum\limits_{l=1}^{H}\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\left(1-\dfrac{|Q_{lij}-1|}{\sum\limits_{l=1}^{H}|Q_{lij}-1|}\right)}$.

### 2.2 属性权重的计算方法

计算属性权重的步骤为:

步骤1 对评分表$[q_{lij}]_{HMN}$进行加权,得加权评分表$[\omega_{P_l}q_{lij}]_{HMN}$,然后根据定义6确定属性的理想属性值$\bar{q}_{lij}$;

步骤2 利用定义7规范化加权评价表$[\omega_{P_l}q_{lij}]_{HMN}$;

步骤3 根据定义8,将第$i$个方案在第$j$个属性的有效评价值用$\tilde{q}_{ij}$表示,并建立有效值评价矩阵$[\tilde{q}_{ij}]_{M\times N}$,以此确定属性的有效值的理想属性值$\tilde{q}_{j}$;

步骤4 根据定义4和$\tilde{q}_{j}$将有效值评价矩阵$[\tilde{q}_{ij}]_{M\times N}$转化为相离度矩阵$[d_{ij}]_{M\times N}$;

步骤5 采用文献[13]中的规范化方法,将相离度矩阵$[d_{ij}]_{M\times N}$规范化为$[u_{ij}]_{M\times N}$,显然有

$$\sum_{i=1}^{M}u_{ij}=1,\ j=1,2,\cdots,N;$$

步骤6 求属性$G_j$上的熵值$S_j$($S_j=-\dfrac{1}{\ln M}\sum\limits_{i=1}^{M}u_{ij}\ln u_{ij}$, $j=1,2,\cdots,N$),并规定$u_{ij}=0$,

$u_{ij}\ln u_{ij}=0$；

步骤 7　计算属性 $G_j$ 的权重 $\omega_{G_j}$，$\omega_{G_j}=\dfrac{1-S_j}{\sum\limits_{j=1}^{N}(1-S_j)}$，$j=1,2,\cdots,N$.

## 3　决策方法

步骤 1　建立第 $i$ 个方案在第 $j$ 个属性的有效评价值矩阵 $[\tilde{q}_{ij}]_{M\times N}=[[\tilde{q}_{ij}^-,\tilde{q}_{ij}^+]]_{M\times N}$.

步骤 2　结合属性权重 $\omega_{G_j}$ 对有效值评价矩阵进行指数加权，由此得到方案的综合有效评价值矩阵为：$[\omega_{G_j}\tilde{q}_{ij}]_{M\times N}=[B_{ij}]_{M\times N}=[[B_{ij}^-,B_{ij}^+]]_{M\times N}$；

$$\omega_{G_j}\tilde{q}_{ij}=B_{ij}=[B_{ij}^-,B_{ij}^+]=[[\tilde{q}_{ij}^-]^{\omega_{G_j}},[\tilde{q}_{ij}^+]^{\omega_{G_j}}],\ j\in I_1;$$

$$\omega_{G_j}\tilde{q}_{ij}=B_{ij}=[B_{ij}^-,B_{ij}^+]=[[\tilde{q}_{ij}^-]^{\omega_{G_j}},[\tilde{q}_{ij}^+]^{\omega_{G_j}}],\ j\in I_2.$$

其中：

$$B_{ij}^-=\begin{cases}[\tilde{q}_{ij}^-]^{\omega_{G_j}}=\left[\min\limits_i\left(\dfrac{\min\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^-}{\omega_{P_l}q_{lij}^+}\right)\right]^{\omega_{G_j}},\ j\in I_1;\\[2ex] [\tilde{q}_{ij}^-]^{\omega_{G_j}}=\left[\min\limits_i\left(\dfrac{\omega_{P_l}q_{lij}^-}{\max\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^+}\right)\right]^{\omega_{G_j}},\ j\in I_2.\end{cases}$$

$$B_{ij}^+=\begin{cases}[\tilde{q}_{ij}^+]^{\omega_{G_j}}=\left[\max\limits_i\left(\dfrac{\max\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^+}{\omega_{P_l}q_{lij}^-}\right)\right]^{\omega_{G_j}},\ j\in I_1;\\[2ex] [\tilde{q}_{ij}^+]^{\omega_{G_j}}=\left[\max\limits_i\left(\dfrac{\omega_{P_l}q_{lij}^+}{\max\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^-}\right)\right]^{\omega_{G_j}},\ j\in I_2.\end{cases}$$

在区间数的运算法则中 $[\tilde{q}_{ij}^-,\tilde{q}_{ij}^+]^{\omega_{G_j}}\neq[[\tilde{q}_{ij}^-]^{\omega_{G_j}},[\tilde{q}_{ij}^+]^{\omega_{G_j}}]$，但在本文中由上述 $\tilde{q}_{ij}^-$ 和 $\tilde{q}_{ij}^+$ 的得出过程可知步骤 2 的计算是合理的，即可以对区间数进行指数加权.

步骤 3　确定属性的正负有效综合理想属性值，如下：

$$\tilde{B}_{ij}^+(j)=[\min_i[\tilde{q}_{ij}^-]^{\omega_{G_j}},\min_i[\tilde{q}_{ij}^+]^{\omega_{G_j}}]=$$

$$\left[\min_i\left[\min_j\left(\frac{\min\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^-}{\omega_{P_l}q_{lij}^+}\right)\right]^{\omega_{G_j}},\min_i\left[\max_j\left(\frac{\max\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^+}{\omega_{P_l}q_{lij}^-}\right)\right]^{\omega_{G_j}}\right],\ i\in\{1,2,\cdots,M\},\ j\in I_1;$$

$$\tilde{B}_{ij}^-(j)=[\max_i[\tilde{q}_{ij}^-]^{\omega_{G_j}},\max_i[\tilde{q}_{ij}^+]^{\omega_{G_j}}]=$$

$$\left[\max_i\left[\min_j\left(\frac{\min\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^-}{\omega_{P_l}q_{lij}^+}\right)\right]^{\omega_{G_j}},\max_i\left[\max_j\left(\frac{\max\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^+}{\omega_{P_l}q_{lij}^-}\right)\right]^{\omega_{G_j}}\right],\ i\in\{1,2,\cdots,M\},\ j\in I_1;$$

$$\tilde{B}_{ij}^+(j)=[\max_i[\tilde{q}_{ij}^-]^{\omega_{G_j}},\max_i[\tilde{q}_{ij}^+]^{\omega_{G_j}}]=$$

$$\left[\max_i\left[\min_j\left(\frac{\omega_{P_l}q_{lij}^-}{\max\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^+}\right)\right]^{\omega_{G_j}},\max_i\left[\max_j\left(\frac{\omega_{P_l}q_{lij}^+}{\max\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^-}\right)\right]^{\omega_{G_j}}\right],\ i\in\{1,2,\cdots,M\},\ j\in I_2;$$

$$\tilde{B}_{ij}^-(j)=[\min_i[\tilde{q}_{ij}^-]^{\omega_{G_j}},\min_i[\tilde{q}_{ij}^+]^{\omega_{G_j}}]=$$

$$\left[\min_i\left[\min_j\left(\frac{\omega_{P_l}q_{lij}^-}{\max\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^+}\right)\right]^{\omega_{G_j}},\min_i\left[\max_j\left(\frac{\omega_{P_l}q_{lij}^+}{\max\limits_j \omega_{P_l}q_{lij}^-}\right)\right]^{\omega_{G_j}}\right],\ i\in\{1,2,\cdots,M\},\ j\in I_2.$$

步骤4 根据定义3,将每个方案的成本型或效益型的综合有效评价值与正负有效综合理想属性值进行测度,以此求出每个方案的有效综合属性的测度结果 $T(A_i)$:

$$T(A_i)=T(A_i(J_1))+T(A_i(J_2)),\ i\in\{1,2,\cdots,M\}. \tag{1}$$

其中 $T(A_i(J_1))=\sum_{j=1}^{|J_1|}[T(\widetilde{B}_{ij}^{+}(j)\times B_{ij})+T(\widetilde{B}_{ij}^{-}(j)\times B_{ij})]$, $T(A_i(J_2))=\sum_{j=1}^{|J_2|}[T(B_{ij}\times\widetilde{B}_{ij}^{+}(j))+T(B_{ij}\times\widetilde{B}_{ij}^{-}(j))]$,符号 $\sum_{j=1}^{|J_1|}$ 和 $\sum_{j=1}^{|J_2|}$ 表示 $j$ 在相应属性类别中的取值.

步骤5 根据 $T(A_i)$ 的大小对方案 $A_i$ 排序.由 $T(A_i(J_1))$ 的计算公式可知,在成本型属性上对 $T(\widetilde{B}_{ij}^{+}(j)\times B_{ij})$ 和 $T(\widetilde{B}_{ij}^{-}(j)\times B_{ij})$ 进行测度时,其值越大说明方案 $A_i$ 在成本型属性上的综合有效评价值 $B_{ij}$ 与有效正理想属性值 $\widetilde{B}_{ij}^{+}(j)$ 越贴近,即表明方案 $A_i$ 在成本型属性上的表现越优.由于 $T(A_i(J_2))$ 在效益型属性类型上的计算结果所表达的含义与 $T(A_i(J_1))$ 在成本型属性类型上的计算结果所表达的含义类似,故可以直接用 $T(A_i)=T(A_i(J_1))+T(A_i(J_2))$ 表示各方案的有效综合属性的测度结果,并以此进行排序.

## 4 数值算例

某企业为了开展校企合作项目,聘请了4位投资专家从投资金额($G_1$)、可能利润($G_2$)、风险盈利值($G_3$)、可能损失值($G_4$)等4个维度对5所学校的投资环境进行综合评估.评估结果以区间数据信息形式给出,其中 $G_1$ 和 $G_4$ 为成本型属性,$G_2$ 和 $G_3$ 为效益型属性.专家评分表见表1(单位为百万元).

**表1 专家评分表**

| 备选学校 | 投资专家 | 评估维度 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ | $G_4$ |
| $A_1$ | $P_1$ | [6,8] | [2,3] | [3,5] | [1,2] |
| | $P_2$ | [7,9] | [1,3] | [3,4] | [0.8,2] |
| | $P_3$ | [7,8] | [2,4] | [4,5] | [1,2.5] |
| | $P_4$ | [8,9] | [3,5] | [4,6] | [1.8,2.8] |
| $A_2$ | $P_1$ | [11,13] | [2.8,4] | [3,5] | [1.5,2.5] |
| | $P_2$ | [10,14] | [3,5] | [4,5] | [1.2,2] |
| | $P_3$ | [12,15] | [4,5] | [2,3] | [1.5,2.2] |
| | $P_4$ | [13,15] | [4.5,5.5] | [3,4] | [1.8,2.8] |
| $A_3$ | $P_1$ | [8,10] | [2.3,3.4] | [2.5,3.9] | [1.2,1.9] |
| | $P_2$ | [8.5,11] | [1.8,2.7] | [2.5,3.5] | [1.4,2.1] |
| | $P_3$ | [9,11.5] | [2.3,3.2] | [2.8,3.8] | [1.5,2.1] |
| | $P_4$ | [8,9.5] | [2.2,2.8] | [3.2,3.7] | [1.8,2.8] |
| $A_4$ | $P_1$ | [4,6] | [1.5,2.8] | [1.1,1.6] | [1.3,2.1] |
| | $P_2$ | [2,4] | [1.2,2.3] | [0.9,1.6] | [0.8,1.5] |
| | $P_3$ | [2.8,3.8] | [0.8,1.9] | [1.2,1.9] | [1.2,1.4] |
| | $P_4$ | [3.5,4.6] | [1.2,2.5] | [1.4,1.9] | [1.1,1.8] |
| $A_5$ | $P_1$ | [5.8,7.2] | [2.4,3.6] | [2.3,3.3] | [2.6,3.1] |
| | $P_2$ | [6,7.5] | [2.8,3.9] | [2.2,2.9] | [2.8,3.2] |
| | $P_3$ | [5.5,7.8] | [2.1,3.2] | [1.8,2.7] | [2.5,2.9] |
| | $P_4$ | [7.1,8.3] | [3.5,3.9] | [2.6,3.2] | [2.4,2.8] |

### 4.1 计算投资专家权重

1)由表1可知,投资专家组对第 $i$ 个方案的第 $j$ 个属性进行评分所得的平均值 $\bar{q}_{ij}$ $(i\in\{1,2,3,4,5\}$,

$j\in\{1,2,3,4\}$）分别为：$\bar{q}_{11}=[7,8.5]$，$\bar{q}_{12}=[2,3.75]$，$\bar{q}_{13}=[3.5,5]$，$\bar{q}_{14}=[1.15,2.325]$；$\bar{q}_{21}=[11.5,14.25]$，$\bar{q}_{22}=[3.575,4.875]$，$\bar{q}_{23}=[3,4.25]$，$\bar{q}_{24}=[1.5,2.375]$；$\bar{q}_{31}=[8.375,10.5]$，$\bar{q}_{32}=[2.15,3.025]$，$\bar{q}_{33}=[2.75,3.725]$，$\bar{q}_{34}=[1.475,2.225]$；$\bar{q}_{41}=[3.075,4.6]$，$\bar{q}_{42}=[1.175,2.375]$，$\bar{q}_{43}=[1.15,1.75]$，$\bar{q}_{44}=[1.1,1.7]$；$\bar{q}_{51}=[6.1,7.7]$，$\bar{q}_{52}=[2.575,3.65]$，$\bar{q}_{53}=[2.225,3.025]$，$\bar{q}_{54}=[2.575,3]$.

2）测度 $T(q_{lij}\times\bar{q}_{ij})=Q_{lij}(l\in\{1,2,3,4\},i\in\{1,2,3,4,5\},j\in\{1,2,3,4\})$，并绘制测度表(见表 2).

**表 2　测度表**

| $Q_{li1}$ | $Q_{li2}$ | $Q_{li3}$ | $Q_{li4}$ | $Q_{li1}$ | $Q_{li2}$ | $Q_{li3}$ | $Q_{li4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.7287 | 0.6957 | 0.8067 | 0.6458 | 1.2783 | 1.2027 | 1.0587 | 0.9339 |
| 1.0930 | 0.2783 | 0.5647 | 0.4822 | 0.8013 | 0.9151 | 1.2317 | 1.9093 |
| 0.9108 | 1.1130 | 1.2101 | 0.9417 | 2.2107 | 1.8230 | 0.8146 | 1.7727 |
| 1.3272 | 2.7826 | 1.6134 | 2.4952 | 0.4421 | 0.9751 | 0.6168 | 0.5271 |
| 0.8133 | 0.5172 | 1.2982 | 1.0866 | 0.6469 | 0.4143 | 1.2110 | 0.8342 |
| 0.7962 | 0.8148 | 1.9473 | 0.5563 | 1.2012 | 1.1205 | 1.5040 | 1.0966 |
| 1.1517 | 1.2223 | 0.3245 | 0.8845 | 0.8375 | 0.8860 | 1.2029 | 1.0668 |
| 1.2939 | 1.6806 | 0.9087 | 1.6794 | 0.9372 | 1.2505 | 0.9208 | 1.2483 |
| 0.8676 | 1.3244 | 0.9408 | 0.5821 | 0.8803 | 0.6087 | 0.6189 | 0.9091 |
| 1.0985 | 0.6498 | 0.7915 | 0.8474 | 1.4000 | 1.7265 | 1.3656 | 0.8114 |

3）根据表 2 计算 $\omega_{P_l}^{ij}$ 和 $\omega_{P_l}^{j}(l\in\{1,2,3,4\},i\in\{1,2,3,4,5\},j\in\{1,2,3,4\})$. 根据 $\omega_{P_l}^{ij}$ 和 $\omega_{P_l}^{j}$ 的计算结果及 2.1 中定义的 $\omega_{P_l}(l\in\{1,2,3,4\})$ 的计算方法，可得各投资专家的权重分别为：$\omega_{P_1}=0.2534$，$\omega_{P_2}=0.2563$，$\omega_{P_3}=0.2720$，$\omega_{P_4}=0.2183$.

### 4.2　确定属性权重

第 1 步　首先对评分表 $[q_{lij}]_{HMN}$ 进行加权，然后根据定义 6 计算属性的理想属性值 $\bar{q}_{lij}$，得 $\bar{q}_{li1}=[0.5126,1.0042]$，$\bar{q}_{li2}=[1.0880,1.3600]$，$\bar{q}_{li3}=[1.0880,1.3600]$，$\bar{q}_{li4}=[0.2050,0.3808]$.

第 2 步　利用定义 7 规范化加权评分表 $[q_{lij}]_{HMN}$，以此建立各方案的有效值评价矩阵 $[\tilde{\bar{q}}_{ij}]_{5\times4}$ 和确定属性的有效值理想属性值 $\tilde{q}_j(j=1,2,3,4)$：

$$[\tilde{\bar{q}}_{ij}]_{5\times4}=\begin{bmatrix}[0.2222,0.6605] & [0.1885,1.0032] & [0.5590,1.2500] & [0.3015,1.8576]\\ [0.1256,0.3918] & [0.5217,1.2500] & [0.4000,1.1778] & [0.3236,1.2380]\\ [0.1639,0.5750] & [0.3392,0.8000] & [0.4658,0.9500] & [0.3354,1.2522]\\ [0.3371,1.9590] & [0.1600,0.6521] & [0.1696,0.4750] & [0.3853,1.8576]\\ [0.2829,0.6833] & [0.4200,0.9188] & [0.3600,0.7686] & [0.2499,0.7269]\end{bmatrix},$$

$\tilde{q}_1=[0.1256,0.3918]$，$\tilde{q}_2=[0.5217,1.2500]$，$\tilde{q}_3=[0.5590,1.2500]$，$\tilde{q}_4=[0.2499,0.7269]$.

第 3 步　将有效值评价矩阵 $[\tilde{\bar{q}}_{ij}]_{5\times4}$ 转化为相离度矩阵 $[d_{ij}]_{5\times4}$ 和规范化矩阵 $[u_{ij}]_{5\times4}$ 得：

$$[d_{ij}]_{5\times4}=\begin{bmatrix}0.2855 & 0.3941 & 0.0000 & 1.1319\\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1746 & 0.5164\\ 0.1872 & 0.4856 & 0.1832 & 0.5322\\ 1.5814 & 0.6988 & 0.8673 & 1.1388\\ 0.3312 & 0.2114 & 0.5209 & 0.0000\end{bmatrix},\ [u_{ij}]_{5\times4}=\begin{bmatrix}0.1197 & 0.2202 & 0.0000 & 0.3410\\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1000 & 0.1556\\ 0.0785 & 0.2713 & 0.1049 & 0.1603\\ 0.6630 & 0.3904 & 0.4967 & 0.3431\\ 0.1389 & 0.1181 & 0.2983 & 0.0000\end{bmatrix}.$$

第 4 步　求解熵值 $S_j$ 及属性权重 $\omega_{G_j}$. 经计算，熵值 $S_j$ 和权重 $\omega_{G_j}$ 分别为：$S_1=0.6217$，$S_2=0.8110$，$S_3=0.7302$，$S_4=0.8182$，$\omega_{G_1}=0.3713$，$\omega_{G_2}=0.1855$，$\omega_{G_3}=0.2648$，$\omega_{G_4}=0.1784$.

### 4.3 决策方法

**4.3.1** 对有效值决策矩阵 $[\tilde{q}_{ij}]_{5\times 4}=[[\tilde{q}_{ij}^{-},\tilde{q}_{ij}^{+}]]_{5\times 4}$ 进行加权,以此得到综合有效评价值矩阵 $[B_{ij}]_{5\times 4}$,然后再根据该矩阵计算属性的正负有效综合理想属性值 $\tilde{B}_{ij}^{+}(j)$ 和 $\tilde{B}_{ij}^{-}(j)$:

$$[B_{ij}]_{5\times 4}=\begin{bmatrix} [0.5721,0.8573] & [0.7339,1.0006] & [0.8573,1.0609] & [0.8074,1.1168] \\ [0.4629,0.7062] & [0.8863,1.0422] & [0.7846,1.0443] & [0.8177,1.0388] \\ [0.5109,0.8143] & [0.8183,0.9595] & [0.8168,0.9865] & [0.8229,1.0409] \\ [0.6678,1.2836] & [0.7118,0.9238] & [0.6251,0.8211] & [0.8435,1.1168] \\ [0.6257,0.8681] & [0.8514,0.9844] & [0.7630,0.9327] & [0.7808,0.9447] \end{bmatrix},$$

$\tilde{B}_{i1}^{+}(1)=[0.4629,0.7062]$, $\tilde{B}_{i1}^{-}(1)=[0.6678,1.2836]$, $\tilde{B}_{i2}^{+}(2)=[0.8836,1.0422]$,

$\tilde{B}_{i2}^{-}(2)=[0.7118,0.9238]$, $\tilde{B}_{i3}^{+}(3)=[0.8573,1.0609]$, $\tilde{B}_{i3}^{-}(3)=[0.6251,0.8211]$,

$\tilde{B}_{i4}^{+}(4)=[0.7808,0.9447]$, $\tilde{B}_{i4}^{-}(4)=[0.8435,1.1168]$.

根据式(1)计算所得的各方案的有效综合属性测度结果 $T(A_i)(i=1,2,3,4,5)$ 见表 3. 由表 3 可得 $T(A_1)=9.9818$, $T(A_2)=12.893$, $T(A_3)=10.5568$, $T(A_4)=5.9498$, $T(A_5)=9.5988$,由此知各学校综合投资环境的排序为 $A_2\succ A_3\succ A_1\succ A_5\succ A_4$.

**表 3 各方案的有效综合属性测度结果**

| $A_i$ | $G_1$ $(T(\tilde{B}_{i1}^{+}(1)\times B_{i1})$, $T(\tilde{B}_{i1}^{-}(1)\times B_{i1}))$ | $G_2$ $(T(B_{i2}\times\tilde{B}_{i2}^{+}(2))$, $T(B_{i2}\times\tilde{B}_{i2}^{-}(2)))$ | $G_3$ $(T(B_{i3}\times\tilde{B}_{i3}^{+}(3))$, $T(B_{i3}\times\tilde{B}_{i3}^{-}(3)))$ | $G_4$ $(T(\tilde{B}_{i4}^{+}(4)\times B_{i4})$, $T(\tilde{B}_{i4}^{-}(4)\times B_{i4}))$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | (0.5451,2.3858) | (0.7182,1.1843) | (1.0000,2.3503) | (0.7336,1.0643) |
| $A_2$ | (1.0000,4.3765) | (1.0045,1.6563) | (0.8589,2.0187) | (0.8071,1.1710) |
| $A_3$ | (0.6933,3.0341) | (0.7871,1.2979) | (0.8329,1.9576) | (0.7972,1.1567) |
| $A_4$ | (0.2285,1.0000) | (0.6065,1.0000) | (0.4255,1.0000) | (0.6893,1.0000) |
| $A_5$ | (0.4710,2.0615) | (0.8676,1.4306) | (0.6917,1.6256) | (1.0000,1.4508) |

**4.3.2** 为了检验本文决策方法的有效性,采用文献[12]中的决策方法与本文的决策方法进行对比. 根据定义 5,文献[12]中的决策方法的步骤为:

步骤 1 构建决策矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}=(\tilde{a}_{ij})_{M\times N}$,其中 $\tilde{a}_{ij}=[\tilde{a}_{ij}^{-},\tilde{a}_{ij}^{+}]$, $\tilde{a}_{ij}^{-}=\sum_{l=1}^{H}q_{lij}^{-}/H$, $\tilde{a}_{ij}^{+}=\sum_{l=1}^{H}q_{lij}^{+}/H$.

步骤 2 将 $\tilde{\boldsymbol{A}}=(\tilde{a}_{ij})_{M\times N}$ 决策矩阵进行规范化处理,得规范化矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}=(\tilde{r}_{ij})_{M\times N}=([\tilde{r}_{ij}^{-},\tilde{r}_{ij}^{+}])_{M\times N}$. 规范化公式为:① $\tilde{r}_{ij}^{-}=(1/\tilde{a}_{ij}^{+})/\sqrt{\sum_{i=1}^{M}(1/\tilde{a}_{ij}^{-})^2}$, $\tilde{r}_{ij}^{+}=(1/\tilde{a}_{ij}^{-})/\sqrt{\sum_{i=1}^{M}(1/\tilde{a}_{ij}^{+})^2}$, $i\in I_1$, $i=1,2,\cdots,M$. ② $\tilde{r}_{ij}^{-}=\tilde{a}_{ij}^{-}/\sqrt{\sum_{i=1}^{M}(\tilde{a}_{ij}^{+})^2}$, $\tilde{r}_{ij}^{+}=\tilde{a}_{ij}^{+}/\sqrt{\sum_{i=1}^{M}(\tilde{a}_{ij}^{+})^2}$, $i\in I_2$, $i=1,2,\cdots,M$.

步骤 3 利用公式 $\tilde{Z}_i=\sum_{i=1}^{M}\tilde{r}_{ij}\omega_i$ 计算各方案的综合属性值 $\tilde{Z}_i$, $i=1,2,\cdots,M$.

步骤 4 根据两个区间数比较的可能度公式,计算各个方案属性值之间的可能度 $P_{ii'}$,并由此建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ $(\boldsymbol{P}=(P_{ii'})_{M\times M})$, $i,i'=j=1,2,\cdots,M$. 对于区间数 $a=[a^{-},a^{+}]$ 和 $b=[b^{-},b^{+}]$, $a\geqslant b$ 的可能度 $P=\dfrac{\max\{0,L(\tilde{a})+L(\tilde{b})-\max(b^{+}-a^{-},0)\}}{L(\tilde{a})+L(\tilde{b})}$,其中 $L(\tilde{a})=a^{+}-a^{-}$, $L(\tilde{b})=b^{+}-b^{-}$[14].

步骤 5 利用公式 $\omega_i=\left(\sum_{j=1}^{N}P_{ij}+\dfrac{N}{2}-1\right)/[N(N-1)]$ 计算各决策方案的可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\omega}$ $(\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_M)^{\mathrm{T}})$,并按照分量值大小对方案进行排序.

采用文献[12]中的决策方法进行计算时，专家权重和属性权重采用本文给出的数据：$\omega_{P_1}=0.2534$，$\omega_{P_2}=0.2563$，$\omega_{P_3}=0.2720$，$\omega_{P_4}=0.2183$，$\omega_{G_1}=0.3713$，$\omega_{G_2}=0.1855$，$\omega_{G_3}=0.2648$，$\omega_{G_4}=0.1784$. 计算时首先处理决策专家给予的评分表，以此得到决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\widetilde{a}_{ij})_{5\times4}$ 和规范化矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(\widetilde{r}_{ij})_{5\times4}$，以及各方案的综合属性值：$\widetilde{Z}_1=[0.2858,0.5791]$，$\widetilde{Z}_2=[0.3210,0.7172]$，$\widetilde{Z}_3=[0.3088,0.6788]$，$\widetilde{Z}_4=[0.2844,0.5047]$，$\widetilde{Z}_5=[0.2706,0.5347]$. 其次，建立比较区间数的两两可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$，并求解排序向量 $\boldsymbol{\omega}$.

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3743 & 0.4075 & 0.5738 & 0.5535 \\ 0.6257 & 0.5 & 0.5330 & 0.6822 & 0.6764 \\ 0.5925 & 0.4670 & 0.5 & 0.6681 & 0.6437 \\ 0.4262 & 0.3178 & 0.3319 & 0.5 & 0.4833 \\ 0.4465 & 0.3236 & 0.3563 & 0.5167 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

根据公式 $\omega_i=\left(\sum_{j=1}^{N}P_{ij}+\frac{N}{2}-1\right)/[N(N-1)]$，可得排序向量 $\boldsymbol{\omega}=(0.2841,0.3348,0.3226,0.2549,0.2619)^{\mathrm{T}}$. 由此可得上述决策方法所得的排序结果为 $A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_4$，该结果与本文方法的排序结果一致.

## 5　结束语

本文建立了一种求解评价专家权重和属性权重的简洁模型，并利用区间数的积型贴近度公式提出了一种区间数的多属性群决策方法. 实例验证表明，本文提出的区间数多属性群决策方法能够充分利用评价专家给出的决策信息，具有简单、直观、便于计算等优点. 由于本文研究的只是属性信息为区间数的情形，因此在实际决策问题中，决策者可根据不同类型和属性的信息进行多元化的分析，以此建立更加科学、合理的多属性群决策方法.

## 参考文献：

[1]　吕金辉. 基于因素空间的不确定性群决策研究[D]. 阜新：辽宁工程技术大学，2019.

[2]　尚战伟，郭永辉，邹俊国，等. 属性和专家客观权重未知的区间数群决策方法[J]. 计算机工程与应用，2017，53(15)：227-232.

[3]　毛军军，王翠翠，姚登宝. 基于多专家区间数的多属性群决策方法[J]. 计算机应用，2012，32(3)：649-653.

[4]　陈顺怀，冯恩德，王呈方. 闭区间数多属性决策方法[J]. 武汉交通科技大学学报，1999，23(3)：267-269.

[5]　达庆利，徐泽水. 不确定多属性决策的单目标最优化模型[J]. 系统工程学报，2002(1)：50-55.

[6]　徐泽水，岳振军. 模糊综合评价的两种新算法[J]. 解放军理工大学学报(自然科学版)，2001(4)：5-8.

[7]　朱国成，庄乐. 构建区间数排序准则下的多属性群决策理论与实践[J]. 东莞理工学院学报，2021，28(1)：24-30.

[8]　朱国成，庄乐. 基于构建区间数排序准则的多属性群决策方法[J]. 广东石油化工学院学报，2020，30(4)：64-69.

[9]　朱国成，赵殿品，张世英. 基于确定评价专家权重方案的模糊多属性群决策方法[J]. 广东技术师范大学学报，2020，41(3)：56-66.

[10]　徐泽水，林钧昌. AHP 中区间判断矩阵排序的区间数广义 $x^2$ 法[J]. 运筹与管理，1997，6(4)：1-5.

[11]　XU R N，ZHAI X Y. Extensions of the analytic hierarchy process in fuzzy environment[J]. Fuzzy Sets and Systems，1992，52(3)：251-257.

[12]　徐泽水，孙在东. 一类不确定型多属性决策问题的排序方法[J]. 管理科学学报，2002，5(3)：35-39.

[13]　朱国成，庄乐，陈粟宋. 解决多属性群决策问题的一种线性规划法[J]. 顺德职业技术学院学报，2021，19(1)：23-29.

[14]　达庆利，刘新旺. 区间数线性规划及其满意解[J]. 系统工程理论与实践，1999，19(4)：3-7.