

文章编号: 1004-4353(2021)02-0136-05

基于 Chua 电路的一种新型忆阻电路的 混沌动力学分析

李浩申, 姜锐函, 徐红梅*

(延边大学 工学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 基于 Chua 混沌电路和三次光滑忆阻器模型,提出了一种新型忆阻混沌电路.该电路由 2 个电感、2 个电容、1 个忆阻器和 1 个电阻组成.利用分岔图、Lyapunov 指数、相图、Poincaré 截面图和 Simulink 仿真对电路进行分析表明,该电路具有混沌特性.该研究结果可为混沌动力学的研究和混沌保密通信的应用提供理论参考.

关键词: Chua 电路; 光滑忆阻器; 混沌特性; Simulink 仿真

中图分类号: TM132

文献标识码: A

Chaotic dynamics analysis of a new memristive circuit based on Chua circuit

LI Haoshen, JIANG Ruihan, XU Hongmei*

(College of Engineering, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: Based on the Chua chaotic circuit and the cubic smooth memristor model, a new type of memristive chaotic circuit is proposed, which consists of two inductors, two capacitors, one memristor and one resistance. Analysis of the circuit using bifurcation diagram, Lyapunov exponent, phase diagram, Poincaré cross-section diagram and Simulink simulation shows that the circuit has chaotic characteristics. The research results can provide a theoretical reference for the study of chaotic dynamics and the application of chaotic secure communication.

Keywords: Chua circuit; smooth memristor; chaotic characteristics; Simulink simulation

忆阻器是一种表示磁通与电荷关系的电路器件.由于忆阻器具有记忆功能,且体积小、功耗低^[1-3],因此其在保密通信、非易失性存储器、电路设计和人工神经网络等领域得到了广泛应用^[4-7].近年来,一些学者将忆阻器应用到混沌电路设计中.例如:吴淑花等利用两个荷控忆阻器模型设计了一个最简五阶混沌电路,并利用常规动力学分析方法研究了该电路的基本动力学特性^[8].王振等提出了一种基于双忆阻器的文氏桥混沌电路,研究显示该电路的稳定性与非零特征根和零特征

根密切相关^[9].陈菊芳等利用 RC 单 T 选频网络设计了一种并联型忆阻混沌电路和一种串联型忆阻混沌电路,并分析了其动力学行为^[10].基于上述研究,本文构建了一种新型磁控五阶忆阻混沌电路,并通过理论推导、数值仿真、Lyapunov 指数谱、分岔图、相图和 Poincaré 截面图等分析了该电路的动力学特性.

1 磁控忆阻器五阶混沌电路的设计

本文基于经典的 Chua 电路,用三次型非线性

收稿日期: 2021-03-14

* 通信作者: 徐红梅(1975—),女,博士,副教授,研究方向为混沌动力学.

基金项目: 吉林省教育厅科学技术研究项目(JJKH20210589KJ);吉林省高等教育学会科研项目(JGJX2020D48)

性磁控忆阻器代替 Chua 电路中的 Chua 二极管,用电感代替 Chua 电路中的电阻,并将 Chua 电路中的电感串联成一个电阻.由此得到的五阶磁控忆阻器的电路如图 1 所示.图 1 中各元件对应的 5 个状态变量分别为 i_1 、 i_2 、 v_1 、 v_2 、 $W(\varphi)$.

选取三次非线性磁控忆阻模型作为一个二端口元件,磁控忆阻模型用方程可表示为 $q(\varphi) = \alpha\varphi + \beta\varphi^3$,端口伏安特性(电压与电流的关系)的表达式为 $U = \frac{i}{W(\varphi)}$,其中 $W(\varphi)$ 为忆导, φ 为忆阻器内部状态变量.磁控忆导模型的表达式为:

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} = \alpha + 3\beta\varphi^2, \quad (1)$$

其中 α 和 β 为常量.

根据基尔霍夫电压定律(KVL)和基尔霍夫电流定律(KCL)以及各元件的伏安特性关系,可得到如下五阶忆阻混沌电路的状态方程:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{C_1}(i_1 - W(\varphi)v_1), \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{C_2}(-i_2 - i_1), \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_1}(v_2 - v_1), \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L_2}(-v_2 - R_1 i_1), \\ \frac{d\varphi}{dt} = v_1. \end{cases} \quad (2)$$

其中 $W(\varphi) = \alpha + 3\beta\varphi^2$.令 $x = v_1$, $y = v_2$, $z = i_1$, $u = i_2$, $v = \varphi$,并设无量纲参数 $a = \frac{1}{C_1}$, $b = \frac{1}{C_2}$, $c = \frac{1}{L_1}$, $d = \frac{1}{L_2}$, $e = \frac{R_1}{L_2}$,则系统(2)的无量纲动力学方程可简化为:

$$\begin{cases} \dot{x} = az - aW(\varphi)x, \\ \dot{y} = -bu - bz, \\ \dot{z} = cy - cx, \\ \dot{u} = -dy - eu, \\ \dot{v} = x. \end{cases} \quad (3)$$

为了验证系统的动力学特征,本文根据系统的耗散性,采用五阶龙格-库塔离散化算法,电路参数取 $a = 13$, $b = 12$, $c = 9$, $d = 11$, $e = 14$, $\alpha = -0.7$, $\beta = 0.3$,对初始条件为 $(0.01, 0, 0, 0, 0)$ 的

系统(3)进行了仿真,仿真得到的系统的二维相轨迹和三维相轨迹如图 2 和图 3 所示.由图 2 和图 3 可以看出,各平面相轨图上的混沌吸引子均具有复杂的拉伸和扭曲结构,这表明在上述参数下电路系统处于混沌状态.

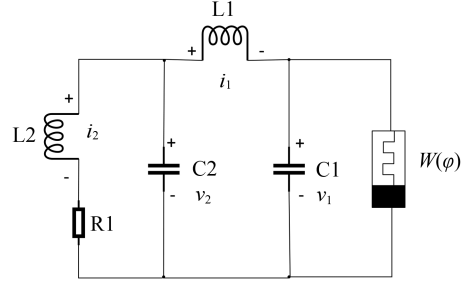


图1 五阶磁控忆阻器的电路图

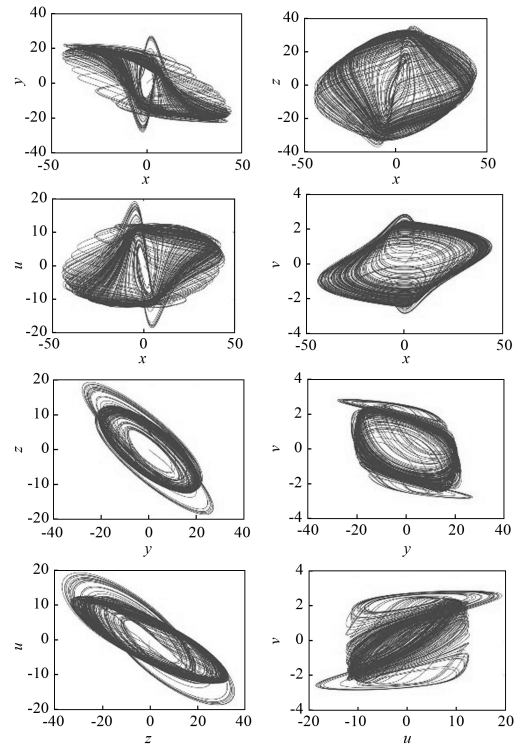


图2 二维相轨迹图

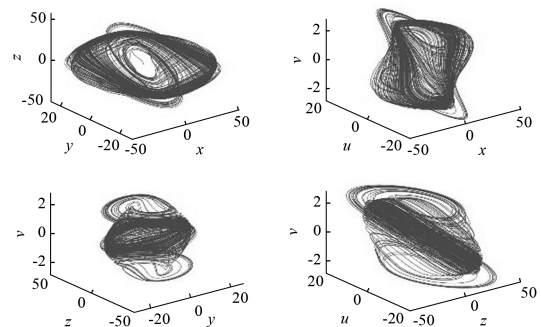


图3 三维相轨迹图

图 4 为不同截面上的庞加莱截面图. 由图 4 可以看到: 在 $x=0$ 截面上, 四维 Poincaré 映射轨线投影在 $y-z$ 平面上; 在 $u=0$ 截面上, 四维 Poincaré 映射轨线投影在 $x-y$ 平面上. 图 5 为 5 个状态变量的时域波形图. 由图 5 可知, 5 个时域波形图都是非周期性的.

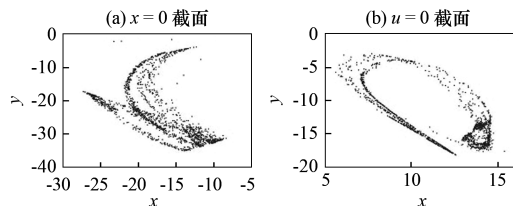


图 4 不同截面上的庞加莱截面图

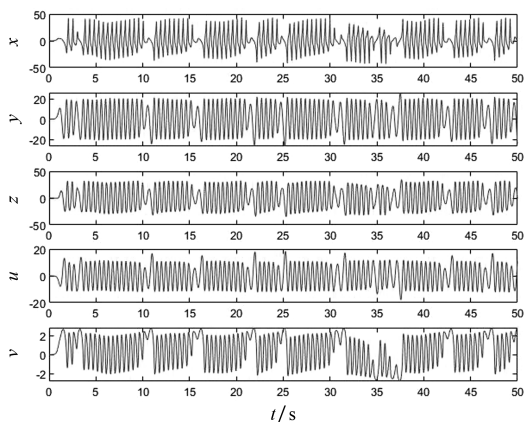


图 5 5 个状态变量的时域波形图

利用 Matlab 计算系统的 5 个 Lyapunov 指数, 得 $L_1 = 5.244$, $L_2 = 3.164$, $L_3 = 0$, $L_4 = -16.072$, $L_5 = -20.735$. 利用公式(4) 计算系统(3) 的 Lyapunov 维数, 得 $d_L = 3.63$.

$$d_L = j + \frac{1}{|L_{j+1}|} \sum_{i=1}^j L_i. \quad (4)$$

由上述五阶磁控忆阻电路的相轨图、Poincaré 映射、时域波形图以及 Lyapunov 指数和维数可知, 该电路系统具有混沌特征^[11-14].

2 系统的动力学分析

2.1 系统的耗散性分析

系统(3) 的耗散性可由如下公式表示:

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} = a\alpha - c. \quad (5)$$

当参数 $a = 14$, $\alpha = -0.7$, $c = 9$ 时, 公式(5) 满足条件 $a\alpha - c < 0$. 这说明当时间趋近于无穷时, 系

统(3) 的运动轨线总是分布在一个特定的区域内, 且具有耗散性.

2.2 系统的平衡点及其稳定性分析

令 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{u} = \dot{v} = 0$, 由此可得系统(3) 所描述的平衡点集合 A 为: $A = \{(x, y, z, u, v) \mid x = y = z = u = 0, v = n\}$. 集合 A 表明, v 轴上的点集均是平衡点(n 为实常数). 在平衡点附近对系统(3) 进行线性化处理可得到系统(3) 的 Jacobi 矩阵:

$$J = \begin{bmatrix} -aw(n) & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & -b & 0 \\ -c & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & -e & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

为得到 J 在平衡点处的特征方程, 令 $|\lambda E - J| = 0$, 则集合 A 的特征方程为:

$$\lambda^5 + [aw(n) + e]\lambda^4 + aew(n)\lambda^3 = 0, \quad (7)$$

式中 $w(n) = \alpha + 3\beta n^2$.

当参数取 $a = 13$, $b = 12$, $c = 9$, $d = 11$, $e = 14$, $\alpha = -0.7$, $\beta = 0.3$ 时, 式(7) 所对应的特征根方程为:

$$\lambda^3(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0. \quad (8)$$

求解式(8) 可得 $a_1 = 11.7n^2 + 4.9$, $a_2 = 163.8n^2 - 127.4$. 再由劳斯稳定判据可知, 系统(8) 稳定的充分必要条件为:

$$H_K = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}, \quad (9)$$

式中 $K = 1, 2$. 由式(9) 可得:

$$H_1 = a_1 > 0, \quad (10)$$

$$H_2 = a_1 a_0 > 0. \quad (11)$$

再由式(10) 和式(11) 可得 n 的稳定范围为:

$$|n| > 0.8819. \quad (12)$$

若忆阻器的初值 n 在 v 轴上满足式(12) (其他初值为零), 则系统(3) 所对应的稳定平衡点集 A 的解是渐近稳定的, 且此时的平衡点集 A 的特征根实部均为负 (除零特征根). 若忆阻器的初值 n 在 v 轴上不满足式(12), 则系统(3) 所对应的平衡点集 A 的解是不稳定的. 由以上可知, 系统(3) 的解是趋于极限环或混沌的.

2.3 系统的 Lyapunov 指数与分岔图

系统的参数变化不仅会影响系统平衡点的稳

定性,同时也会使系统的混沌现象发生改变^[15]. 为了观察和分析系统的混沌动力学的轨迹变化,本文以不同变量的 Lyapunov 指数和分岔图来分析系统的混沌动力学行为.

改变参数 b ($b \in [0, 20]$), 其他参数不变 ($a = 14, c = 9, d = 11, e = 14, \alpha = -0.7, \beta = 0.3$) 时系统的 Lyapunov 指数和分岔图如图 6 和图 7 所示. 由图 6 可以看出,当参数 $b > 7.28$ 时,系统存在大于零的 Lyapunov 指数,说明此时系统进入混沌状态. 由图 7 可以看出:在 $0 \leq b < 0.64$ 时,系统出现了一小段混沌状态;在 $0.64 \leq b < 4.00$ 时,系统的动力学轨迹是一条稳定的直线,表明系统处于极限环的状态;在 $4.00 \leq b < 7.28$ 时,系统的动力学轨迹开始分岔,系统进入周期态;在 $7.28 \leq b < 15.96$ 时,系统不再分岔,系统进入混沌状态;在 $15.96 \leq b < 17.04$ 时,系统的混沌状态逐渐趋于稳定;在 $17.04 \leq b < 20.00$ 时,系统收敛并再次进入周期态. 为了验证系统分岔图的准确性,利用不同参数 b 所对应的相轨迹图对系统的分岔图进行了验证,结果如图 8 所示. 由图 8 可以看出,系统的混沌动力学特性在 $[0, 20]$ 区间内呈不同状态.

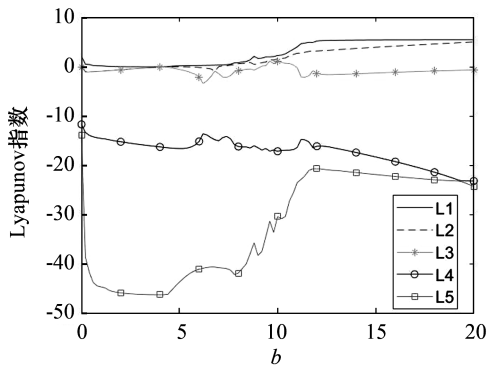


图 6 系统 Lyapunov 指数随参数 b 的变化情况

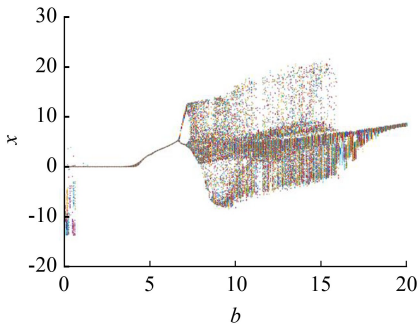


图 7 系统分岔图随参数 b 的变化情况

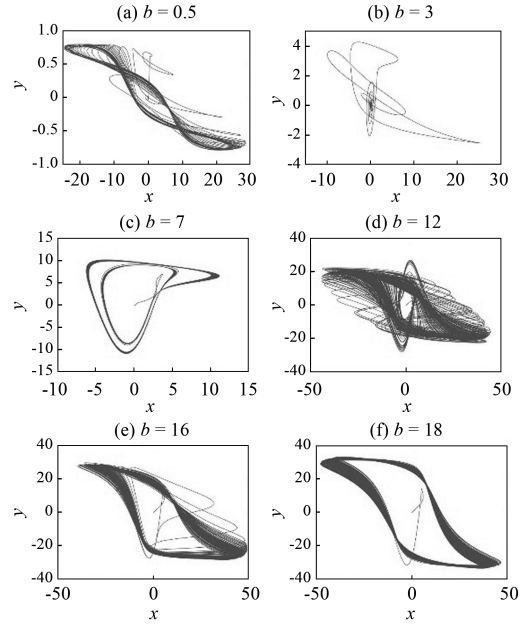


图 8 不同参数 b 所对应的相轨迹

3 忆阻电路的仿真与实现

为了进一步分析忆阻电路的特性,建立了电路系统的 Simulink 仿真模型,如图 9 所示. 该模型主要由加法器、减法器、乘法器、积分器、增益模块和常数模块组成. 忆阻器模型由绝对值模块、乘法器(1—3)、常数(1—2)、加法器 1 组成,其输出为 $f + g v^2$.

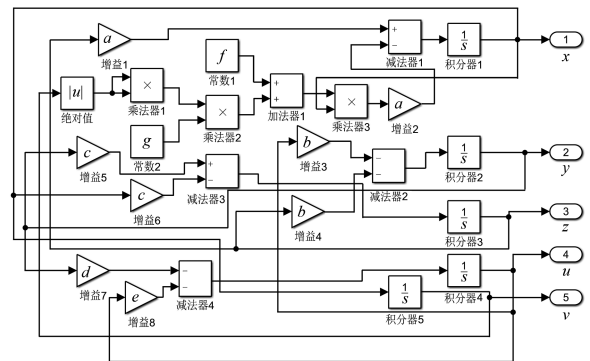


图 9 电路系统的 Simulink 建模图

系统变量 x 由忆阻器模块、增益(1—2)、减法器 1(减法器 1 的输出为 $az - aw(\varphi)x$)、积分器 1 组成,其输出为 $x = \int_{t_0}^t (az - aw(\varphi)x) d\tau$.

系统变量 y 的模型由增益(3—4)、积分器 2、减法器 2(减法器 2 的输出为 $-bu - bz$) 组成,其输出为 $y = \int_{t_0}^t (-bu - bz) d\tau$.

系统变量 z 的模型由增益(5—6)、积分器 3、减法器 3(减法器 3 的输出为 $cy - cx$) 组成,其输出为 $z = \int_{t_0}^t (cy - cx) d\tau$.

系统变量 u 的模型由增益(7—8)、积分器 4、减法器 4(减法器 4 的输出为 $-dy - eu$) 组成,其输出为 $u = \int_{t_0}^t (-dy - eu) d\tau$.

系统变量 v 的模型由积分器 5 组成,其输出为 $v = \int_{t_0}^t (x) d\tau$.

电路系统的 Simulink 仿真结果如图 10 所示.与图 2 对比可以看出,在相同参数和初值下,二者表现出的动力学特性相同,由此表明本文提出的五阶忆阻系统具有混沌特性.

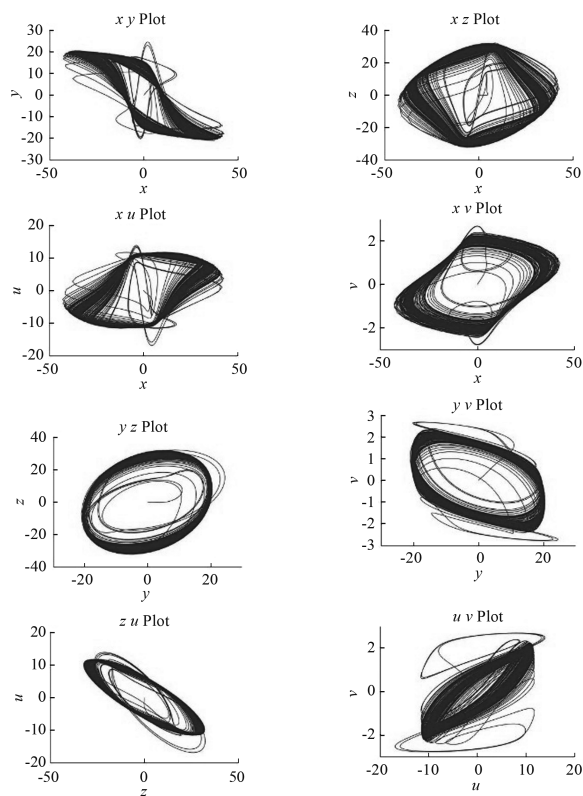


图 10 Simulink 仿真的相轨迹图

4 结论

基于分岔图、Lyapunov 指数、相图、Poincaré 截面图和 Simulink 仿真等方法对本文设计的忆阻电路进行分析表明,本文提出的五阶忆阻电路具有混沌特性,且参数 b 不同时系统的动力学轨迹表现出不同的运动状态.在今后的研究中,我们将尝试把该忆阻混沌电路应用到存储器和神经网络中,以进一步验证本文方法的可行性.

参考文献:

- [1] CHUA L O. Memristor-The missing circuit element[J]. IEEE Transaction on Circuit Theory, 1971,18(5):507-519.
- [2] STRUKOV D B, SNIDER G S, STEWART D R, et al. Erratum: The missing memristor found[J]. Nature: International Weekly Journal of Science, 2009,459(7250):1154.
- [3] TOUR J M, HE T. Electronics: The fourth element[J]. Nature: International Weekly Journal of Science, 2008,453(7191):42-43.
- [4] 王春华,蔺海荣,孙晶如,等.基于忆阻器的混沌、存储器及神经网络电路研究进展[J].电子与信息学报,2020,42(4):795-810.
- [5] PREZIOSO M, RIMINUCCI A, GRAZIOSI P, et al. A Single-device universal logic gate based on a magnetically enhanced memristor [J]. Advanced Materials, 2013,25(4):534-538.
- [6] BUDHATHOKI R K, SAH M P D, YANG C J, et al. Transient behaviors of multiple memristor circuits based on flux charge relationship[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2014,24(2):1430006(1-14).
- [7] INDIVERI G, BARRANCO B L, LEGENSTEIN R, et al. Integration of nanoscale memristor synapses in neuromorphic computing architectures[J]. Nanotechnology, 2013,24(38):384010(1-13).
- [8] 吴淑花,容旭巍,刘振永.含两个荷控忆阻器最简混沌电路的设计与研究[J].系统仿真学报,2018,30(10):3985-3994.
- [9] 王振,袁方,李玉霞.一种基于双忆阻器的文氏桥混沌电路[J].中国科技论文,2020,15(4):469-475.
- [10] 陈菊芳,徐影,于倩倩.基于单 T 网络的忆阻混沌电路[J].物理实验,2018,38(6):20-25.
- [11] WU M, HE Y. Parameter-dependent Lyapunov functional for systems with multiple time delays [J]. Journal of Control Theory and Applications, 2004,2(3):239-245.
- [12] BARBOZA R, CHUA L O. The four-element chuas circuit[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2008,18(4):943.
- [13] BAO B C, LI C B, XU J P, et al. New robust chaotic system with exponential quadratic term[J]. Chinese Physics B, 2008,17(11):4022-4026.
- [14] 李春彪,王德纯.一种恒 Lyapunov 指数谱混沌吸引子及其 Jerk 电路实现[J].物理学报,2009,58(2):764-770.
- [15] 闫登卫,王丽丹,段书凯.基于忆阻器的多涡卷混沌系统及其脉冲同步控制[J].物理学报,2018,67(11):50-63.