

文章编号: 1004-4353(2021)02-0131-05

基于 l_1 范数相干度的量子态区分

玄东平, 胡晓会, 南华*
(延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 为探究区分量子态的最优策略,以相干作为资源,利用附加辅助系统的方法来区分非正交量子态,并给出了 l_1 范数相干度与区分子态的成功概率之间的数值关系,同时量化了某些特定情况下不出错的量子态区分(UQSD)的最优协议所需的 l_1 范数相干均值. 本文的研究结果表明,通过调整生成的相干度可以提高区分子态的成功几率.

关键词: 量子相干; UQSD; 相干度量; 相干均值

中图分类号: O177.3

文献标识码: A

Quantum state discrimination based on l_1 norm of quantum coherence

XUAN Dongping, HU Xiaohui, NAN Hua*
(College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: In order to explore the optimal strategy of the quantum state discrimination, we use the method of additional auxiliary system to distinguish the non-orthogonal quantum states with coherence as the resource, and give the numerical relationship between the l_1 norm of coherence and the success probability of the quantum state discrimination. At the same time, the mean value of the l_1 norm of coherence required for the optimal protocol of the unambiguous quantum state discrimination(UQSD) in some specific cases is quantified. Our results show that the success probability of the quantum state discrimination can be improved by adjusting the generated coherence degree.

Keywords: quantum coherence; UQSD; coherence measure; mean value of coherence

为获知量子系统的信息,需要对所获得的量子态进行识别,但研究表明完美区分两个或多个非正交态是不可能的;因此,寻求量子态区分(QSD)的最优策略受到学者们的关注. 目前,量子态区分主要有不明确的量子态区分(AQSD)和不出错的量子态区分(UQSD)两种. 2011 年, Roa 等^[1]以没有纠缠的 quantum discord 为资源研究了量子态的区分;2013 年, Spehner 等^[2]以量子关联为资源,研究了关联度与态区分之间的联系;2018 年, Kim 等^[3]利用斜信息相干度量研究了量子态的区分问题. 上述研究结果表明不仅可以利用不同量子资源对量子态进行区分,而且可以基于不同的资源度量找到成功识别概率与所选取的量子资源之间的关系,进而可以寻求最优的量子态区分方法. 因此本文以相干为资源,通过附加一个辅助系统和执行联合酉操作来实现非正交量子态的 UQSD,并利用 l_1 范数相干度量给出了该策略的成功识别概率与相干均值之间的数值关系,同时在某些特定情况下量化了 UQSD 最优协议所需的 l_1 范数相干均值.

收稿日期: 2021-03-21

* 通信作者: 南华(1972—),女,副教授,研究方向为应用泛函分析、量子信息理论.

基金项目: 国家自然科学基金(11961073);吉林省教育厅“十三五”科学技术研究项目(JJKH20180891KJ)

1 相干性与量子态区分

在 d 维系统 H 上选定一组标准正交基 $\{|i\rangle\}$, 系统 H 上的 von-Neumann 测量为 $\Pi = \{\Pi_i = |i\rangle\langle i|\}$, 全体非相干态记为 $\mathcal{I} = \{\sum_i p_i |i\rangle\langle i| : p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1\}$. 对于给定的基底, 非相干态即为 free 态(不拥有资源的态). 若一组非相干 Kraus 算子 $\{K_n\}$ ($K_n \mathcal{I} K_n^\dagger \subset \mathcal{I}$) 所对应的完全正的保迹映射 Φ 满足 $\Phi(\rho) = \sum_n K_n \rho K_n^\dagger$, 则称 Φ 是非相干操作. 由于 Φ 未产生新的相干, 因此非相干操作也属于 free 操作. 2014 年, Baumgratz 等^[4]首次给出了描述相干度量的基本框架. 该框架为函数 $C(\rho | \Pi)$ (简记为 $C(\rho)$) 若能够成为相干度量, 它需满足如下 4 个条件:

(C1) 非负性: $C(\rho) \geq 0$, $C(\rho) = 0$ 当且仅当 $\rho \in \mathcal{I}$.

(C2) 单调性: $C(\rho)$ 在非相干操作 Φ 下是不增的, 即 $C(\rho) \geq C(\Phi(\rho))$.

(C3) 强单调性: 对于满足 $\sum_n K_n^\dagger K_n = I$ 和 $K_n \mathcal{I} K_n^\dagger \subset \mathcal{I}$ 的任意 Kraus 算子 $\{K_n\}$, 有 $C(\rho) \geq \sum_n p_n C(\rho_n)$.

(C4) 凸性: 对于任意一组量子态 $\{\rho_n\}$, $\sum_n p_n C(\rho_n) \geq C(\sum_n p_n \rho_n)$ 成立, 其中 $p_n \geq 0$, $\sum_n p_n = 1$.

2016 年, Yu 等^[5]在文献[4]的基础上改进了相干度量的框架. 随后一些相干度量相继被提出并且在计量学、热力学等领域得到了广泛应用, 如鲁棒相干度量、相对熵相干度量、迹范数相干度量、 l_1 范数相干度量等^[6-7]. 从相干度量的上述两个框架可知, 相干性与非对角线元素密切相关, 因此本文选取依赖非对角线元素的相干度量 C_{l_1} 来讨论量子态区分的问题. C_{l_1} 相干度量的表达式为:

$$C_{l_1}(\rho) = C_{l_1}(\rho | \Pi) = \sum_{i \neq j} \|\Pi_i \rho \Pi_j\|_{\text{tr}} = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}|. \quad (1)$$

假设 $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^d$ 是具有先验概率分布 ($p = (p_i)$) 的一组纯态. 众所周知, 若这组纯态具有正交性, 则一定存在一种量子测量, 且可以在没有任何误差的情况下进行态区分; 若这组纯态是非正交的, 则不可能完全区分这组态. 因此, 如何寻求最优的量子测量, 并以尽可能小的误差来区分非正交态具有十分重要的意义.

最初的 UQSD 问题是识别具有等先验概率 ($p_1 = p_2 = 1/2$) 的两个非正交量子态 $|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$. 针对这一问题文献[5]提出了一种策略, 即通过附加量子位和实施非零失谐(零纠缠)的操作来实现态区分. 在该策略中, 主系统通过联合酉变换 U 将其耦合到辅助量子系统 A 中, 使得:

$$U |\phi_1\rangle |k\rangle_A = \sqrt{1 - |\alpha_+|^2} |+\rangle |0\rangle_A + \alpha_+ |0\rangle |1\rangle_A,$$

$$U |\phi_2\rangle |k\rangle_A = \sqrt{1 - |\alpha_-|^2} |-\rangle |0\rangle_A + \alpha_- |0\rangle |1\rangle_A,$$

其中 $|k\rangle_A$ 是辅助系统 A 的基态, $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ 是系统 A 的正交基, $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$. 在此基础上, 一些学者对多个(大于 2)非正交量子态的 UQSD 问题进行了研究, 其中文献[8]的作者研究显示: 若在具有先验概率分布 ($p = (p_i)$) 的非正交线性独立的量子态 $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^d$ 中随机制备一个 qudit 量子位, 则 UQSD 策略的成功概率 (P_s) 的上限为

$$P_s \leq 1 - \frac{1}{d-1} \sum_{i \neq j} \sqrt{p_i p_j} |\langle \phi_i | \phi_j \rangle|. \quad (2)$$

式(2)表明, UQSD 策略的成功概率虽存在上限, 但不一定总能找到成功概率达到上限的 UQSD 策略.

2 基于相干资源的 UQSD

本文考虑先验概率分布为 $p = (p_i)$ 的非正交线性独立的一组量子态 $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^d$ 的区分问题. 首先在 d 维主系统 H 上附加 $d+1$ 维的系统 A, 则该系统再经联合酉变换 (U_{SA}) 后可表示为:

$$U_{SA} |\phi_i\rangle |0\rangle_A = \sqrt{1-|\alpha_i|^2} |\phi_i\rangle |i\rangle_A + \alpha_i |\phi_i\rangle |0\rangle_A, \quad (3)$$

其中 $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A, |2\rangle_A, \dots, |d\rangle_A\}$ 是辅助系统的正交基. 由于量子态在施以西操作前后始终保持内积不变, 因此有 $\alpha_i^* \alpha_j \langle \phi_i | \phi_j \rangle = \langle \phi_i | \phi_j \rangle$. 系统经联合酉变换后, 其平均量子态转变为混合态, 可表示为:

$$\rho = \sum_{i=1}^d p_i \rho_i = \sum_{i=1}^d p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| \otimes \rho_i^A, \text{ 其中 } \rho_i = U_{SA} (|\phi_i\rangle \langle \phi_i| \otimes |0\rangle_A \langle 0|) U_{SA},$$

$$\rho_i^A = (1-|\alpha_i|^2) |i\rangle_A \langle i| + |\alpha_i|^2 |0\rangle_A \langle 0| + \sqrt{1-|\alpha_i|^2} (\alpha_i |0\rangle_A \langle i| + \alpha_i^* |i\rangle_A \langle 0|). \quad (4)$$

由于

$$\begin{aligned} (\rho_i^A)^2 &= [(1-|\alpha_i|^2) |i\rangle_A \langle i| + |\alpha_i|^2 |0\rangle_A \langle 0| + \sqrt{1-|\alpha_i|^2} (\alpha_i |0\rangle_A \langle i| + \alpha_i^* |i\rangle_A \langle 0|)]^2 = \\ &= (1-|\alpha_i|^2)^2 |i\rangle_A \langle i| + \alpha_i^* \sqrt{1-|\alpha_i|^2} (1-|\alpha_i|^2) |i\rangle_A \langle 0| + |\alpha_i|^2 (1-|\alpha_i|^2) |i\rangle_A \langle i| + \\ &+ \alpha_i |\alpha_i|^2 \sqrt{1-|\alpha_i|^2} |0\rangle_A \langle i| + \alpha_i \sqrt{1-|\alpha_i|^2} (1-|\alpha_i|^2) |0\rangle_A \langle i| + |\alpha_i|^4 |0\rangle_A \langle 0| + \\ &+ |\alpha_i|^2 (1-\alpha_i)^2 |0\rangle_A \langle 0| + \sqrt{1-|\alpha_i|^2} \alpha_i^* |\alpha_i|^2 |i\rangle_A \langle 0| = \\ &= (1-|\alpha_i|^2) |i\rangle_A \langle i| + |\alpha_i|^2 |0\rangle_A \langle 0| + \sqrt{1-|\alpha_i|^2} (\alpha_i |0\rangle_A \langle i| + \alpha_i^* |i\rangle_A \langle 0|) = \rho_i^A, \end{aligned}$$

因此对于每个 i 来说 ρ_i^A 都是纯态.

若在辅助系统上实施局部 von-Neumann 测量 $M = \{|j\rangle_A \langle j|\}_{j=0}^d$, 则识别态的成功概率为:

$$P_s = 1 - \text{tr}(\mathbf{I} \otimes |0\rangle_A \langle 0| \rho) = 1 - \sum_{i=1}^d p_i |\alpha_i|^2, \quad (5)$$

其中 \mathbf{I} 是主量子位上的单位算子. 由于每个 ρ_i^A 都是纯态, 因此经酉变换后的主量子位和附加的量子位之间不含有任何的量子关联性(量子纠缠或量子失谐), 即在酉操作的过程中只有相干性发生变化. 基于此, 本文用 l_1 范数相干度量计算经联合酉操作后辅助系统上的相干均值, 其计算公式为:

$$\begin{aligned} C_{\text{mean}} &:= \sum_{i=1}^d p_i C_{l_1}(\rho_i^A) = \sum_{i=1}^d p_i C[(1-|\alpha_i|^2) |i\rangle_A \langle i| + |\alpha_i|^2 |0\rangle_A \langle 0| + \\ &+ \sqrt{1-|\alpha_i|^2} (\alpha_i |0\rangle_A \langle i| + \alpha_i^* |i\rangle_A \langle 0|)] = \sum_{i=1}^d p_i \sqrt{1-|\alpha_i|^2} (|\alpha_i| + |\alpha_i^*|) = \\ &= \sum_{i=1}^d 2p_i \sqrt{1-|\alpha_i|^2} |\alpha_i| = 2 \sum_{i=1}^d p_i \sqrt{|\alpha_i|^2 - |\alpha_i|^4}. \end{aligned} \quad (6)$$

由非相干态的定义可知: 相互正交的量子态是非相干态, 它们之间的相干度为 0. 由于非正交量子态之间始终存在相干性, 因此识别非正交态时必然会消耗相干性, 由此表明相干是 UQSD 的一种重要资源. 由式(5)和式(6)可知, 相干度和成功概率之间存在一定的数值关系, 即系统经联合酉操作后附加在系统上的相干均值能够反映出成功识别量子态概率的大小.

一般情况下虽然通过相干均值难以直接评估量子态区分的效率, 但在一些特殊情况下, 可以利用式(6)的相干均值找出最优 UQSD 测量, 如当量子态 $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^d$ 的夹角足够大时(即对 $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^d$ 中任意的两个量子态满足条件 $|\langle \phi_i | \phi_j \rangle| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (对任意的 $i \neq j$) 时). 由于对任意的 i 有 $|\alpha_i| \geq \frac{1}{2}$, 因此可由式(5)和式(6)得出以下结论: 当相干度增加时, UQSD 的成功概率会增加. 进而由该结论可知: 可以通过使相干均值最大化来实现 UQSD 的最优识别; 相反, 当量子态之间的非正交性充分小时, 可以通过使相干均值最小化来实现 UQSD 的最优识别.

3 量化最优 UQSD 的相干性

假设 $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ 是单量子系统中具有先验概率分布 ($p = (p_1, p_2)$) 的两个非正交且线性独立的量子态. 在主系统上附加辅助系统 A 后, 再通过联合酉变换可得:

$$\begin{aligned} U_{SA} |\phi_1\rangle |0\rangle_A &= \sqrt{1-|\alpha_1|^2} |\phi\rangle |1\rangle_A + \alpha_1 |\phi\rangle |0\rangle_A, \\ U_{SA} |\phi_2\rangle |0\rangle_A &= \sqrt{1-|\alpha_2|^2} |\phi\rangle |2\rangle_A + \alpha_2 |\phi\rangle |0\rangle_A, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A, |2\rangle_A\}$ 是辅助系统的正交基. 由量子态内积的性质可知, 两个量子态可以通过适当地调整联合酉变换使主量子位的两个态始终相同, 且 $\alpha_1^* \alpha_2 = \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$. 记 $\gamma = \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$, 则根据式(5)可得:

$$P_s = 1 - \sum_{i=1}^d p_i |\alpha_i|^2 = 1 - (p_1 |\alpha_1|^2 + p_2 |\alpha_2|^2) \leq 1 - 2\sqrt{p_1 p_2} |\alpha_1| |\alpha_2| = 1 - 2\sqrt{p_1 p_2} |\gamma|.$$

当 $p_1 |\alpha_1|^2 = p_2 |\alpha_2|^2$ 时, 上述不等式的等号成立, 即此时可以以最大成功概率 $P_s^{\text{opt}} = 1 - 2\sqrt{p_1 p_2} |\gamma|$ 来识别两个量子态. 又因为此时 $p_1 p_2 |\gamma|^2 = p_1^2 |\alpha_1|^2 = p_2^2 |\alpha_2|^2$, 所以此时系统的相干均值为:

$$\begin{aligned} C_{\text{mean}} &= 2p_1 \sqrt{|\alpha_1|^2 - |\alpha_1|^4} + 2p_2 \sqrt{|\alpha_2|^2 - |\alpha_2|^4} = 2p_1 \sqrt{\frac{p_2}{p_1} |\gamma| - \frac{p_2}{p_1} |\gamma|^2} + \\ &2p_2 \sqrt{\frac{p_1}{p_2} |\gamma| - \frac{p_1}{p_2} |\gamma|^2} = 2\sqrt{p_1 \sqrt{p_1 p_2} |\gamma| - p_1 p_2 |\gamma|^2} + 2\sqrt{p_2 \sqrt{p_1 p_2} |\gamma| - p_1 p_2 |\gamma|^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

上述表明, 当实施策略(7)时, 即利用 l_1 范数相干度量计算相干均值 C_{mean} 时, 若其结果与式(8)的计算结果一致, 则可推断策略(7)是最优的.

可将上述态区分方法进一步推广到区分具有先验概率分布 ($p = (p_i)$) 的 d 个非正交量子态 $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^d$ 中, 即通过适当地对式(3)调整联合酉变换总可以使得:

$$U_{SA} |\phi_i\rangle |0\rangle_A = \sqrt{1-|\alpha_i|^2} |\phi\rangle |i\rangle_A + \alpha_i |\phi\rangle |0\rangle_A. \quad (9)$$

由式(2)可知, 当 $p_1 |\alpha_1|^2 = p_2 |\alpha_2|^2 = \dots = p_d |\alpha_d|^2$ 时, UQSD 的成功概率可以达到式(2)的上限. 由此可知, 式(9)为 UQSD 的最优策略. 于是, 对任意的 $i \in [1, d]$ 有:

$$dp_i |\alpha_i|^2 = \frac{1}{d-1} \sum_{i \neq j} \sqrt{p_i p_j} ||\phi_i\rangle\langle\phi_j|| \equiv A. \quad (10)$$

利用式(6)和式(10)计算系统的相干均值可得:

$$C_{\text{mean}} = 2 \sum_{i=1}^d p_i \sqrt{|\alpha_i|^2 - |\alpha_i|^4} = 2 \sum_{i=1}^d \sqrt{p_i \frac{A}{d} - \frac{A^2}{d^2}}. \quad (11)$$

值得注意的是, 式(9)中的条件 $p_1 |\alpha_1|^2 = p_2 |\alpha_2|^2 = \dots = p_d |\alpha_d|^2$ 虽然未必能实现, 但是将相干均值与式(11)的结果进行比较, 可估计出所选取的 UQSD 策略与最优 UQSD 策略之间的逼近程度.

文献[9]的作者也是用类似的思想研究了量子态区分问题, 即他们通过在主系统上附加一个量子位 A 后再经联合酉变换 (V_{SA}) 得到了如下态区分策略:

$$V_{SA} |\phi_i\rangle |0\rangle_A = \sqrt{1-|\alpha_i|^2} |i\rangle |1\rangle_A + \alpha_i \left(\frac{\sum |i\rangle}{\sqrt{d}} \right) |0\rangle_A, \quad (12)$$

其中 $\alpha_i^* \alpha_j = \langle \phi_i | \phi_j \rangle$, $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |d\rangle\}$ 是主系统的标准正交基. 系统经联合酉操作后所获得的平均量子态为:

$$\rho = \sum_{i=1}^d p_i \rho_i = \sum_{i=1}^d p_i V_{SA} (|\phi_i\rangle\langle\phi_i| \otimes |0\rangle_A\langle 0|) V_{SA}^+,$$

其中

$$\begin{aligned} \rho_i &= V_{SA} (|\phi_i\rangle\langle\phi_i| \otimes |0\rangle_A\langle 0|) V_{SA}^+ = \\ &\left(\sqrt{1-|\alpha_i|^2} |i\rangle |1\rangle_A + \alpha_i \left(\frac{\sum |i\rangle}{\sqrt{d}} \right) |0\rangle_A \right) \left(\sqrt{1-|\alpha_i|^2} \langle i| \langle 1|_A + \frac{\alpha_i^* \sum \langle i| \langle 0|_A}{\sqrt{d}} \right) = \end{aligned}$$

$$(1 - |\alpha_i|^2) \langle i | \langle i | \otimes | 0 \rangle_A \langle 0 | + \frac{\sqrt{1 - |\alpha_i|^2} \alpha_i^*}{\sqrt{d}} \sum_i | i \rangle \langle i | \otimes | 1 \rangle_A \langle 0 | +$$

$$\frac{\sqrt{1 - |\alpha_i|^2} \alpha_i}{\sqrt{d}} | i \rangle \langle i | \otimes | 0 \rangle_A \langle 1 | + \frac{\alpha_i \alpha_i^*}{d} \sum_i | i \rangle \langle i | \otimes | 0 \rangle_A \langle 0 | \rangle.$$

由相干度的定义可知, $C_{l_1}(\rho)$ 与选取的测量和基底有关, 因此在系统上选用测量 $M = \{| i \rangle \langle i | \otimes | 1 \rangle_A \langle 1 |, | i \rangle \langle i | \otimes | 0 \rangle_A \langle 0 | \}$ 和基底 $\{| i \rangle \langle i | \otimes | 1 \rangle_A \langle 1 |, | i \rangle \langle i | \otimes | 0 \rangle_A \langle 0 | \}_{i=1}^d$ 可得:

$$C_{l_1}(\rho_i) = \sum_i \left(\frac{\sqrt{1 - |\alpha_i|^2}}{\sqrt{d}} |\alpha_i^*| + \frac{\sqrt{1 - |\alpha_i|^2}}{\sqrt{d}} |\alpha_i| \right) = \sum_i \frac{2\sqrt{|\alpha_i|^2 - |\alpha_i|^4}}{\sqrt{d}},$$

$$C_{\text{mean}} = \sum_{i=1}^d p_i C_{l_1}(\rho_i) = \sum_i \frac{2p_i \sqrt{|\alpha_i|^2 - |\alpha_i|^4}}{\sqrt{d}}. \quad (13)$$

另外, 根据式(5) 还可以得到式(12) 的 UQSD 策略的成功识别概率为:

$$P_s = 1 - \text{tr}(\mathbf{I} \otimes | 0 \rangle_A \langle 0 | \rho) = 1 - \sum_{i=1}^d p_i |\alpha_i|^2. \quad (14)$$

由上述可知, 式(13)和式(14)即可体现式(12)的 UQSD 策略的成功概率与相干均值之间的数值关系.

4 结论

本文以量子相干为资源, 通过附加辅助系统的方法研究了区分非正交量子态的策略. 研究表明, UQSD 成功识别量子态的概率与相干均值存在数值关系. 本文研究不仅可为设计 UQSD 策略提供一种新思路, 而且可为判别 UQSD 策略的优劣提供依据. 本文的策略还可以推广到其他高维系统的态区分问题中. 在今后的研究中, 我们将进一步研究如何通过调整联合酉操作使本文方法在更一般的情况下能够达到或逼近识别量子态成功概率的上限.

参考文献:

- [1] ROA L, RETMAL J C, ALID-VACCAREZZA M. Dissonance is required for assisted optimal state discrimination[J]. Phys Rev Lett, 2011, 107:080401.
- [2] SPEHNER D, ORSZAG M. Geometric quantum discord with Bures distance[J]. New J Phys, 2013, 15(10):603-610.
- [3] KIM S H, LI L S, KUMAR A, et al. Protocol for quantum state discrimination with quantum coherence[J]. ArXiv, 2021:1807.04542v3.
- [4] BAUMAGRATZ T, CRAMER M, PLENIO M B. Quantifying coherence[J]. Phys Rev Lett, 2014, 113(14):140401.
- [4] YU X D, ZHANG D J, XU G F, et al. Alternative framework for quantifying coherence[J]. Phys Rev A, 2016, 94:060302(R).
- [6] MAO Y L, MA Z H, JIN R B, et al. Error-Disturbance trade-off in sequential quantum measurements[J]. Phys Rev Lett, 2019, 122(9):090404.
- [7] XU J W, SHAO L H, FEI S M. Coherence measures with respect to general quantum measurements[J]. Phys Rev A, 2020, 102:012411.
- [8] ZHANG Y, FENG S, SUN X, et al. Upper bound for the success probability of unambiguous discrimination among quantum states[J]. Phys Rev A, 2001, 64:062103.
- [9] LI B, FEI S M, WANG Z X, et al. Assisted state discrimination without entanglement[J]. Phys Rev A, 2012, 85(2):22328.