

文章编号: 1004-4353(2021)02-0120-06

# 广义 Riccati 矩阵方程异类约束解的 两种迭代算法

陈世军

( 阳光学院, 福建 福州 350015 )

**摘要:** 针对在时变系统中提出的广义 Riccati 矩阵方程约束解问题, 基于共轭梯度算法原理建立了两种求广义 Riccati 矩阵方程异类约束解(对称和反对称解)的算法, 即非精确牛顿修正共轭梯度算法(In-Newton-MCG 算法)和非精确牛顿正交投影算法(In-Newton-OPA 算法), 并给出了两种算法收敛性结论和两种算法的数值实验. 算例表明, In-Newton-MCG 算法在一定条件下比 In-Newton-OPA 算法具有更高的计算效率.

**关键词:** Riccati 矩阵方程; 修正共轭梯度算法; 非精确牛顿算法; 正交投影算法

中图分类号: O241.6

文献标识码: A

## Two iterative algorithms for heterogeneous constrained solutions of generalized Riccati matrix equation

CHEN Shijun

( Yango University, Fuzhou 350015, China )

**Abstract:** Two algorithms called inexact Newton modified conjugate gradient algorithm (In-Newton-MCG algorithm) and inexact Newton orthogonal projection algorithm (In-Newton-OPA algorithm) are developed in this paper, the two algorithms are based on the principle of conjugate gradient algorithm, which are developed for solving the constrained solutions of generalized Riccati matrix equation in time-varying systems. The convergence results and numerical experiments of the two algorithms are given. Numerical experiments shows that the In-Newton-MCG algorithm is more efficient than the In-Newton-OPA algorithm under certain conditions.

**Keywords:** Riccati matrix equation; modified conjugate gradient algorithm; inexact Newton algorithm; orthogonal projection algorithm

## 0 引言

在时变广义系统的稳定性和具有对称循环结构的广义大系统的最优控制中存在求解 Riccati 矩阵方程(RME)解的问题, 尤其是求解广义 Riccati 矩阵方程的约束解问题<sup>[1-2]</sup>. RME 的一般形式可表示为

$$E_1^T X_1 F_1 + E_2^T X_2 F_2 + \gamma(X_1, X_2) + G = O, \quad (1)$$

其中  $\gamma(X_1, X_2) = M_1^T Q_{11} N_1 + M_2^T Q_{12} N_2 + M_3^T Q_{21} N_3 + M_4^T Q_{22} N_4$ ,  $C_{ij} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{ij} = X_i^T C_{ij} X_j$  ( $i, j = 1, 2$ ). 当  $C_{ij} = O$  ( $i, j = 1, 2$ ) 时, 方程(1) 就是广义 Sylvester 矩阵方程.

近年来, 许多学者对非线性矩阵方程的数值解进行了研究, 并给出了一些有效的算法. 例如: Long 等<sup>[3]</sup> 证明了求解非对称 Riccati 方程迭代算法的收敛性; 张凯院等<sup>[4]</sup> 用牛顿算法和修正共轭梯度算法研

收稿日期: 2021-01-25

基金项目: 福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JAT190410)

作者简介: 陈世军(1983—), 男, 讲师, 研究方向为计算数学.

究了 Riccati 矩阵方程的对称解问题; Y.Q.Lin 等<sup>[5]</sup> 分析了非线性代数 Riccati 方程迭代算法的收敛性; Y.F.Ke 等<sup>[6]</sup> 利用交替方向法求解了矩阵方程的非负解; 周富照等<sup>[7]</sup> 等给出了子矩阵约束下矩阵方程的正交投影迭代解. 本文借鉴非精确牛顿算法(In-Newton 算法)、修正共轭梯度算法(MCG 算法)和正交投影迭代算法(OPA 算法)原理, 建立了一种求广义方程(1)的对称和反对称约束解的迭代算法, 并通过数值算例比较了两类算法的计算效率.

在本文中, 用  $\mathbf{R}^{m \times n}$  表示  $m \times n$  实矩阵集合, 用  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的 Kronecker 积, 用  $\overline{\text{vec}}(\mathbf{A})$  表示将矩阵  $\mathbf{A}$  按行拉直构成的列向量. 定义同阶实矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的内积为  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$ , 矩阵的 Frobenius 范数  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{(\mathbf{A}, \mathbf{A})}$ . 为了书写方便, 将对称矩阵集合  $\mathbf{SR}^{n \times n}$  记为  $\Omega_1$ , 将反对称矩阵集合  $\mathbf{ASR}^{n \times n}$  记为  $\Omega_2$ , 将  $\mathbf{Y}_1 \in \mathbf{SR}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{Y}_2 \in \mathbf{ASR}^{n \times n}$  记为  $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) \in \Omega_{1-2}$ , 并且称  $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)$  为一组对称和反对称约束解 ( $\Omega_{1-2}$  解).

## 1 建立求方程(1) $\Omega_{1-2}$ 解的非精确 Newton 算法

为了计算方便, 引入如下记号:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{X}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^{(i)} \\ \mathbf{X}_2^{(i)} \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{Y}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1^{(i)} \\ \mathbf{Y}_2^{(i)} \end{pmatrix}, \\ \phi(\mathbf{X}) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{E}_1^T \mathbf{X}_1 \mathbf{F}_1 + \mathbf{E}_2^T \mathbf{X}_2 \mathbf{F}_2 + \mathbf{M}_1^T \mathbf{X}_1 \mathbf{C}_{11} \mathbf{X}_1 \mathbf{N}_1 + \\ &\quad \mathbf{M}_2^T \mathbf{X}_1 \mathbf{C}_{12} \mathbf{X}_2 \mathbf{N}_2 + \mathbf{M}_3^T \mathbf{X}_2 \mathbf{C}_{21} \mathbf{X}_1 \mathbf{N}_3 + \mathbf{M}_4^T \mathbf{X}_2 \mathbf{C}_{22} \mathbf{X}_2 \mathbf{N}_4 + \mathbf{G}, \\ \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \mathbf{E}_1^T \mathbf{Y}_1 \mathbf{F}_1 + \mathbf{E}_2^T \mathbf{Y}_2 \mathbf{F}_2 + \mathbf{M}_1^T \mathbf{X}_1 \mathbf{C}_{11} \mathbf{Y}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{M}_1^T \mathbf{Y}_1 \mathbf{C}_{11} \mathbf{X}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{M}_2^T \mathbf{X}_1 \mathbf{C}_{12} \mathbf{Y}_2 \mathbf{N}_2 + \\ &\quad \mathbf{M}_2^T \mathbf{Y}_1 \mathbf{C}_{12} \mathbf{X}_2 \mathbf{N}_2 + \mathbf{M}_3^T \mathbf{X}_2 \mathbf{C}_{21} \mathbf{Y}_1 \mathbf{N}_3 + \mathbf{M}_3^T \mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_{21} \mathbf{X}_1 \mathbf{N}_3 + \mathbf{M}_4^T \mathbf{X}_2 \mathbf{C}_{22} \mathbf{Y}_2 \mathbf{N}_4 + \mathbf{M}_4^T \mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_{22} \mathbf{X}_2 \mathbf{N}_4, \\ \gamma(\mathbf{Y}) &= \mathbf{M}_1^T \mathbf{Y}_1 \mathbf{C}_{11} \mathbf{Y}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{M}_2^T \mathbf{Y}_1 \mathbf{C}_{12} \mathbf{Y}_2 \mathbf{N}_2 + \mathbf{M}_3^T \mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_{21} \mathbf{Y}_1 \mathbf{N}_3 + \mathbf{M}_4^T \mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_{22} \mathbf{Y}_2 \mathbf{N}_4. \end{aligned}$$

根据  $\phi(\mathbf{X})$ 、 $\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y})$  和  $\gamma(\mathbf{Y})$  的表达式和矩阵乘法的性质, 易推导出

$$\phi(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \phi(\mathbf{X}_1 + \mathbf{Y}_1, \mathbf{X}_2 + \mathbf{Y}_2) = \phi(\mathbf{X}) + \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}) + \gamma(\mathbf{Y}), \quad (2)$$

其中  $\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y})$  是  $\phi(\mathbf{X})$  在点  $\mathbf{X}$  沿  $\mathbf{Y}$  方向的 Frechet 导数.

由 Newton 算法的基本原理可知, 当  $\mathbf{Y}_1$  和  $\mathbf{Y}_2$  的范数较小时, 可以舍去式(2)右端关于  $\mathbf{Y}_1$  和  $\mathbf{Y}_2$  的高次项  $\gamma(\mathbf{Y})$ , 即用式(2)右端的线性部分近似可得  $\phi(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \approx \phi(\mathbf{X}) + \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y})$ . 设  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \in \Omega_{1-2}$  是方程(1)的近似解, 则求方程(1)的一组解  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$  等价于求校正值  $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) \in \Omega_{1-2}$  使  $\phi(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{O}$ , 并且可以把求方程(1)的解  $\mathbf{X}$  近似为求方程(3)的解  $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)$ . 方程(3)的表达式为:

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}) = -\phi(\mathbf{X}). \quad (3)$$

本文利用 Newton 算法求方程(1)  $\Omega_{1-2}$  解的步骤如下:

Step 1 给定初始矩阵  $(\mathbf{X}_1^{(k)}, \mathbf{X}_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , 并令  $k := 1$ .

Step 2 若  $\phi(\mathbf{X}^{(k)}) = \mathbf{O}$ , 则计算停止; 否则, 求  $(\mathbf{Y}_1^{(k)}, \mathbf{Y}_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , 使得  $\phi_{\mathbf{X}^{(k)}}(\mathbf{Y}^{(k)}) = -\phi(\mathbf{X}^{(k)})$ .

Step 3 计算  $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{Y}^{(k)}$ , 令  $k := k + 1$ , 转 Step 2.

在 Newton 算法中, 当  $\mathbf{X}^*$  是方程(1)的单根, 并且任意给定的初始矩阵  $\mathbf{X}^{(1)}$  接近精确解  $\mathbf{X}^*$  时, 则得到的矩阵序列  $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$  收敛于  $\mathbf{X}^*$ . 在 Newton 算法中, 其收敛性结论要求初始矩阵  $\mathbf{X}^{(1)}$  充分接近方程(1)的精确解  $\mathbf{X}^*$ , 且 Newton 算法的每一步迭代过程都需要求方程(3)的  $\Omega_{1-2}$  解. 但在实际计算中, 由于预先不知方程(1)的精确解  $\mathbf{X}^*$ , 因此当初始矩阵  $\mathbf{X}^{(1)}$  与  $\mathbf{X}^*$  的差  $\|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^*\|$  较大, 或在 Newton 算法中不需计算方程(3)的准确  $\Omega_{1-2}$  解时, 会导致 Newton 算法的计算时间较长. 为此, Feitzinger 等<sup>[8]</sup> 提出了非精确 Newton 算法, 该算法的核心思想是在每一步迭代过程中只求出方程(3)的近似  $\Omega_{1-2}$  解即可, 而不必非得求出方程(3)的精确  $\Omega_{1-2}$  解.

参照 Newton 算法, 本文给出求方程(1)  $\Omega_{1-2}$  解的非精确 Newton 算法如下:

Step 1 给定初始矩阵  $(X_1^{(k)}, X_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , 置  $k := 1$ .

Step 2 如果  $\psi(X^{(k)}) = O$ , 停止; 否则, 任意给定  $\eta \in [0, 1)$ , 求  $(Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , 使得

$$\|\phi_{X^{(k)}}(Y^{(k)}) + \psi(X^{(k)})\| \leq \eta \|\psi(X^{(k)})\|. \quad (4)$$

Step 3 计算  $X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y^{(k)}$ , 令  $k := k + 1$ , 转 step 2.

这里需要说明的是, 对非精确 Newton 算法中的某个  $(X_1^{(k)}, X_2^{(k)})$ , 当方程(3) 有  $\Omega_{1-2}$  解时, 可通过求其近似解  $(Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$  使之满足式(4); 当方程(3) 无  $\Omega_{1-2}$  解时, 可通过求其近似最小二乘解满足式(4). 特别的, 当  $\eta = 0$  时, 非精确 Newton 算法就是精确 Newton 算法.

## 2 建立求方程(3) $\Omega_{1-2}$ 解和最小二乘解的 MCG 算法

记  $A_1 = E_1^T, B_1 = F_1, C_1 = E_2^T, D_1 = F_2, A_2 = M_1^T X_1 C_{11}, B_2 = N_1, C_2 = M_2^T X_1 C_{12}, D_2 = N_2, A_3 = M_1^T, B_3 = C_{11} X_1 N_1, C_3 = M_3^T, D_3 = C_{21} X_1 N_3, A_4 = M_2^T, B_4 = C_{12} X_2 N_2, C_4 = M_4^T X_2 C_{22}, D_4 = N_4, A_5 = M_3^T X_2 C_{21}, B_5 = N_3, C_5 = M_4^T, D_5 = C_{22} X_2 N_4, F = -\psi(X)$ . 下面建立求方程(3) 的  $\Omega_{1-2}$  解及其最小二乘解的 MCG 算法. 方程(3) 的一般形式为:

$$\sum_{i=1}^5 (A_i Y_1 B_i + C_i Y_2 D_i) = F, \quad (5)$$

其中  $A_i, B_i, C_i, D_i, F \in \mathbb{R}^{n \times n} (i=1, 2, 3, 4, 5)$ . 本文主要解决下面两个问题:

问题 I 设方程(5) 有  $\Omega_{1-2}$  解, 求  $(Y_1, Y_2) \in \Omega_{1-2}$ , 使  $(Y_1, Y_2)$  满足方程(5).

问题 II 设方程(5) 无  $\Omega_{1-2}$  解, 求  $(Y_1, Y_2) \in \Omega_{1-2}$ , 使  $(Y_1, Y_2)$  满足  $\left\| \sum_{i=1}^5 (A_i Y_1 B_i + C_i Y_2 D_i) - F \right\| = \min$ . 当方程(5) 有  $\Omega_{1-2}$  解时, 称问题 I 相容; 否则称问题 I 不相容.

### 2.1 求解问题 I 的 MCG 算法

为建立求解问题 I 的 MCG 算法, 首先引入如下记号:

$$\omega(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^5 (A_i Y_1 B_i + C_i Y_2 D_i), Y = (Y_1, Y_2),$$

$$p(R) = \sum_{i=1}^5 (A_i^T R B_i^T + C_i^T R D_i^T), q(R) = \frac{1}{2} (R - R^T).$$

求解问题 I 的 MCG 算法 1 的步骤如下:

Step 1 任意给定初始矩阵  $(Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , 令  $k := 1$ , 计算  $R_k = F - \omega(Y^{(k)})$ ,  $\tilde{R}_k = p(R_k)$ ,  $Z_k = q(\tilde{R}_k)$ .

Step 2 若  $R_k = O$  (或者  $R_k \neq O, Z_k = O$ ), 停止计算; 否则, 计算  $\alpha_k = \frac{\|R_k\|^2}{\|Z_k\|^2}$ ,  $Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + \alpha_k Z_k$ .

Step 3 计算  $R_{k+1} = F - \omega(Y^{(k+1)})$ ,  $\tilde{R}_{k+1} = p(R_{k+1})$ ,  $Z_{k+1} = q(\tilde{R}_{k+1}) + \frac{\|R_{k+1}\|^2}{\|R_k\|^2} Z_k$ .

Step 4 令  $k := k + 1$ , 转 Step 2.

因为  $Z_k = q(\tilde{R}_k) \in \Omega_{1-2}$ , 所以 MCG 算法 1 中的矩阵  $(Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , 进而可知对于 MCG 算法 1 有如下收敛定理 1. 定理 1 的证明过程可参考文献[9] 中的 MCG 算法的证明.

定理 1<sup>[9]</sup> 设问题 I 相容, 则对任意的初始矩阵  $(Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}) \in \Omega_{1-2}$ , 且 MCG 算法 1 可在有限步迭代计算后求得问题 I 的一组  $\Omega_{1-2}$  解. 问题 I 不相容的充要条件是在 MCG 算法 1 中存在某个正整数  $k$ , 使得  $R_k \neq O, Z_k = O$ .

## 2.2 求解问题 II 的 MCG 算法

当 MCG 算法 1 中断时, 需要求解问题 II. 首先构造与方程(5) 等价的约束正规矩阵方程, 并且把求方程(5) 的  $\Omega_{1-2}$  最小二乘解转化为求其约束正规矩阵方程的  $\Omega_{1-2}$  解; 然后参照 MCG 算法 1, 建立求方程(5)  $\Omega_{1-2}$  最小二乘解的 MCG 算法, 即求问题 II 的解. 引入如下记号:

$$f_1(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \sum_{j=1}^5 (\mathbf{A}_j \mathbf{Y}_1 \mathbf{B}_j + \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_2 \mathbf{D}_j), \quad f_2(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \sum_{j=1}^5 (\mathbf{A}_j \mathbf{Y}_1^T \mathbf{B}_j - \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_2^T \mathbf{D}_j),$$

$$f(\mathbf{Y}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^5 [\mathbf{A}_i^T f_1(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) \mathbf{B}_i^T + \mathbf{B}_i (f_2(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2))^2 \mathbf{A}_i] \\ \sum_{i=1}^5 [\mathbf{C}_i^T f_1(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) \mathbf{D}_i^T - \mathbf{D}_i (f_2(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2))^2 \mathbf{C}_i] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^5 (\mathbf{A}_i^T \mathbf{F} \mathbf{B}_i^T + \mathbf{B}_i \mathbf{F}^T \mathbf{A}_i) \\ \sum_{i=1}^5 (\mathbf{C}_i^T \mathbf{F} \mathbf{D}_i^T - \mathbf{D}_i \mathbf{F}^T \mathbf{C}_i) \end{bmatrix}.$$

**定理 2**<sup>[9]</sup> 求解问题 II 等价于求矩阵方程  $f(\mathbf{Y}) = \mathbf{N}$  的  $\Omega_{1-2}$  解, 且该矩阵方程一定有  $\Omega_{1-2}$  解.

参照 MCG 算法 1 的原理, 建立求方程  $f(\mathbf{Y}) = \mathbf{N}$  的  $\Omega_{1-2}$  解, 即建立求解问题 II 的 MCG 算法 2. MCG 算法 2 的计算步骤如下:

Step 1 任意给定初始矩阵  $(\mathbf{Y}_1^{(k)}, \mathbf{Y}_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , 令  $k := 1$ , 计算  $\mathbf{R}_k = \mathbf{N} - f(\mathbf{Y}^{(k)})$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_k = f(\mathbf{R}_k)$ ,  $\mathbf{Z}_k = \tilde{\mathbf{R}}_k$ .

Step 2 若  $\mathbf{R}_k = \mathbf{O}$ , 停止计算; 否则, 计算  $\alpha_k = \frac{\|\mathbf{R}_k\|^2}{\|\mathbf{Z}_k\|^2}$ ,  $\mathbf{Y}^{(k+1)} = \mathbf{Y}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{Z}_k$ .

Step 3 计算  $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{N} - f(\mathbf{Y}^{(k+1)})$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_{k+1} = f(\mathbf{R}_{k+1})$ ,  $\mathbf{Z}_{k+1} = \tilde{\mathbf{R}}_{k+1} + \frac{\|\mathbf{R}_{k+1}\|^2}{\|\mathbf{R}_k\|^2} \mathbf{Z}_k$ .

Step 4 令  $k := k + 1$ , 转 Step 2.

因为  $\mathbf{Z}_k \in \Omega_{1-2}$ , 所以 MCG 算法 2 中的矩阵  $(\mathbf{Y}_1^{(k)}, \mathbf{Y}_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , 进而可知对于 MCG 算法 2 有类似于 MCG 算法 1 的收敛定理(定理 3).

**定理 3**<sup>[9]</sup> 对任意的初始矩阵  $(\mathbf{Y}_1^{(k)}, \mathbf{Y}_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , MCG 算法 2 可在有限步迭代计算后求得问题 II 的一组解, 即矩阵方程(5) 的一组  $\Omega_{1-2}$  最小二乘解.

## 3 建立求方程(3) $\Omega_{1-2}$ 解和最小二乘解的 OPA 算法

MCG 算法虽然给出了有限步的收敛结果, 但是没有给出收敛率的估计. OPA 算法也是一种求解矩阵方程约束解的有效算法, 其被广泛运用于信号处理、矩阵方程的约束解求解等问题中. 参照 OPA 算法的基本原理, 本文建立的求问题 I 的 OPA 算法 1 的步骤如下:

Step 1 任意给定初始矩阵  $(\mathbf{Y}_1^{(k)}, \mathbf{Y}_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , 令  $k := 1$ .

Step 2 计算  $\mathbf{R}_k = \mathbf{F} - \omega(\mathbf{Y}^{(k)})$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_k = p(\mathbf{R}_k)$ ,  $\mathbf{Z}_k = q(\tilde{\mathbf{R}}_k)$ ,  $\tilde{\mathbf{Z}}_k = \omega(\mathbf{Z}_k)$ .

Step 3 若  $\mathbf{R}_k = \mathbf{O}$  (或者  $\mathbf{R}_k \neq \mathbf{O}$ ,  $\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{O}$ ), 停止; 否则, 计算  $\mathbf{Y}^{(k+1)} = \mathbf{Y}^{(k)} + \frac{[\mathbf{R}_k, \tilde{\mathbf{Z}}_k]}{\|\tilde{\mathbf{Z}}_k\|^2} \mathbf{Z}_k$ .

Step 4 令  $k := k + 1$ , 转 Step 2.

因为  $\mathbf{Z}_k \in \Omega_{1-2}$ , 所以 OPA 算法 1 中的矩阵  $(\mathbf{Y}_1^{(k)}, \mathbf{Y}_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ . 通过类似于定理 1 的证明可知, 对于

OPA 算法 1 有如下收敛性定理(定理 4).

**定理 4** 设问题 I 有解, 则对任意的初始矩阵  $(Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , OPA 算法 1 可在有限步迭代计算后求得问题 I 的一组解, 即方程(5) 的一组  $\Omega_{1-2}$  解. 问题 I 无解的充要条件是在 OPA 算法 1 中, 存在某个正整数  $k$ , 使得  $R_k \neq O, \tilde{Z}_k = O$ .

由定理 4 可知问题 I 不相容, 矩阵方程(5) 无  $\Omega_{1-2}$  解. 根据定理 2 并参照 OPA 算法 1, 本文建立的求问题 II 的 OPA 算法 2 如下:

Step 1 任意给定初始矩阵  $(Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , 令  $k := 1$ .

Step 2 计算  $R_k = N - f(Y^{(k)}), Z_k = f(R_k), \tilde{Z}_k = f(Z_k)$ .

Step 3 若  $R_k = O$ , 停止; 否则, 计算  $Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + \frac{[R_k, \tilde{Z}_k]}{\|\tilde{Z}_k\|^2} Z_k$ .

Step 4 令  $k := k + 1$ , 转 Step 2.

因为  $Z_k \in \Omega_{1-2}$ , 所以 OPA 算法 2 中的矩阵  $(Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ . 通过类似于定理 3 的证明可得如下收敛性定理 5.

**定理 5** 对任意的初始矩阵  $(Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , OPA 算法 2 可在有限步迭代计算后求得问题 II 的一组解, 即方程(5) 的一组  $\Omega_{1-2}$  最小二乘解.

## 4 数值算例

分别用两个数值算例比较文中给出的 In-Newton-MCG 算法和 In-Newton-OPA 算法. 参照文献 [4] 的计算方案, 本文将 In-Newton 算法作为外迭代算法, 将 MCG 算法和 OPA 算法作为内迭代算法. In-Newton-MCG 算法 2 和 In-Newton-OPA 算法 2 的初始矩阵  $Y^{(1)}$  取算法 1 终止时的  $Y^{(k)}$ . 本文设计的求方程(1)  $\Omega_{1-2}$  解的计算方法如下:

In-Newton-MCG 算法:

Step 1 给定初始矩阵  $(X_1^{(k)}, X_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , 令  $k := 1$ .

Step 2 若  $\phi(X^{(k)}) = O$ , 停止; 否则, 采用 MCG 算法 1 求  $(Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$  使之满足

$$\|\phi(Y^{(k)}) + \phi(X^{(k)})\| \leq \max\{\epsilon, \eta \|\phi(X^{(k)})\|\}. \quad (6)$$

其中:  $\epsilon$  为内迭代算法的终止准则;  $\eta$  为一个常数, 一般取  $0 < \eta < 1$ . 若 MCG 算法 1 中断(此时方程(5) 无  $\Omega_{1-2}$  解), 或者 MCG 算法 1 的迭代次数达到预先给定的正整数  $n_0$ , 则采用 MCG 算法 2 求方程(5) 的近似  $\Omega_{1-2}$  最小二乘解  $(Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$  使之满足式(6), 或满足 MCG 算法 2 的终止条件.

Step 3 计算  $X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y^{(k)}$ , 令  $k := k + 1$ , 转 Step 2.

In-Newton-OPA 算法:

Step 1 任意给定初始矩阵  $(X_1^{(k)}, X_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$ , 令  $k := 1$ .

Step 2 若  $\phi(X^{(k)}) = O$ , 停止; 否则, 采用 OPA 算法 1 求  $(Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$  使之满足式(6). 若 OPA 算法 1 中断(此时方程(5) 无  $\Omega_{1-2}$  解), 或者 OPA 算法 1 的迭代次数达到预先给定的正整数  $n_0$ , 则采用 OPA 算法 2 求方程(5) 的近似  $\Omega_{1-2}$  最小二乘解  $(Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}) \in \Omega_{1-2}$  使之满足式(6), 或满足 OPA 算法 2 的终止条件.

Step 3 计算  $X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y^{(k)}$ , 令  $k := k + 1$ , 转 Step 2.

**例 1** 用本文建立的 In-Newton-MCG 算法和 In-Newton-OPA 算法求方程(1) 的一组  $\Omega_{1-2}$  解和最小二乘解, 其中系数矩阵为:

$$E_i = F_i = C_{ij} = I \ (i, j = 1, 2), \ M_i = N_i = I \ (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$\mathbf{X}_1^* = \begin{bmatrix} 0.32 & 0.40 & 0.50 & \cdots & 0 \\ 0.40 & 0.32 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0.50 & 0.40 & \ddots & 0.40 & 0.50 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0.32 & 0.40 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0.40 & 0.32 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_2^* = \begin{bmatrix} 0 & -0.23 & -0.35 & \cdots & 0 \\ 0.23 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0.35 & 0.23 & \ddots & -0.23 & -0.35 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -0.23 \\ 0 & 0 & 0.35 & 0.23 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = -(\mathbf{E}_1^T \mathbf{X}_1^* \mathbf{F}_1 + \mathbf{E}_2^T \mathbf{X}_2^* \mathbf{F}_2 + \mathbf{M}_1^T \mathbf{X}_1^* \mathbf{C}_{11} \mathbf{X}_1^* \mathbf{N}_1 + \mathbf{M}_2^T \mathbf{X}_1^* \mathbf{C}_{12} \mathbf{X}_2^* \mathbf{N}_2 + \mathbf{M}_3^T \mathbf{X}_2^* \mathbf{C}_{21} \mathbf{X}_1^* \mathbf{N}_3 + \mathbf{M}_4^T \mathbf{X}_2^* \mathbf{C}_{22} \mathbf{X}_2^* \mathbf{N}_4).$$

数值实验利用 Matlab 软件进行. 实验时取  $\eta = 0.1$ , 系数矩阵阶数取  $n = 4$ , 外迭代 Newton 算法的终止准则为  $10^{-7}$ , MCG 算法和 OPA 算法的终止准则为  $10^{-8}$ . MCG 算法和 OPA 算法的最大迭代次数为  $n_0 = 4999$ , 非精确 Newton 算法的初始矩阵为  $\mathbf{X}_1 = 4\mathbf{I}_n$  和  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{O}_n$ , MCG 算法和 OPA 算法的初始矩阵均为  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{O}_n$ . 用  $t$ 、 $k_0$ 、 $k_1$ 、 $k_2$  和 error 分别表示计算时间、非精确 Newton 算法的迭代次数、MCG 算法 1 和 OPA 算法 1 的迭代次数、MCG 算法 2 和 OPA 算法 2 的迭代次数和误差范数. 两种算法的计算结果如表 1 所示.

表 1 两种算法求方程(1)  $\Omega_{1-2}$  解的结果

| 算法            | $t/s$     | $k_0$ | $k_1$ | $k_2$ | error    |
|---------------|-----------|-------|-------|-------|----------|
| In-Newton-MCG | 0.054 258 | 8     | 69    | 5     | 2.06e-13 |
| In-Newton-OPA | 0.349 849 | 8     | 3 483 | 820   | 3.00e-08 |

当 MCG 算法和 OPA 算法的初始矩阵取  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{O}_n$  时, In-Newton-MCG 算法和 In-Newton-OPA 算法均可得到方程(1) 的一组解:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0.32 & 0.40 & 0.50 & 0 \\ 0.40 & 0.32 & 0.40 & 0.50 \\ 0.50 & 0.40 & 0.32 & 0.40 \\ 0 & 0.50 & 0.40 & 0.32 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.23 & -0.35 & 0 \\ 0.23 & 0 & -0.23 & -0.35 \\ 0.35 & 0.23 & 0 & -0.23 \\ 0 & 0.35 & 0.23 & 0 \end{bmatrix}.$$

上述两种算法虽然都能求得方程(1) 的解, 但从表 1 可以看出, 在相同的条件下 In-Newton-MCG 算法的效率高于 In-Newton-OPA 算法的效率.

**例 2** 修改例 1 中的部分系数矩阵, 即使  $\mathbf{M}_i = \mathbf{N}_i = \mathbf{O}$  ( $i = 2, 3, 4$ ), 其余系数矩阵同例 1. 求方程(1) 的一组  $\Omega_{1-2}$  解. 计算取  $\eta = 0.9$ , 非精确 Newton 算法的初始矩阵为  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{O}_n$ , MCG 算法和 OPA 算法的初始矩阵为  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{O}_n$ , 且在计算实验过程中依次增加系数矩阵的阶数. 两种算法求方程(1)  $\Omega_{1-2}$  解的结果见表 2.

表 2 两种算法求方程(1)  $\Omega_{1-2}$  解的结果

| 算法            | $n$ | $t/s$   | $k_0$ | $k_1$ | $k_2$ | error    |
|---------------|-----|---------|-------|-------|-------|----------|
| In-Newton-MCG | 24  | 0.121 3 | 12    | 712   | 11    | 8.65e-09 |
|               | 40  | 0.589 3 | 13    | 1 541 | 12    | 2.62e-08 |
|               | 56  | 1.495 1 | 13    | 2 237 | 12    | 9.33e-08 |
|               | 72  | 2.550 8 | 13    | 2 496 | 12    | 7.18e-09 |
| In-Newton-OPA | 失效  |         |       |       |       |          |

由表 2 可知, 当选择不同的非精确 Newton 算法的初始矩阵时, In-Newton-OPA 算法失效, 而 In-Newton-MCG 算法始终有效. 因此, 在今后的研究中我们将探讨 In-Newton-OPA 算法在什么条件下失效, 以及在什么条件下 In-Newton-OPA 算法比 In-Newton-MCG 算法有效.

(下转第 130 页)



- the microstructural and optical properties of pulsed laser deposited nanostructured zinc oxide thin films [J]. *Materials Chemistry and Physics*, 2010, 121 (3):406-413.
- [2] RAJA N, BASKARAN R, NAGARETHINAM V S, et al. Aging effect of the precursor solution on the structural, morphological, optical and electrical properties of ternary CdZnO thin films suited for optoelectronic applications [J]. *Optik*, 2016, 127: 10602-10609.
- [3] CHEN S, LI Q X, FERGUSON I, et al. Spectroscopic ellipsometry studies on ZnCdO thin films with different Cd concentrations grown by pulsed laser deposition [J]. *Applied Surface Science*, 2017, 421:383-388.
- [4] GURUSAMPATH K A, LI X J, HONG X M, et al. Investigation of structural, electrical and optical properties of oxygen ( $O^{7+}$ ) ion irradiated CdZnO thin films for solar cell applications [J]. *Radiation Physics and Chemistry*, 2019, 162:107-113.
- [5] VIGIL O, VAILLANT L, CRUZ F, et al. Spray pyrolysis deposition of cadmium-zinc oxide thin films [J]. *Thin Solid Films*, 2000, 361:53-55.
- [6] HOLZWARTH U, GIBSON N. The Scherrer equation versus the ‘Debye-Scherrer equation’ [J]. *Nature Nanotechnology*, 2011, 6:534.
- [7] ZHU H, WANG H, WAN W, et al. Influence of oxygen and argon flow on properties of aluminum-doped zinc oxide thin films prepared by magnetron sputtering [J]. *Thin Solid Films*, 2014, 566:32-37.
- [8] SOUSSI M, FOUZRI A, SCHMERBER G. High-lighting of ferromagnetism above room temperature in Cd-doped ZnO thin films grown by MOCVD [J]. *Solid State Communications*, 2015, 218:40-44.
- [9] HARUN G, DEMET İ. The effect of Zn doping on CdO thin films grown by SILAR method at room temperatures [J]. *Physica B: Condensed Matter*, 2019, 552:119-123.
- [10] TAUC J, GRIGORPOVICE R, VANCU A. Optical properties and electronic structure of amorphous germanium [J]. *Phys Status Solidi*, 1966, 15 (2):627-637.
- [11] SHARMA K, AL-KABBI A S, SAINI G S S, et al. Effect of Cu incorporation on structural and optical properties of nanocrystalline CdSe (nc-CdSe: Cu) thin films [J]. *Journal of Alloy and Compd*, 2012, 540:198-203.
- [12] CERC K R, FELICIJAN M, ZENER B, et al. The role of thermal analysis in optimization of electrochromic effect of nickel oxide thin films, prepared by the sol-gel method: Part III [J]. *Thermochimica Acta*, 2017, 655:344-350.

~~~~~  
(上接第 125 页)

## 参考文献:

- [1] 吴丹, 朱经浩. 一类时变广义系统的稳定性 [J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2010, 38(6):925-934.
- [2] 周霞, 姚云飞, 钟守铭. 随机时滞控制系统的均方 BIBO 稳定性 [J]. *应用数学*, 2012, 25(3):672-677.
- [3] LONG J H, HU X Y, ZHANG L. Improved Newton's method with exact line searches to solve quadratic matrix equation [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 222:645-654.
- [4] 张凯院, 宁倩芝, 牛婷婷. 一类离散时间代数 Riccati 矩阵方程对称解的双迭代算法 [J]. *计算机工程与科学*, 2015, 37 (2):329-334.
- [5] LIN Y Q, BAO L, WU Q H. On the convergence rate of an iterative method for solving nonsymmetric algebraic Riccati equations [J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, 62:4178-4184.
- [6] KE Y F, MA C F. An alternating direction method for nonnegative solutions of the matrix equation  $AX + YB = C$  [J]. *Comput Appl Math*, 2017, 36:359-365.
- [7] 周富照, 邹阳芳. 子矩阵约束下矩阵方程  $AX = B$  的正交投影迭代解法 [J]. *高等学校计算数学学报*, 2015, 37(4): 337-347.
- [8] FEITZINGER F, HYLLA T, SACHS E W. Inexact Kleinman-Newton method for Riccati equations [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2009, 31(2):272-288.
- [9] 陈世军. 非线性矩阵方程中心对称解的牛顿-MCG 算法 [J]. *延边大学学报(自然科学版)*, 2019, 45(2):109-113.