文章编号： 1004-4353(2021)02-0111-05

一类负模量 Kirchhoff-Carrier 方程的解

魏其萍[1]，　王跃[2*]

(1. 贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵州 贵阳 550025；
2. 贵州大学 数学与统计学院，贵州 贵阳 550025)

摘要： 利用变分方法和反证法研究了一类含有非线性项的 Kirchhoff-Carrier 方程，证明了当 $0<\lambda<a\lambda_1$ 时，该方程至少存在一对非平凡解，且当 $\lambda\geqslant a\lambda_1$ 时该方程不存在同号解.

关键词： 负模量；Carrier 方程；变分方法；反证法

中图分类号： O231；O177　　　　**文献标识码：** A

The solution to a Kirchhoff-Carrier equation with Negative Modulus

WEI Qiping[1]，　WANG Yue[2*]

(1. *School of Data Science and Information Engineering*, *Guizhou Minzu University*, *Guiyang* 550025, *China*;
2. *School of Mathematics and Statistics*, *Guizhou University*, *Guiyang* 550025, *China*)

Abstract: In this paper, a Kirchhoff-Carrier equation with nonlinear term is considered by using the variational method and method of contradiction. We prove that there exist at least a pair of nontrivial solutions when $0<\lambda<a\lambda_1$, and the same-sign solution doesn't exist when $\lambda\geqslant a\lambda_1$.

Keywords: Negative Modulus; Carrier equation; variational method; method of contradiction

0　引言

假定 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 1)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的区域. 本文将讨论如下的 Kirchhoff-Carrier 型方程：

$$\begin{cases}-\left(a-b\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=\left(\lambda+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)u,\ x\in\Omega;\\ u=0,\ x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{1}$$

其中 a 和 b 都是任意正实数，λ 为正参数，∇表示梯度算子，Δ 表示 Laplace 算子.

1876 年，Kirhhoff[1] 首次提出了用于刻画弦振动问题的 Kirchhoff 方程. 在考虑外力作用下时 Kirchhoff 型弦振动问题的驻波解的空间部分可以表示为：

$$-\left(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x,u),\ x\in\Omega,\tag{2}$$

其中 a 和 b 都是实数，$f(x,u)$ 为抽象函数. 目前已有诸多学者利用不同的方法在 $f(x,u)$ 满足不同的假设条件时对方程(2) 进行研究，并取得了一些成果[2-8]. 在描述弦振动问题方程时，最小张力(静止位置) 处的弦振动通常需通过线性化分析才能得到振动弦的更为精确的状态 $u=u(x)$. 因此，Carrier 在文献[9] 中对弦链两端固定时的自由振动问题进行了补充刻画，并提出了如下模型：

收稿日期： 2021-03-08　　*通信作者：王跃(1988—)，男，在读博士，研究方向为微分方程及最优控制.

基金项目： 国家自然科学基金(11661021)；贵州省研究生科研基金(黔教合 YJSCXJH[2020]083)

$$\left[1+\frac{\alpha^{-2}}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi^2(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\right]^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}.$$

该模型考虑的是弦自身在前后左右 4 个方向上的运动状态,而 Kirchhoff 型问题主要考虑的是横向振动中的细小位移,因此二者属于不同的弦振动问题. 目前,已有许多学者对 Kirchhoff 型问题和 Carrier 型问题或二者的耦合问题进行了研究. 文献[10] 的作者考虑了如下问题:

$$\begin{cases}-\left(a\int_{\Omega}|u(x)|^{\gamma}\mathrm{d}x\right)\Delta u=\lambda f(x,u),\ x\in\Omega;\\ u>0,\ x\in\Omega;\\ u=0,\ x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

并利用不动点理论得到该问题存在多个解,其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 1)$, $\gamma\in(0,+\infty)$, $a:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f:\overline{\Omega}\times[0,+\infty)$ 为给定的函数. 在 $\lambda=1$, 且 $f(x,u)=H(x)g(u)$ 时,文献[11] 的作者利用不动点定理得到了 Carrier 型方程正解的存在性,并描述了其物理意义. 当 $f=h_1 g\left(\int_{\Omega}|u|^p\mathrm{d}x\right)+h_2 g\left(\int_{\Omega}|u|^r\mathrm{d}x\right)$ 时,文献[12] 的作者结合伪单调算子得到了 Carrier 解的存在性. 文献[12-15] 的作者对抛物和双曲情形等形式的Carrier型问题的应用进行了研究. 文献[16-18] 的作者对 Kirchhoff-Carrier 型问题进行了研究. 受上述文献启发,本文用变分方法研究问题(1) 解的存在性. 在本文中,记

$$\lambda_1=\inf_{u\in H_0^1(\Omega),\,u\neq 0}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)/\left(\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x\right).$$

由文献[19] 中关于特征值问题的描述可知, $\lambda_1>0$ 始终存在,并且存在 $\varphi_1\in H_0^1(\Omega)$, 使得 $-\Delta\varphi_1=\lambda_1\varphi_1$, 且当 $x\in\Omega\backslash\partial\Omega$ 时有 $\varphi_1(x)>0$.

1 结论及其证明

定理 1 当 $0<\lambda<a\lambda_1$ 时,方程(1) 至少有一对非平凡解;当 $\lambda\geqslant a\lambda_1$ 时,方程(1) 没有同号解.

证明 第 1 步,给出方程(1) 解的定义,并说明方程(1) 对应的能量泛函的临界点等价于它的解. 如果存在 $u\in H_0^1(\Omega)$, 使得对任意的 $v\in H_0^1(\Omega)$ 都有

$$\left(a-b\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x\right)\int_{\Omega}\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x=\left(\lambda+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\Omega}uv\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

则称 u 为方程(1) 的解. 定义能量泛函为 $I(u)=\frac{a}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{b}{2}\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x$.
如果 $u\in H_0^1(\Omega)$, 则根据 Gâteaux 导数的定义知,对于任意的 $v\in H_0^1(\Omega)$, 有:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\int_{\Omega}|\nabla(u+tv)|^2\mathrm{d}x-\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)=2\int_{\Omega}\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\int_{\Omega}|\nabla(u+tv)|^2\mathrm{d}x\int_{\Omega}(u+tv)^2\mathrm{d}x-\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x\right)=$$
$$2\int_{\Omega}\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x+2\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_{\Omega}uv\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\int_{\Omega}(u+tv)^2\mathrm{d}x-\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x\right)=2\int_{\Omega}uv\,\mathrm{d}x.$$

根据以上计算可得

$$\langle I'(u),v\rangle=\lim_{t\to 0}\frac{I(u+tv)-I(u)}{t}=$$
$$a\int_{\Omega}\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x-b\left(\int_{\Omega}\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_{\Omega}uv\,\mathrm{d}x\right)-\lambda\int_{\Omega}uv\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

由式(4)知,如果存在 $u\in H_0^1(\Omega)$,使得对任意的 $v\in H_0^1(\Omega)$,并且 $\langle I'(u),v\rangle\equiv 0$,则式(3)与式(4)等价,即泛函 $I(u)$ 的临界点等价于方程(1)的解.

第 2 步,证明泛函 I 满足(PS)条件.对任意的序列 $\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$,如果存在常数 $M>0$,使得当 $n\to\infty$ 时,$|I(u_n)|<M$,且在 $[H_0^1(\Omega)]^*$ 中 $I'(u_n)\to 0$,即:

$$|I(u_n)|=\left|\frac{a}{2}\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-\frac{b}{2}\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x\right|<M,\tag{5}$$

$$\langle I'(u_n),u_n\rangle=a\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-b\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x\to 0.\tag{6}$$

下面通过式(5)和式(6)证明存在 $u\in H_0^1(\Omega)$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla(u_n-u)|^2\mathrm{d}x=0$.当 $n\to\infty$ 时,将式(5)乘以 4 再减去式(6),同时再考虑到 $\lim\limits_{n\to\infty}|\langle I'(u_n),u_n\rangle|<1$,可得

$$\lim_{n\to\infty}|4\langle I'(u_n),u_n\rangle-I(u_n)|=\lim_{n\to\infty}\left|a\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\right|\leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}\{|4\langle I'(u_n),u_n\rangle|+|I(u_n)|\}\leqslant 4M+1.$$

由上式可推导出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\leqslant 4M+1$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{\lambda_1(4M+1)}{a\lambda_1-\lambda}$,从而序列 $\{u_n\}$ 有界.又因为 $H_0^1(\Omega)$ 是自反的Banach空间,故存在 $u\in H_0^1(\Omega)$ 和 $\{u_n\}$ 的子列(仍记为 $\{u_n\}$),使得当 $n\to\infty$ 时有

$$\begin{cases}\int_\Omega\nabla u_n\nabla\phi\,\mathrm{d}x\to\int_\Omega\nabla u\ \nabla\phi\,\mathrm{d}x,\ \forall\,\phi\in H_0^1(\Omega),\\ \int_\Omega u_n\phi\,\mathrm{d}x\to\int_\Omega u\,\phi\,\mathrm{d}x,\ \forall\,\phi\in L^2(\Omega),\\ u_n(x)\to u(x),\ \text{a. e. }x\in\Omega.\end{cases}\tag{7}$$

下证当 $n\to\infty$ 时,在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n\to u$,即 $\int_\Omega|\nabla(u_n-u)|^2\mathrm{d}x\to 0$.由 $\langle I'(u_n),u_n-u\rangle\to 0$ 可得:

$$\left(a-b\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega\nabla u_n\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x-b\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\int_\Omega u_n(u_n-u)\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega u_n(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0.$$

再由式(7)可知,当 $n\to\infty$ 时 $\int_\Omega u_n(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$,因此 $\left(a-b\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega\nabla u_n\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$,即 $a-b\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x\to 0$ 或 $\int_\Omega\nabla u_n\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$.若 $a-b\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x\to 0$ 成立,将其代入式(6)可得在 $n\to\infty$ 时有

$$-b\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x=-\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x\left(b\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\lambda\right)\to 0.$$

由于 $\left(b\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\lambda\right)\geqslant\lambda>0$,因此可得 $\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x\to 0$,这与前提条件相矛盾;因此,$\int_\Omega\nabla u_n\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$.当 $\int_\Omega\nabla u_n\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$ 时,由式(7)还可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega\nabla u_n\nabla u\,\mathrm{d}x=\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x$,从而知当 $n\to\infty$ 时 $\int_\Omega(|\nabla u_n|^2-2\nabla u_n\nabla u+|\nabla u|^2)\mathrm{d}x\to 0$,即 $\int_\Omega|\nabla(u_n-u)|^2\mathrm{d}x\to 0$.因此,泛函 I 满足(PS)条件.

第 3 步,利用山路引理[20]证明当 $0<\lambda<a\lambda_1$ 时,问题(1)的解存在.当 $0<\lambda<a\lambda_1$ 时,显然有 $I(0)=0$.取 $r=\sqrt{\frac{a\lambda_1-\lambda}{2b}}>0$,则当 $\sqrt{\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x}=r$ 时有:

$$I(u)=\frac{a}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{b}{2}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\frac{a\lambda_1-\lambda}{2\lambda_1}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{b}{2\lambda_1}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2=\frac{(a\lambda_1-\lambda)^2}{8b\lambda_1}:=\rho>0.$$

从上式可知,存在 $r>0$ 和 $\rho>0$,使得当 $\sqrt{\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x}=r$ 时,有 $I(u)\geqslant\rho>0$.

取 $\tilde{t}=\left(\frac{b}{2(a\lambda_1-\lambda)}\int_\Omega|\nabla\varphi_1|^2\mathrm{d}x\right)^{-1/2}$,于是有 $\tilde{u}:=\tilde{t}\varphi_1\in H_0^1(\Omega)$. 由于 $\int_\Omega|\nabla\varphi_1|^2=\lambda_1\int_\Omega\varphi_1^2\mathrm{d}x$,因此有

$$\left[\int_\Omega|\nabla\tilde{u}|^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}=\left[\int_\Omega|\nabla(\tilde{t}\varphi_1)|^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}=\left[\frac{2(a\lambda_1-\lambda)}{b}\right]^{1/2}=2r>r,$$

$$I(\tilde{u})=\frac{a}{2}\cdot\frac{2(a\lambda_1-\lambda)}{b}-\frac{b}{2}\cdot\frac{2(a\lambda_1-\lambda)}{b\lambda_1}\cdot\frac{2(a\lambda_1-\lambda)}{b}-\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{2(a\lambda_1-\lambda)}{b\lambda_1}=$$

$$\frac{a(a\lambda_1-\lambda)}{b}-\frac{2[a\lambda_1-\lambda]^2}{b\lambda_1}-\frac{\lambda(a\lambda_1-\lambda)}{b\lambda_1}=-\frac{[a\lambda_1-\lambda]^2}{b\lambda_1}<0.$$

由上式可知,存在 $\tilde{u}=\tilde{t}\varphi_1\in H_0^1(\Omega)$,使得 $I(\tilde{u})<0$,并且 $\sqrt{\int_\Omega|\nabla\tilde{u}|^2\mathrm{d}x}>r$. 综上可知,泛函满足山路结构.

令 $\Gamma=\{\tau(t)\in C^1([0,1],H_0^1(\Omega))\mid\tau(0)=0,\tau(1)=\tilde{u}\}$. 由于

$$I[\tau(0)]=0,\ I[\tau(1)]=-\frac{[a\lambda_1-\lambda]^2}{b\lambda_1}<0,$$

因此总存在 $t\in(0,1)$,使得 $I[\tau(t)]\geqslant\rho>0$,故有 $c:=\inf\limits_{\tau\in\Gamma}\sup\limits_{t\in[0,1]}I(\tau(t))\geqslant\rho=\frac{(a\lambda_1-\lambda_1)^2}{8b\lambda_1}>0$.由山路引理知,存在$\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$,使得 $n\to\infty$ 时,$I(u_n)\to c$,且 $I'(u_n)\to 0$. 再由第 2 步可知,I 满足 (PS) 条件,因此 c 是 I 的一个临界值,即存在 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得 $I(u)=c>0$, $I'(u)=0$,因此 u 是问题(1) 的一个非平凡解.

由于 u 是方程(1) 的非平凡解,因此对任意的 $v\in H_0^1(\Omega)$ 式(3) 总是成立. 特别地,当 $v=u$ 时,有

$$\left(a-b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x=\left(\lambda+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega u^2\mathrm{d}x>0.$$

由上式可知,$a-b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x>0$.再根据强极大值原理可知,$u$ 是问题(1) 的正或负解. 令 $\phi=-u$,则对任意的 $v\in H_0^1(\Omega)$ 有

$$\left(a-b\int_\Omega|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega\nabla\phi\nabla v\,\mathrm{d}x-\left(\lambda+b\int_\Omega|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega\phi v\,\mathrm{d}x=0.$$

由上式可知,ϕ 也是问题(1) 的解,且 $\phi(x)\not\equiv u(x)$,因此 u 和 ϕ 是问题(1) 的一对一正一负的解.

第 4 步,利用反证法证明当 $\lambda\geqslant a\lambda_1$ 时,问题(1) 不存在同号解. 假设 $\lambda\geqslant a\lambda_1$ 时 u 是方程(1) 的同号解,则将其代入方程(1) 后在等号两端同乘以 φ_1 并在 Ω 上积分可得:

$$\left(a-b\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega\nabla u\nabla\varphi_1\mathrm{d}x\geqslant\left(a\lambda_1+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega u\varphi_1\mathrm{d}x.$$

由上式可推出当 u 是方程(1) 的正解时,有

$$0>-\lambda_1\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\int_\Omega u\varphi_1\mathrm{d}x=-\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\int_\Omega\nabla u\nabla\varphi_1\mathrm{d}x\geqslant\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_\Omega u\varphi_1\mathrm{d}x>0;$$

当 u 是方程(1) 的负解时,有

$$0<-\lambda_1\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\int_\Omega u\varphi_1\mathrm{d}x=-\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\int_\Omega\nabla u\nabla\varphi_1\mathrm{d}x\geqslant\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_\Omega u\varphi_1\mathrm{d}x<0.$$

由上式可得 $\lambda<a\lambda_1$ 时 u 不可能是方程(1) 的正解或负解,故方程(1) 不存在同号解.

综上所述，当 $0<\lambda<a\lambda_1$ 时，方程(1)至少存在一个正解和一个负解；当 $\lambda \geqslant a\lambda_1$ 时，方程(1)不存在同号解．定理 1 证毕．

参考文献：

[1] KIRHHOFF G R. Vorlesungen über Matematische Physik：Mechanik[M]. Leipzig：Druck und von B G Teubner，1876.

[2] WANG Y，SUO H M，LEI C Y. Multiple positive solutions for a nonlocal problem involving critical exponent[J]. Electronic Journal of Differential Equations，2017，2017(275)：1-11.

[3] 王跃，熊宗洪，魏其萍，等．椭圆型广义 Kirchhoff 问题的多重解[J]．扬州大学学报(自然科学版)，2020，23(5)：19-22.

[4] AN Y C，SUO H M. Existence of solutions for the Neumann boundary problem of Kirchhoff type equations[J]. Journal of Spectral Theory，2019，9(2)：547-568.

[5] 钱晓涛，石志高．一类 Kirchhoff 型方程解的存在性和多重性[J]．延边大学学报(自然科学版)，2018，44(4)：302-305.

[6] 王跃，索洪敏，韦维．无边界约束的一类新 Kirchhoff 型问题的古典解[J]．数学物理学报，2020，40A(4)：857-868.

[7] 王跃，叶红艳，雷俊，等．带线性项 Kirchhoff 型问题的无穷多古典解[J]．广西师范大学学报(自然科学版)，2020，38(6)：37-45.

[8] WANG Y，YANG X. Infinitely many solutions for a new Kirchhoff type equation with subcritical exponent[J/OL]. Applicable Analysis.[2020-10-12]. https://www.researchgate.net/publication/341786815.

[9] CARRIER G F. On the non-linear vibration problem of the elastic string[J]. Quarterly of Applied Mathematics，1945，3(2)：157-165.

[10] YAN B Q，WANG D C. The multiplicity of positive solutions for a class of nonlocal elliptic problem[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2016，442(1)：72-102.

[11] CORRÊA F. On positive solutions of nonlocal and nonvariational elliptic problems[J]. Nonlinear Analysis：Theory Methods and Applications，2004，59(7)：1147-1155.

[12] ALVES C O，COVEI D P. Existence of solution for a class of nonlocal elliptic problem via sub-supersolution method[J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2015，23：1-8.

[13] CHIPOT M，LOVAT B. Some remarks on non local elliptic and parabolic problems[J]. Nonlinear Analysis：Theory Methods and Applications，1997，30(7)：4619-4627.

[14] 陈才生，王如云．非线性 Carrier 方程的整体解[J]．南京大学学报(数学半年刊)，2001，18(2)：214-220.

[15] 张迎周，陈才生．非线性 Carrier 方程解的能量衰减估计[J]．河海大学学报(自然科学版)，2002，30(5)：17-20.

[16] TRUONG L X，NGOC L，LONG N T. High-order iterative schemes for a nonlinear Kirchhoff-Carrier wave equation associated with the mixed homogeneous conditions[J]. Nonlinear Analysis：Theory Methods and Applications，2009，71(1/2)：467-484.

[17] GUESMIA S. Existence results for some Kirchhoff-Carrier problems[J]. Nonlinear Analysis：Theory Methods and Applications，2012，75(5)：2904-2921.

[18] BISOGNIN E. Hyperbolic parabolic equations with nonlinearity of Kirchhoff-Carrier type[J]. Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid，1995，8(2)：401-430.

[19] EVANS L C. Partial Differential Equations[M]. Providence (Rhode Island)：American Mathematical Society，2010.

[20] AMBROSETTI A，RABINOWITZ P H. Dual variational methods in critical point theory and applications[J]. Journal of Functional Analysis，1973，14(4)：349-381.