文章编号: 1004-4353(2021)02-0105-06

一类具有 Beddington-DeAngelis 功能反应的离散竞争系统的概周期解

张杰华[1], 王清娟[2]
(1.阳光学院,福建 福州 350015; 2.福建省湄洲湾职业技术学校,福建 莆田 351254)

摘要: 针对一类具有 Beddington-DeAngelis 功能反应的离散竞争系统,运用差分不等式和通过构造适当的 Lyapunov 函数,证明了该系统具有持久性和全局吸引性.利用差分概周期方程的壳理论,得到了保证该系统存在唯一的概周期解的充分条件.所得结果补充了文献[3]和文献[4]的工作.

关键词: 离散竞争系统; 概周期解; 全局吸引性; 持久性
中图分类号: O175.14 **文献标识码:** A

Almost periodic solutions of a discrete competitive system with Beddington-DeAngelis functional response

ZHANG Jiehua[1], WANG Qingjuan[2]
(1. *Yango University*, *Fuzhou* 350015, *China*;
2. *Fujiansheng Meizhouwan Vocational Technology School*, *Putian* 351254, *China*)

Abstract: A class of discrete competition system with Beddington-DeAngelis functional response is studied in this paper. By applying the difference inequality theory and constructing the suitable Lyapunov functional, we show that the system is permanent and globally attractive. Further, by using almost periodic functional hull theory, sufficient conditions which guarantee the existence of a unique global attractive positive almost periodic sequence solution of the system. The results supplement the literature [3] and [4].

Keywords: discrete competition system; almost periodic solution; global attractive; permanence

0 引言

1975 年,Beddington[1] 和 DeAngelis[2] 首次提出 Beddington-DeAngelis 功能反应模型后,很多学者对该模型进行了研究,并得到了许多很好的结果[3-7].文献[3]的作者研究了如下具有 Beddington-DeAngelis 功能反应的连续竞争系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_1(t)\left(r_1(t)-a_1(t)x_1(t)-\dfrac{b_1(t)x_2(t)}{\alpha_1(t)+\beta_1(t)x_1(t)+\gamma_1(t)x_2(t)}\right),\\ \dot{x}_2(t)=x_2(t)\left(r_2(t)-a_2(t)x_2(t)-\dfrac{b_2(t)x_1(t)}{\alpha_2(t)+\beta_2(t)x_1(t)+\gamma_2(t)x_2(t)}\right),\end{cases}\tag{1}$$

并得到了该系统具有持久性、绝灭性和概周期解的存在性等结果.

文献[4]的作者研究了与系统(1)相对应的具有 Beddington-DeAngelis 功能反应的离散竞争模型:

收稿日期: 2021-02-23 **基金项目:** 福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JAT190976,JAT190975)
作者简介: 张杰华(1983—),女,副教授,研究方向为生物数学.

$$\begin{cases} x_1(n+1)=x_1(n)\exp\left\{r_1(n)-a_1(n)x_1(n)-\dfrac{b_1(n)x_2(n)}{\alpha_1(n)+\beta_1(n)x_1(n)+\gamma_1(n)x_2(n)}\right\}, \\ x_2(n+1)=x_2(n)\exp\left\{r_2(n)-a_2(n)x_2(n)-\dfrac{b_2(n)x_1(n)}{\alpha_2(n)+\beta_2(n)x_1(n)+\gamma_2(n)x_2(n)}\right\}. \end{cases} \tag{2}$$

其中:$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别表示两个竞争种群在第 n 代的种群密度;$r_i(n)(i=1,2)$ 表示两个种群的内禀增长率;$a_i(n)(i=1,2)$ 为种内竞争系数;$b_i(n)(i=1,2)$ 为种间竞争系数;$r_i(n)$、$a_i(n)$、$b_i(n)$、$\alpha_i(n)$、$\beta_i(n)$、$\gamma_i(n)(i=1,2)$ 均为非负有界序列. 文献[4]的作者通过构造适当的 Lyapunov 绝灭函数,得到了保证该系统中某个种群绝灭和另外一个种群全局吸引的充分性条件,但文献[4]的作者并未探讨系统(2)的概周期性. 由于生物种群的生存环境是随时间而改变的,而且环境会随着季节呈现出非严格意义上的周期性变化,因此研究生态系统中的概周期性具有十分重要的现实意义. 本文利用文献[8-10]的分析方法,通过构造适当的 Lyapunov 函数和运用差分概周期方程的壳理论,对系统(2)持续生存、概周期解的存在唯一性和全局吸引性进行了研究.

为了满足生物种群的实际意义,设系统(2)满足初始条件 $x_1(0)>0$, $x_2(0)>0$,且对任意的 $n\geqslant 0$ 都有 $x_1(n)>0$, $x_2(n)>0$. 对于任一有界序列 $\{h(n)\}$,定义 $h^l=\inf\limits_{n\in\mathbf{N}}\{h(n)\}$, $h^u=\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\{h(n)\}$.

1 相关引理

定义 1[9] 设 S 是集合 D 的任一紧集,τ_n 是一个序列,并且记 $H(f)=\{g(n,x): \lim\limits_{k\to\infty} f(n+\tau_k, x)=g(n,x)$ 在 $\mathbf{Z}\times S$ 上一致成立$\}$,则称 $H(f)$ 为 f 的壳.

定义 2[10] 设$(x_1(n),x_2(n))$是系统(2)的解,若满足 $0<\inf\limits_{n\in\mathbf{Z}} x_i(n)\leqslant \sup\limits_{n\in\mathbf{Z}} x_i(n)<+\infty$, $i=1,2$,则称$(x_1(n),x_2(n))$为严格正解.

定义 3[11] 如果 x 的 ε-移位数集 $E\{\varepsilon,x\}$ ($E\{\varepsilon,x\}=\{\tau\in\mathbf{Z}: |x(n+\tau)-x(n)|<\varepsilon\}$, $\forall n\in\mathbf{Z}$, $\varepsilon>0$)关于 $\mathbf{Z}$ 相对稠密(即对任意 $\varepsilon>0$ 存在一个整数 $l\,(l>0)$,且每个长为 l 的离散区间总包含一个整数 $\tau\in E\{\varepsilon,x\}$),且使得对 $\forall n\in\mathbf{Z}$ 都有 $|x(n+\tau)-x(n)|<\varepsilon$,则称序列 $x:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}^k$ 为概周期序列,τ 为 $x(n)$ 的 ε-移位数.

引理 1[12] 序列 $\{x(n)\}$ 是概周期的当且仅当对任一序列 $\{h_i\}\subset\mathbf{Z}$,存在一个子序列 $\{h_{ij}\}\subset\{h_i\}$,使得当 $j\to\infty$ 时,$\{x(n+h_{ij})\}$ 对 $n\in\mathbf{Z}$ 是一致收敛的,且其极限也是概周期的.

引理 2[13] 假设序列 $\{x(n)\}$ 满足 $x(n)>0$, $a(n)$ 和 $b(n)$ 均为有正的上下界的非负序列. 若 $x(n+1)\leqslant x(n)\exp\{a(n)-b(n)x(n)\}$, $n\in\mathbf{N}$,则 $\limsup\limits_{n\to+\infty} x(n)\leqslant \dfrac{\exp(a^u-1)}{b^l}$.

引理 3[10] 假设序列 $\{x(n)\}$ 满足 $x(n+1)\geqslant x(n)\exp\{a(n)-b(n)x(n)\}$, $\limsup\limits_{n\to+\infty} x(n)\leqslant x^*$, $n\geqslant N_0$,且 $x(N_0)>0$, $N_0\in\mathbf{N}$,其中 $a(n)$ 和 $b(n)$ 均为有正的上下界的非负序列,则

$$\liminf_{n\to\infty} x(n)\geqslant \min\left\{\frac{a^l}{b^u}\exp(a^l-b^u x^*), \frac{a^l}{b^u}\right\}.$$

2 持久性和全局吸引性

定理 1 设$(x_1(n),x_2(n))$是系统(2)的任一正解,若系统(2)满足

$$r_1^l\alpha_1^l>(b_1^u-r_1^l\gamma_1^l)M_2,\ r_2^l\alpha_2^l>(b_2^u-r_2^l\gamma_2^l)M_1, \tag{H$_1$}$$

则该系统是持久的,即存在正数 m_i 和 $M_i(i=1,2)$,使得

$$m_i\leqslant \liminf_{n\to+\infty} x_i(n)\leqslant \limsup_{n\to+\infty} x_i(n)\leqslant M_i,\ i=1,2. \tag{3}$$

其中 $M_i=\dfrac{1}{a_i^l}\exp\{r_i^u-1\}$, $m_i=\min\left\{\dfrac{A_i}{a_i^u}\exp(A_i-a_i^u M_i), \dfrac{A_i}{a_i^u}\right\}$.

证明　由条件(H_1)可知存在充分小的 $\varepsilon>0$，使得 $r_1^l\alpha_1^l>(b_1^u-r_1^l\gamma_1^l)(M_2+\varepsilon)$，$r_2^l\alpha_2^l>(b_2^u-r_2^l\gamma_2^l)(M_1+\varepsilon)$，从而有：

$$r_1^l-\frac{b_1^u(M_2+\varepsilon)}{\alpha_1^l+\gamma_1^l(M_2+\varepsilon)}>0,\ r_2^l-\frac{b_2^u(M_1+\varepsilon)}{\alpha_2^l+\gamma_2^l(M_1+\varepsilon)}>0. \tag{4}$$

设$(x_1(n),x_2(n))$是系统(2)的任一解，则由系统(2)的两个方程可得 $x_i(n+1)\leqslant x_i(n)\exp\{r_i(n)-a_i(n)x_i(n)\}$. 对上式应用引理 2 可得：

$$\limsup_{n\to+\infty}x_i(n)\leqslant\frac{1}{a_i^l}\exp\{r_i^u-1\}\triangleq M_i,\ i=1,2. \tag{5}$$

因此，对上述的 $\varepsilon>0$，存在 $N_0>0$，且当 $n\geqslant N_0$ 时有 $x_i(n)\leqslant M_i+\varepsilon$，$i=1,2$. 由该式和系统(2)的第 1 个方程可得：

$$x_1(n+1)\geqslant x_1(n)\exp\left\{r_1(n)-a_1(n)x_1(n)-\frac{b_1(n)x_2(n)}{\alpha_1(n)+\gamma_1(n)x_2(n)}\right\}\geqslant$$

$$x_1(n)\exp\left\{r_1^l-a_1^ux_1(n)-\frac{b_1^u(M_2+\varepsilon)}{\alpha_1^l+\gamma_1^l(M_2+\varepsilon)}\right\}=x_1(n)\exp\{A_1^\varepsilon-a_1^ux_1(n)\}, \tag{6}$$

其中 $A_1^\varepsilon=r_1^l-\dfrac{b_1^u(M_2+\varepsilon)}{\alpha_1^l+\gamma_1^l(M_2+\varepsilon)}$. 对式(6)应用引理 3 可得

$$\liminf_{n\to+\infty}x_1(n)\geqslant\min\left\{\frac{A_1^\varepsilon}{a_1^u}\exp(A_1^\varepsilon-a_1^uM_1),\frac{A_1^\varepsilon}{a_1^u}\right\}.$$

在上式中令 $\varepsilon\to0$，于是可得：

$$\liminf_{n\to+\infty}x_1(n)\geqslant\min\left\{\frac{A_1}{a_1^u}\exp(A_1-a_1^uM_1),\frac{A_1}{a_1^u}\right\}\triangleq m_1, \tag{7}$$

其中 $A_1=r_1^l-\dfrac{b_1^uM_2}{\alpha_1^l+\gamma_1^lM_2}$. 类似式(7)的证明可得：

$$\liminf_{n\to+\infty}x_2(n)\geqslant\min\left\{\frac{A_2}{a_2^u}\exp(A_2-a_2^uM_2),\frac{A_2}{a_2^u}\right\}\triangleq m_2, \tag{8}$$

其中 $A_2=r_2^l-\dfrac{b_2^uM_1}{\alpha_2^l+\gamma_2^lM_1}$. 式(5)、(7)和式(8)表明，当($H_1$)成立时，系统(2)是持久的. 证毕.

定理 2　设

$$\begin{cases}\lambda_1\mu_1-\lambda_1\dfrac{b_1^u\beta_1^uM_2}{E_1^2}-\lambda_2\dfrac{b_2^u\alpha_2^u}{E_2^2}-\lambda_2\dfrac{b_2^u\gamma_2^uM_2}{E_2^2}>0,\\ \lambda_2\mu_2-\lambda_2\dfrac{b_2^u\gamma_2^uM_1}{E_2^2}-\lambda_1\dfrac{b_1^u\alpha_1^u}{E_1^2}-\lambda_1\dfrac{b_1^u\beta_1^uM_1}{E_1^2}>0,\end{cases} \tag{H_2}$$

其中 $M_i=\dfrac{1}{a_i^l}\exp\{r_i^u-1\}$，$m_i=\min\left\{\dfrac{A_i}{a_i^u}\exp(A_i-a_i^uM_i),\dfrac{A_i}{a_i^u}\right\}$，$\mu_i=\min\left\{a_i^l,\dfrac{2}{M_i}-a_i^u\right\}$，$E_i=\alpha_i^l+\beta_i^lm_1+\gamma_i^lm_2$，$i=1,2$. 若系统(2)满足($H_1$)和($H_2$)，则系统(2)是全局吸引的，即系统(2)的任意两个正解$(x_1(n),x_2(n))$和$(x_1^*(n),x_2^*(n))$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_1(n)-x_1^*(n)|=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}|x_2(n)-x_2^*(n)|=0$，$i=1,2$.

证明　由(H_2)可知，可选择正常数 $\delta>0$ 和充分小的 $\varepsilon>0$，使得：

$$\lambda_1\mu_1^\varepsilon-\lambda_1\frac{b_1^u\beta_1^u(M_2+\varepsilon)}{E_{1\varepsilon}^2}-\lambda_2\frac{b_2^u\alpha_2^u}{E_{2\varepsilon}^2}-\lambda_2\frac{b_2^u\gamma_2^u(M_2+\varepsilon)}{E_{2\varepsilon}^2}>\delta,$$

$$\lambda_2\mu_2^\varepsilon-\lambda_2\frac{b_2^u\gamma_2^u(M_1+\varepsilon)}{E_{2\varepsilon}^2}-\lambda_1\frac{b_1^u\alpha_1^u}{E_{1\varepsilon}^2}-\lambda_1\frac{b_1^u\beta_1^u(M_1+\varepsilon)}{E_{1\varepsilon}^2}>\delta,$$

其中 $\mu_i^\varepsilon=\min\left\{a_i^l,\dfrac{2}{M_i+\varepsilon}-a_i^u\right\}$，$E_{i\varepsilon}=\alpha_i^l+\beta_i^l(m_1-\varepsilon)+\gamma_i^l(m_2-\varepsilon)$，$i=1,2$.

若$(x_1(n),x_2(n))$和$(x_1^*(n),x_2^*(n))$是系统(2)的任意正解,则根据定理1可知,对上面的ε存在常数$N_1>0$,使得对$n\geqslant N_1$和$i=1,2$有$m_i-\varepsilon\leqslant x_i(n)\leqslant M_i+\varepsilon$,$m_i-\varepsilon\leqslant x_i^*(n)\leqslant M_i+\varepsilon$.

定义$V_1(n)=|\ln x_1(n)-\ln x_1^*(n)|$,则由系统(2)可得:

$$V_1(n+1)=|\ln x_1(n+1)-\ln x_1^*(n+1)|\leqslant|\ln x_1(n)-\ln x_1^*(n)-a_1(n)(x_1(n)-x_1^*(n))|+ b_1(n)\left|\frac{x_2(n)}{\alpha_1(n)+\beta_1(n)x_1(n)+\gamma_1(n)x_2(n)}-\frac{x_2^*(n)}{\alpha_1(n)+\beta_1(n)x_1^*(n)+\gamma_1(n)x_2^*(n)}\right|.$$

对上式利用中值定理可得$\ln x_1(n)-\ln x_1^*(n)=\frac{1}{\theta_1(n)}(x_1(n)-x_1^*(n))$,其中$\theta_1(n)$介于$x_1(n)$和$x_1^*(n)$之间.因此,由$V_1(n+1)-V_1(n)$可得:

$$\begin{aligned}\Delta V_1(n)\leqslant&-\left(\frac{1}{\theta_1(n)}-\left|\frac{1}{\theta_1(n)}-a_1(n)\right|\right)|x_1(n)-x_1^*(n)|+\frac{b_1(n)\alpha_1(n)}{B_1}|x_2(n)-x_2^*(n)|+\\&\frac{b_1(n)\beta_1(n)x_2(n)}{B_1}|x_1(n)-x_1^*(n)|+\frac{b_1(n)\beta_1(n)x_1(n)}{B_1}|x_2(n)-x_2^*(n)|\leqslant\\&-\min\left\{a_1^l,\frac{2}{M_1+\varepsilon}-a_1^u\right\}|x_1(n)-x_1^*(n)|+\frac{b_1^u\alpha_1^u}{E_{1\varepsilon}^2}|x_2(n)-x_2^*(n)|+\\&\frac{b_1^u\beta_1^u(M_2+\varepsilon)}{E_{1\varepsilon}^2}|x_1(n)-x_1^*(n)|+\frac{b_1^u\beta_1^u(M_1+\varepsilon)}{E_{1\varepsilon}^2}|x_2(n)-x_2^*(n)|,\end{aligned}\tag{9}$$

其中$B_1=(\alpha_1(n)+\beta_1(n)x_1(n)+\gamma_1(n)x_2(n))(\alpha_1(n)+\beta_1(n)x_1^*(n)+\gamma_1(n)x_2^*(n))$.

定义$V_2(n)=|\ln x_2(n)-\ln x_2^*(n)|$,则通过类似于式(9)的证明可得:

$$\begin{aligned}\Delta V_2(n)\leqslant&-\left(\frac{1}{\theta_2(n)}-\left|\frac{1}{\theta_2(n)}-a_2(n)\right|\right)|x_2(n)-x_2^*(n)|+\frac{b_2(n)\alpha_2(n)}{B_2}|x_1(n)-x_1^*(n)|+\\&\frac{b_2(n)\gamma_2(n)x_1(n)}{B_2}|x_2(n)-x_2^*(n)|+\frac{b_2(n)\gamma_2(n)x_2(n)}{B_2}|x_1(n)-x_1^*(n)|\leqslant\\&-\min\left\{a_2^l,\frac{2}{M_2+\varepsilon}-a_2^u\right\}|x_2(n)-x_2^*(n)|+\frac{b_2^u\alpha_2^u}{E_{2\varepsilon}^2}|x_1(n)-x_1^*(n)|+\\&\frac{b_2^u\gamma_2^u(M_1+\varepsilon)}{E_{2\varepsilon}^2}|x_2(n)-x_2^*(n)|+\frac{b_2^u\gamma_2^u(M_2+\varepsilon)}{E_{2\varepsilon}^2}|x_1(n)-x_1^*(n)|,\end{aligned}\tag{10}$$

其中$\theta_2(n)$介于$x_2(n)$和$x_2^*(n)$之间,$B_2=(\alpha_2(n)+\beta_2(n)x_1(n)+\gamma_2(n)x_2(n))\times(\alpha_2(n)+\beta_2(n)x_1^*(n)+\gamma_2(n)x_2^*(n))$.

构造Lyapunov函数$V(n)=\lambda_1V_1(n)+\lambda_2V_2(n)$.由式(9)和式(10)可知,对于任意的$n\geqslant N_1$有:

$$\begin{aligned}\Delta V(n)\leqslant&-\left(\lambda_1\mu_1^\varepsilon-\lambda_1\frac{b_1^u\beta_1^u(M_2+\varepsilon)}{E_{1\varepsilon}^2}-\lambda_2\frac{b_2^u\alpha_2^u}{E_{2\varepsilon}^2}-\lambda_2\frac{b_2^u\gamma_2^u(M_2+\varepsilon)}{E_{2\varepsilon}^2}\right)|x_1(n)-x_1^*(n)|-\\&\left(\lambda_2\mu_2^\varepsilon-\lambda_2\frac{b_2^u\gamma_2^u(M_1+\varepsilon)}{E_{2\varepsilon}^2}-\lambda_1\frac{b_1^u\alpha_1^u}{E_{1\varepsilon}^2}-\lambda_1\frac{b_1^u\beta_1^u(M_1+\varepsilon)}{E_{1\varepsilon}^2}\right)|x_2(n)-x_2^*(n)|\leqslant\\&-\delta(|x_1(n)-x_1^*(n)|+|x_2(n)-x_2^*(n)|).\end{aligned}\tag{11}$$

对不等式(11)两边同时求和可得:

$$\sum_{n=N_1}^{k}(V(n+1)-V(n))\leqslant-\delta\sum_{n=N_1}^{k}(|x_1(n)-x_1^*(n)|+|x_2(n)-x_2^*(n)|).$$

由上式可得$V(k+1)+\delta\sum_{n=N_1}^{k}(|x_1(n)-x_1^*(n)|+|x_2(n)-x_2^*(n)|)\leqslant V(N_1)$,即:

$$\sum_{n=N_1}^{k}(|x_1(n)-x_1^*(n)|+|x_2(n)-x_2^*(n)|)\leqslant\frac{V(N_1)}{\delta}.$$

因此，$\sum_{n=N_1}^{+\infty}(|x_1(n)-x_1^*(n)|+|x_2(n)-x_2^*(n)|)\leqslant\frac{V(N_1)}{\delta}<+\infty$，并由此可推出

$$\lim_{n\to+\infty}(|x_1(n)-x_1^*(n)|+|x_2(n)-x_2^*(n)|)=0.$$

故 $\lim_{n\to+\infty}|x_1(n)-x_1^*(n)|=0$，$\lim_{n\to+\infty}|x_2(n)-x_2^*(n)|=0$. 定理 2 证毕.

3　系统(2)的概周期解

如果系统(2)的所有参数 $r_i(n)$、$a_i(n)$、$b_i(n)$、$\alpha_i(n)$、$\beta_i(n)$、$\gamma_i(n)(i=1,2)$ 都是概周期序列，则根据引理 1 知，存在整数序列 τ_k，当 $k\to\infty$，$\tau_k\to\infty$ 时，对 $i=1,2$ 和任意 $k\in\mathbf{Z}$ 一致有 $r_i(n+\tau_k)\to r_i^*(n)$，$a_i(n+\tau_k)\to a_i^*(n)$，$b_i(n+\tau_k)\to b_i^*(n)$，$\alpha_i(n+\tau_k)\to\alpha_i^*(n)$，$\beta_i(n+\tau_k)\to\beta_i^*(n)$，$\gamma_i(n+\tau_k)\to\gamma_i^*(n)$. 由此可推出如下系统(2)的一个壳方程：

$$\begin{cases}x_1(n+1)=x_1(n)\exp\left\{r_1^*(n)-a_1^*(n)x_1(n)-\dfrac{b_1^*(n)x_2(n)}{\alpha_1^*(n)+\beta_1^*(n)x_1(n)+\gamma_1^*(n)x_2(n)}\right\},\\ x_2(n+1)=x_2(n)\exp\left\{r_2^*(n)-a_2^*(n)x_2(n)-\dfrac{b_2^*(n)x_1(n)}{\alpha_2^*(n)+\beta_2^*(n)x_1(n)+\gamma_2^*(n)x_2(n)}\right\}.\end{cases}\tag{12}$$

根据差分概周期理论可知，如果系统(2)满足条件(H_1)和(H_2)，则方程(12)也满足条件(H_1)和(H_2).

引理 4[10]　若系统(2)的每个壳方程都有唯一的严格正解，则系统(2)有唯一的严格正概周期解.

定理 3　若系统(2)满足条件(H_1)和(H_2)，则系统(2)存在唯一的概周期解，且系统是全局吸引的.

证明　由引理 4 可知，只需证明系统(2)的每个壳方程都有唯一的严格正解即可.

首先，证明系统(2)的每个壳方程至少有一个严格正解. 由概周期泛函基本理论[10]可知，存在一个整数序列 $\{\tau_k\}$，且当 $k\to\infty$，$\tau_k\to\infty$ 时，对 $i=1,2$ 和任意 $n\in\mathbf{Z}$ 一致有 $r_i(n+\tau_k)\to r_i^*(n)$，$a_i(n+\tau_k)\to a_i^*(n)$，$b_i(n+\tau_k)\to b_i^*(n)$，$\alpha_i(n+\tau_k)\to\alpha_i^*(n)$，$\beta_i(n+\tau_k)\to\beta_i^*(n)$，$\gamma_i(n+\tau_k)\to\gamma_i^*(n)$. 假设$(x_1(n),x_2(n))$是壳方程(12)的任一正解，则由定理 1 可知，对任意的 $\varepsilon>0$ 存在一个正整数 N_2，使得当 $n\geqslant N_2$ 时，有 $m_i-\varepsilon\leqslant x_i(n)\leqslant M_i+\varepsilon$，$i=1,2$. 定义 $x_{ik}(n)=x_i(n+\tau_k)$，其中 $n\geqslant N_2-\tau_k$，$k\in\mathbf{Z}^+$，$i=1,2$. 对任意的正整数 q，取 $\{x_{ik}(n):k\geqslant q\}$ 的子列，且为了讨论方便仍记子列为 $\{x_{ik}(n)\}$. 因为 $x_{ik}(n)$ 是壳方程(12)的解，易知当 $k\to\infty$ 时，$\{x_{ik}(n)\}$ 在 $\mathbf{Z}$ 的任意有限区间上收敛. 因此，存在序列 $\{y_i(n)\}$ 满足当 $k\to\infty$ 时 $x_{ik}(n)\to y_i(n)$，$n\in\mathbf{Z}$，$i=1,2$. 又因为

$$x_{1k}(n+1)=x_{1k}(n)\times$$
$$\exp\left\{r_1^*(n+\tau_k)-a_1^*(n+\tau_k)x_{1k}(n)-\frac{b_1^*(n+\tau_k)x_{2k}(n)}{\alpha_1^*(n+\tau_k)+\beta_1^*(n+\tau_k)x_{1k}(n)+\gamma_1^*(n+\tau_k)x_{2k}(n)}\right\},$$
$$x_{2k}(n+1)=x_{2k}(n)\times$$
$$\exp\left\{r_2^*(n+\tau_k)-a_2^*(n+\tau_k)x_{2k}(n)-\frac{b_2^*(n+\tau_k)x_{1k}(n)}{\alpha_2^*(n+\tau_k)+\beta_2^*(n+\tau_k)x_{1k}(n)+\gamma_2^*(n+\tau_k)x_{2k}(n)}\right\},$$

所以可推出

$$y_1(n+1)=y_1(n)\exp\left\{r_1^*(n)-a_1^*(n)y_1(n)-\frac{b_1^*(n)y_2(n)}{\alpha_1^*(n)+\beta_1^*(n)y_1(n)+\gamma_1^*(n)y_2(n)}\right\},$$

$$y_2(n+1)=y_2(n)\exp\left\{r_2^*(n)-a_2^*(n)y_2(n)-\frac{b_2^*(n)y_1(n)}{\alpha_2^*(n)+\beta_2^*(n)y_1(n)+\gamma_2^*(n)y_2(n)}\right\}.$$

由上式显然知$(y_1(n),y_2(n))$是壳方程(12)的解，且满足 $m_i-\varepsilon\leqslant y_i(n)\leqslant M_i+\varepsilon$，$n\in\mathbf{Z}$，$i=1,2$. 因为 ε 是任意小的正数，所以 $0<\inf_{n\in\mathbf{Z}}y_i(n)\leqslant\sup_{n\in\mathbf{Z}}y_i(n)<+\infty$，$i=1,2$. 由以上可知，系统(2)的每个壳方程至少有一个严格正解.

其次，证明每个壳方程的严格正解是唯一的. 假设壳方程(12)有两个严格正解$(x_1^*(n),x_2^*(n))$和

$(y_1^*(n), y_2^*(n))$. 类似于定理 2 的证明,定义 Lyapunov 泛函:$V^*(n)=\lambda_1 V_1^*(n)+\lambda_2 V_2^*(n)$, $n\in\mathbf{Z}$,其中 $V_i^*(n)=|\ln x_i^*(n)-\ln y_i^*(n)|$, $i=1,2$. 类似于式(11)的讨论,可得:

$$\Delta V^*(n)\leqslant-\delta(|x_1^*(n)-y_1^*(n)|+|x_2^*(n)-y_2^*(n)|),\ n\in\mathbf{Z}. \tag{13}$$

由式(13)可知,$V^*(n)$ 是 $\mathbf{Z}$ 上的非增函数. 把上式两边同时从 k 加到 0,可得:

$$\delta\sum_{n=k}^{0}(|x_1^*(n)-y_1^*(n)|+|x_2^*(n)-y_2^*(n)|)\leqslant V^*(k)-V^*(1),\ k<0.$$

注意到 $V^*(n)$ 是有界的,所以有 $\sum\limits_{n=-\infty}^{0}(|x_1^*(n)-y_1^*(n)|+|x_2^*(n)-y_2^*(n)|)<+\infty$. 再由该式可得:

$$\lim_{n=-\infty}|x_i^*(n)-y_i^*(n)|=0,\ i=1,2. \tag{14}$$

由式(14)可知,对任意小的正数 ε 存在正整数 N_3,使得当 $n\leqslant-N_3$ 时,有 $|x_i^*(n)-y_i^*(n)|<\varepsilon$, $i=1,2$. 因此当 $n\leqslant-N_3$ 时,有 $V_i^*(n)=\dfrac{1}{\theta_i^*(n)}|x_i^*(n)-y_i^*(n)|\leqslant\dfrac{1}{m_i}\varepsilon$, $i=1,2$,其中 $\theta_i^*(n)$ 介于 $x_i^*(n)$ 和 $y_i^*(n)$. 令 $P=\dfrac{\lambda_1}{m_1}+\dfrac{\lambda_2}{m_2}$,由此可推出当 $n\leqslant-N_3$ 时有 $V^*(n)\leqslant P\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n=-\infty}V^*(n)=0$. 再根据定理 2 可知,$\lim\limits_{n=+\infty}V^*(n)=0$. 由于 $V^*(n)$ 是 $\mathbf{Z}$ 上正的非增函数,所以 $V^*(n)\equiv 0$,即 $x_i^*(n)=y_i^*(n)$ 对一切 $n\in\mathbf{Z}$, $i=1,2$ 成立. 因此,壳方程(12)的严格正解是唯一的.

综上所述,系统(2)的每个壳方程都有唯一的严格正解. 根据引理 4 知,系统(2)有唯一的严格正概周期解. 再由定理 2 知,系统(2)是全局吸引的. 因此,系统(2)存在唯一的概周期解,且系统是全局吸引的. 证毕.

参考文献:

[1] BEDDINGTON J R. Mutual interference between parasites or predators and its effect on searching efficiency[J]. J Animal Ecodogy, 1975, 44(1): 331-340.

[2] DEANGELIS D L, GOLDSTEIN R A, O'NEILL R V. A model for tropic interaction[J]. Ecology, 1975, 56: 881-892.

[3] YU S, CHEN F. Dynamic behaviors of a competitive system with Beddington-DeAngelis functional response[J]. Discrete Dyn Nat Soc, 2019: 1-12. Article ID 4592054.

[4] ZHANG J, YU S, WANG Q. Extinction and stability of a discrete competitive system with Beddington-DeAngelis functional response[J]. Engineering Letters, 2020, 28(2): 406-411.

[5] CHEN F, CHEN X, HUANG S. Extinction of a two species non-autonomous competitive system with Beddington-DeAngelis functional response and the effect of toxic substances[J]. Open Math, 2016, 14: 1157-1173.

[6] XIAO Z, LI Z, ZHU Z, et al. Hopf bifurcation and stability in a Beddington-DeAngelis predator-prey model with stage structure for predator and time delay incorporating prey refuge[J]. Open Math, 2019, 17: 141-159.

[7] CHEN B. Global attractivity of a Holling-Tanner model with Beddington-DeAngelis functional response: with or without prey refuge[J]. Engineering Letters, 2019, 27(4): 1-9.

[8] 张杰华. 具时滞和反馈控制的离散互惠系统的概周期解[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2016, 42(2): 108-114.

[9] ZHANG S N. Existence of almost periodic solution for difference systems[J]. Ann Differ Equ, 2000, 16(2): 184-206.

[10] LI Z, CHEN F D, HE M X. Almost periodic solutions of a discrete Lotka-Volterra competition system with delays[J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2011, 12(4): 2344-2355.

[11] FINK A M, SEIFERT G. Liapunov functions and almost periodic solutions for almost periodic systems[J]. J Differential Equations, 1969, 5: 307-313.

[12] YUAN R, HONG J L. The existence of almost periodic solutions for a class of differential equations with piecewise constant argument[J]. Nonlinear Anal, 1997, 28(8): 1439-1450.

[13] CHEN F D. Permanence for the discrete mutualism model with time delays[J]. Math Comput Model, 2008, 47: 431-435.