第 47 卷 第 2 期
2021 年 6 月
延边大学学报(自然科学版)
Journal of Yanbian University (Natural Science)
Vol. 47 No. 2
Jun. 2021

文章编号: 1004-4353(2021)02-0101-04

乘积度量空间上 B-拟压缩映射的唯一不动点

朴勇杰
(延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 为了在乘积度量空间上得到 Ćirić 型不动点定理,给出了 B-拟压缩映射的概念,并证明了在完备的乘积度量空间上的任何 B-拟压缩映射具有唯一不动点.最后,举例说明了所得结果的正确性.

关键词: 乘积度量空间; B-拟压缩; 不动点
中图分类号: O177.91; O189.11 **文献标识码:** A

An unique fixed point for B-quasi contractive mappings on multiplicative metric spaces

PIAO Yongjie
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: In order to obtain the Ćirić type fixed point theorem on multiplicative metric spaces, we introduce the concept of B-quasi contractive mapping and prove that any B-quasi contractive mapping has an unique fixed point on complete multiplicative metric spaces. Finally, we give an example to verify the correctness of the given result.

Keywords: multiplicative metric space; B-quasi contraction; fixed point

1974 年, Ćirić[1] 在完备的度量空间上引进了拟压缩自映射的概念:设 (X,d) 是度量空间,称 $f: X \to X$ 是拟压缩的是指存在 $k \in [0,1)$ 使得 $d(fx,fy) \leqslant k\max\{d(x,y),d(x,fx),d(y,fy),d(x,fy),d(y,fx)\}$, $\forall x,y \in X$. 同时, Ćirić 还证明了完备度量空间上的任何拟压缩映射必有唯一不动点. 由于 Ćirić 不动点定理具有形式简单、便于利用等优点,因此该定理在最优化理论、稳定点等领域中得到广泛应用. 在 Ćirić 研究的基础上,一些学者进一步推广和改进了 Ćirić 不动点定理[2-8]. 本文将在乘积空间上引入 B-拟压缩条件,并给出满足新的压缩条件映射具有唯一不动点的定理,从而在乘积度量空间上得到了 Ćirić 型不动点定理.

定义 1[9] 设 X 是非空集合,称映射 $d: X \times X \to [0, +\infty)$ 是 X 上的乘积度量是指 d 满足:

(i) 对任何 $x,y \in X$, $d(x,y) \geqslant 1$ 且 $d(x,y)=1 \Leftrightarrow x=y$;

(ii) 对任何 $x,y \in X$, $d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) 对任何 $x,y,z \in X$, $d(x,z) \leqslant d(x,y)d(y,z)$ (乘积三角不等式).

当 d 是 X 上的乘积度量时,称 (X,d) 为乘积度量空间.

有关乘积度量空间的例子可参看文献[10-12].

收稿日期: 2021-04-03 **基金项目:** 国家自然科学基金 (11361064)
作者简介: 朴勇杰(1962—),男,理学博士,教授,研究方向为非线性分析和不动点理论.

定义 2[9] 设(X,d)是乘积度量空间,$\{x_n\}$是X中的序列且$x\in X$.若对任何积性开球$B_\varepsilon(x)=\{y\in X\mid d(x,y)<\varepsilon\}$,$\forall\varepsilon>1$,存在自然数$N$且使得$n>N$时$x_n\in B_\varepsilon(x)$成立,则称序列$\{x_n\}$乘积收敛于$x$,并记为$x_n\to x\ (n\to\infty)$.

引理 1[10] 设(X,d)是乘积度量空间,$\{x_n\}$是X中的序列且$x\in X$,则$x_n\to x\ (n\to\infty)\Leftrightarrow d(x_n,x)\to 1\ (n\to\infty)$.

定义 3[10] 设(X,d)是乘积度量空间,$\{x_n\}$是X中的序列.若对任何$\varepsilon>1$,存在自然数N且使得$n,m>N$时$d(x_n,x_m)<\varepsilon$成立,则称序列$\{x_n\}$为乘积柯西序列.

引理 2[10] 设(X,d)是乘积度量空间,$\{x_n\}$是X中的序列,则$\{x_n\}$是乘积柯西序列当且仅当$d(x_n,x_m)\to 1\ (n,m\to\infty)$.

定义 4[10] 如果乘积度量空间(X,d)中的每个乘积柯西序列都是乘积收敛的,则称(X,d)是完备的.

引理 3[10] 设(X,d)是乘积度量空间,$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是X中的两个序列且$x,y\in X$,则$x_n\to x$,$y_n\to y\ (n\to\infty)\Rightarrow d(x_n,y_n)\to d(x,y)\ (n\to\infty)$.

设(X,d)是完备的乘积度量空间.称$T:X\to X$是B-拟压缩映射是指存在$k\in[0,1)$使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant[v(x,y)]^k,\ \forall x,y\in X,\tag{1}$$

其中$v(x,y)\in A(x,y):=\{d(T^2x,x),d(T^2x,Tx),d(T^2x,y),d(T^2x,Ty)\}$.

定理 1 设(X,d)是完备的乘积度量空间,$T:X\to X$是自映射.如果T是B-拟压缩的,则T有唯一不动点,并且对任何$x\in X$,迭代序列$\{T^nx\}$收敛于该唯一不动点.

证明 任取$x_0\in X$,并定义$x_n=T^nx=Tx_{n-1}(n=1,2,\cdots)$,则由此可得到一个序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.对任何固定的$n=1,2,\cdots$,根据式(1)有:

$$d(x_i,x_{i+1})=d(Tx_{i-1},Tx_i)\leqslant[v(x_{i-1},x_i)]^k,\tag{2}$$

其中$v(x_{i-1},x_i)\in A(x_{i-1},x_i)=\{d(T^2x_{i-1},x_{i-1}),d(T^2x_{i-1},Tx_{i-1}),d(T^2x_{i-1},x_i),d(T^2x_{i-1},Tx_i)\}=\{d(x_{i+1},x_{i-1}),d(x_{i+1},x_i),1\}$.如果$v(x_{i-1},x_i)=d(x_{i+1},x_{i-1})$,则根据式(2)可得$d(x_i,x_{i+1})\leqslant[d(x_{i+1},x_{i-1})]^k$;如果$v(x_{i-1},x_i)=d(x_{i+1},x_i)$,则根据式(2)可得$d(x_i,x_{i+1})\leqslant[d(x_{i+1},x_i)]^k$,再根据$k\in[0,1)$可得$d(x_i,x_{i+1})=1\leqslant[d(x_{i+1},x_{i-1})]^k$;如果$v(x_{i-1},x_i)=1$,则根据式(2)可得$d(x_i,x_{i+1})=1^k\leqslant[d(x_{i+1},x_{i-1})]^k$.综合以上3种情况可得:

$$d(x_i,x_{i+1})\leqslant[d(x_{i-1},x_{i+1})]^k,\ n=1,2,\cdots.\tag{3}$$

对任何固定的$n=1,2,\cdots$,根据式(1)可得:

$$d(x_i,x_{i+2})=d(Tx_{i-1},Tx_{i+1})\leqslant[v(x_{i-1},x_{i+1})]^k,\tag{4}$$

其中$v(x_{i-1},x_{i+1})\in A(x_{i-1},x_{i+1})=\{d(x_{i-1},x_{i+1}),(x_i,x_{i+1}),1,(x_{i+1},x_{i+2})\}$.若$v(x_{i-1},x_{i+1})=d(x_{i-1},x_{i+1})$,则根据式(4)可得$d(x_i,x_{i+2})\leqslant[d(x_{i-1},x_{i+1})]^k$;若$v(x_{i-1},x_{i+1})=d(x_i,x_{i+1})$,则由式(4)和式(3)可得$d(x_i,x_{i+2})\leqslant[d(x_i,x_{i+1})]^k\leqslant[d(x_{i-1},x_{i+1})]^{k^2}$;若$v(x_{i-1},x_{i+1})=1$,则根据式(4)可得$d(x_i,x_{i+2})\leqslant 1^k\leqslant[d(x_{i-1},x_{i+1})]^k$;若$v(x_{i-1},x_{i+1})=d(x_{i+1},x_{i+2})$,则根据式(4)和式(3)可得$d(x_i,x_{i+2})\leqslant[d(x_{i+1},x_{i+2})]^k\leqslant[d(x_i,x_{i+2})]^{k^2}$,再根据$k\in[0,1)$可得$d(x_i,x_{i+2})=1\leqslant[d(x_{i-1},x_{i+1})]^k$.综合上述4种情况可得:

$$d(x_i,x_{i+2})\leqslant[d(x_{i-1},x_{i+1})]^k\ 或\ d(x_i,x_{i+2})\leqslant[d(x_{i-1},x_{i+1})]^{k^2}.\tag{5}$$

式(5)可写成如下形式:

$$d(x_i,x_{i+2})\leqslant[d(x_{i-1},x_{i+1})]^{k^{(i,i+2)}},\ \forall i=1,2,\cdots,\tag{6}$$

其中$k^{(i,i+2)}=k$或$k^{(i,i+2)}=k^2$.

以下证明对任何自然数n,当i,j是自然数且满足$1\leqslant i,j\leqslant n$时,式(7)成立.

$$d(x_i,x_j)\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k}{1-k}}. \tag{7}$$

如果 $n=1$，则 $i=j=1$，由此显然知式(7)成立. 假设 $n=m$ 时式(7)成立，则可得下式成立：

$$d(x_i,x_j)\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k}{1-k}},\forall 1\leqslant i,j\leqslant m. \tag{8}$$

设 $n=m+1$. 由于在 $1\leqslant i,j\leqslant m$ 时式(7)和式(8)成立，因此进一步可设 $j=m+1$，$1\leqslant i\leqslant m$. 由此根据式(1)可得：$d(x_i,x_{m+1})=d(Tx_{i-1},Tx_m)\leqslant[v(x_{i-1},x_m)]^k$，其中 $v(x_{i-1},x_m)\in A(x_{i-1},x_m)=\{d(x_{i-1},x_{i+1}),d(x_i,x_{i+1}),d(x_{i+1},x_m),d(x_{i+1},x_{m+1})\}$.

首先，考虑 $i=1$ 的情况. 此时 $v(x_0,x_m)\in\{d(x_0,x_2),d(x_1,x_2),d(x_2,x_m),d(x_2,x_{m+1})\}$. 当 $v(x_0,x_m)=d(x_0,x_2)$ 时，有 $d(x_1,x_{m+1})\leqslant[d(x_0,x_2)]^k\leqslant[v(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^k\leqslant[v(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k}{1-k}}$；当 $v(x_0,x_m)=d(x_1,x_2)$ 时，有 $d(x_1,x_{m+1})\leqslant[d(x_1,x_2)]^k\leqslant[v(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^k\leqslant[v(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k}{1-k}}$；当 $v(x_0,x_m)=d(x_2,x_m)$ 时，有 $d(x_1,x_{m+1})\leqslant[d(x_2,x_m)]^k\leqslant[d(x_1,x_2)d(x_1,x_m)]^k\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)d(x_1,x_m)]^k$，再由式(7)可得 $d(x_1,x_{m+1})\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^k[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k^2}{1-k}}=[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k}{1-k}}$；当 $v(x_0,x_m)=d(x_2,x_{m+1})$ 时，有 $d(x_1,x_{m+1})\leqslant[d(x_2,x_{m+1})]^k\leqslant[d(x_1,x_2)d(x_1,x_{m+1})]^k\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)d(x_1,x_{m+1})]^k$，并进而可得 $d(x_1,x_{m+1})\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k}{1-k}}$. 综合以上讨论可知，当 $i=1$ 和 $j=m+1$ 时式(7)成立.

其次，考虑 $i=m$ 的情况. 此时 $d(x_m,x_{m+1})=d(Tx_{m-1},Tx_m)\leqslant[v(x_{m-1},x_m)]^k$，其中 $v(x_{m-1},x_m)\in\{d(x_{m-1},x_{m+1}),d(x_m,x_{m+1}),1\}$. 若 $v(x_{m-1},x_m)=d(x_{m-1},x_{m+1})$，则有 $d(x_m,x_{m+1})\leqslant[d(x_{m-1},x_{m+1})]^k\leqslant[d(x_{m-1},x_m)d(x_m,x_{m+1})]^k$，即 $d(x_m,x_{m+1})\leqslant[d(x_{m-1},x_m)]^{\frac{k}{1-k}}$. 再利用式(3)和式(6)可得 $d(x_m,x_{m+1})\leqslant[d(x_{m-2},x_m)]^{\frac{k^2}{1-k}}\leqslant[(x_0,x_2)]^{\frac{k^2}{1-k}k^{(m-2,m)}k^{(m-3,m-1)}\cdots k^{(1,3)}}\leqslant[(x_0,x_2)]^{\frac{k}{1-k}}\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k}{1-k}}$. 若 $v(x_{m-1},x_m)=d(x_m,x_{m+1})$，则有 $d(x_m,x_{m+1})\leqslant[d(x_m,x_{m+1})]^k$. 再根据 $k\in[0,1)$ 可推出 $d(x_m,x_{m+1})=1\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k}{1-k}}$. 若 $v(x_{m-1},x_m)=1$，则显然有 $d(x_m,x_{m+1})\leqslant 1^k\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k}{1-k}}$. 综合以上讨论可知，当 $i=m$ 和 $j=m+1$ 时式(7)仍成立.

最后，考虑 $2\leqslant i\leqslant m-1$ 的情况. 此时，由于 $i+1\leqslant m$，因此当 $v(x_{i-1},x_m)$ 取 $A(x_{i-1},x_m)$ 中的元 $d(x_{i-1},x_{i+1})$ 或 $d(x_i,x_{i+1})$ 或 $d(x_{i+1},x_m)$ 时，根据归纳原理可得 $d(x_i,x_m)\leqslant[v(x_{i-1},x_m)]^k\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k^2}{1-k}}\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k}{1-k}}$；而当 $v(x_{i-1},x_m)=d(x_{i+1},x_{m+1})$ 时，$d(x_i,x_m)\leqslant[d(x_{i+1},x_{m+1})]^k\leqslant[d(x_i,x_{i+1})d(x_i,x_{m+1})]^k$，由此可推出 $d(x_i,x_m)\leqslant[d(x_i,x_{i+1})]^{\frac{k}{1-k}}$. 再根据式(3)和式(6)可得 $d(x_i,x_m)\leqslant[d(x_i,x_{i+1})]^{\frac{k}{1-k}}\leqslant[d(x_{i-1},x_{i+1})]^{\frac{k^2}{1-k}}\leqslant[d(x_0,x_2)]^{\frac{k^2}{1-k}k^{(i-1,i+1)}k^{(i-2,i)}\cdots k^{(1,3)}}$，因此 $d(x_i,x_m)\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k^2}{1-k}k^{(i-1,i+1)}k^{(i-2,i)}\cdots k^{(1,3)}}\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k}{1-k}}$. 综合以上讨论可知，当 $2\leqslant i\leqslant m-1$ 和 $j=m+1$ 时式(7)仍成立.

综合上述所有情况并根据归纳原理可知式(7)成立.

对任何 $m,n\in\mathbf{N}$ 且 $1<n<m$，根据式(1)有 $d(x_n,x_m)=d(Tx_{n-1},Tx_{m-1})\leqslant[v(x_{n-1},x_{m-1})]^k$，其中 $v(x_{n-1},x_{m-1})\in A(x_{n-1},x_{m-1})=\{d(x_{n-1},x_{n+1}),d(x_n,x_{n+1}),d(x_{n+1},x_{m-1}),d(x_{n+1},x_m)\}$. 令 $C(n,m)=\{d(x_i,x_j)\mid n\leqslant i,j\leqslant m\}$，则由上式可知对每个 $u\in C(n,m)$，存在 $v\in C(n-1,m)$ 使得 $u\leqslant v^k$，于是可得：

$$d(x_n,x_m)\leqslant[u_1]^k\leqslant[u_2]^{k^2}\leqslant\cdots\leqslant[u_{n-1}]^{k^{n-1}}\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k^n}{1-k}},\tag{9}$$

其中 $u_1\in C(n-1,m)$, $u_2\in C(n-2,m)$, $\cdots$, $u_{n-1}\in C(1,m)$, $u_{n-1}\leqslant[d(x_0,x_1)d(x_1,x_2)]^{\frac{k}{1-k}}$. 由于 $k\in[0,1)$,因此由式(9)易知:

$$\lim_{m>n,n\to\infty}d(x_n,x_m)=1.\tag{10}$$

再根据引理 2 知 $\{x_n\}$ 是 X 中的乘积柯西序列,于是根据 X 的完备性知存在 $x^*\in X$ 使得 $x_n\to x^*(n\to\infty)$. 根据定义 1 中的(iii)和式(1)可知,对任何 $n\in\mathbf{N}$ 有:

$$d(x^*,Tx^*)\leqslant d(x_n,x^*)d(Tx_{n-1},Tx^*)\leqslant d(x_n,x^*)[v(x_{n-1},x^*)]^k,\tag{11}$$

其中 $v(x_{n-1},x^*)\in\{d(x_{n-1},x_{n+1}),d(x_n,x_{n+1}),d(x_{n+1},x^*),d(x_{n+1},Tx^*)\}$.

当 $v(x_{n-1},x^*)=d(x_{n-1},x_{n+1})$ 时,根据式(11)可得:

$$d(x^*,Tx^*)\leqslant d(x_n,x^*)[d(x_{n-1},x_{n+1})]^k.\tag{12}$$

当 $v(x_{n-1},x^*)=d(x_n,x_{n+1})$ 时,根据式(11)可得:

$$d(x^*,Tx^*)\leqslant d(x_n,x^*)[d(x_n,x_{n+1})]^k.\tag{13}$$

当 $v(x_{n-1},x^*)=d(x_{n+1},x^*)$ 时,根据式(11)可得:

$$d(x^*,Tx^*)\leqslant d(x_n,x^*)[d(x_{n+1},x^*)]^k.\tag{14}$$

当 $v(x_{n-1},x^*)=d(x_{n+1},Tx^*)$ 时,根据式(11)可得:

$$d(x^*,Tx^*)\leqslant d(x_n,x^*)[d(x_{n+1},Tx^*)]^k\leqslant d(x_n,x^*)[d(x_{n+1},x^*)d(x^*,Tx^*)]^k.$$

整理上式可得:

$$d(x^*,Tx^*)\leqslant\{d(x_n,x^*)[d(x_{n+1},x^*)]^k\}^{\frac{k}{1-k}}.\tag{15}$$

综合上述 4 种情况并根据引理 1 和引理 2 及 $k\in[0,1)$ 可知,当式(12)—(15)的两边取 $n\to\infty$ 时可得 $d(x^*,Tx^*)=1$,这说明 x^* 是 T 的一个不动点. 如果 y^* 也是 T 的不动点,则根据式(1)可得: $d(x^*,y^*)=d(Tx^*,Ty^*)\leqslant[v(x^*,y^*)]^k$,其中 $v(x^*,y^*)\in\{1,d(x^*,y^*)\}$. 由此容易得到 $d(x^*,y^*)=1$,因此 x^* 是 T 的唯一不动点. 再根据 $x_n=Tx_{n-1}=T^nx$ 及 $x_n\to x^*$ 可知, $\{T^nx\}$ 收敛于 T 的唯一不动点 x^*.

例 1 在 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 上定义 $d(x,y)=e^{|x-y|}$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$,则 (R,d) 是乘积度量空间. 令 $X=\{0,1,2\}$,则显然可知 (X,d) 是完备的乘积度量空间. 定义 $f:X\to X$, $f0=f1=0$, $f2=1$,并取 $k\in(0.5,1)$,由此显然有:当 $x,y\in\{0,1\}$ 或 $x=y=2$ 时, $d(fx,fy)=1\leqslant[\max\{d(f^2x,x),d(f^2x,fx),d(f^2x,y),d(f^2x,fy)\}]^k$ 成立;当 $x=0$, $y=2$ 时, $d(f0,f2)=e^{|f0-f2|}\leqslant e^{2k}\leqslant[\max\{d(f^20,0),d(f^20,f0),d(f^20,2),d(f^20,f2)\}]^k$ 成立;当 $x=1$, $y=2$ 时, $d(f1,f2)=e^{|f1-f2|}\leqslant e^{2k}\leqslant[\max\{d(f^21,1),d(f^21,f1),d(f^21,2),d(f^21,f2)\}]^k$ 成立. 由以上计算结果可知, f 和 k 满足定理 1 的所有条件,因此 f 具有唯一不动点 0.

参考文献:

[1] ĆIRIĆ L J B. A generalizaion of Banachy's contraction principle[J]. Proc Amer Soc, 1974, 45:267-273.

[2] KUMAM P, NGUYEN V D, SITTHAKERNGKIET K. A generalization of Ćirić fixed point theorems[J]. Filomat, 2015, 29(7):1549-1556.

[3] LIU H, XU S Y. Cone metric spaces with Banach algebras and fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2013, 2013(1):1-10.

[4] XU S Y, RADENOVIĆ S. Fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings on cone metric spaces over Banach algebras without assumption of normality[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2014, 2014(1):1-12.

(下转第 119 页)

参考文献:

[1] GILÁNYI A. Eine zur Parallelogrammgleichung äquivalente Ungleichung[J]. Aequationes Math, 2001,62(3):303-309.

[2] RATZ J. On inequalities associated with the Jordan-von Neumann functional equation[J]. Aequationes Math, 2003, 66:191-200.

[3] FECHNER W. Stability of a functional inequalities associated with the Jordan-von Neumann functional equation[J]. Aequationes Math, 2006,71:149-161.

[4] GILANYI A. On a problem by K.Nikodem[J]. Math Inequal Appl, 2002,5(4):707-710.

[5] PARK C. Additive ρ-functional inequalities and equations[J]. J Math Inequal, 2015,9(1):17-26.

[6] PARK C. Additive ρ-functional inequalities in non-Archimedean normed spaces[J]. J Math Inequal, 2015,9(2): 397-407.

[7] DRYGAS H. Quasi-inner products and their applications: Advances in Multivariate Statistical Analysis[M]. Dordrecht Holland: Springer Science+Business Media, 1987:13-30.

[8] EBANKS B R, KANNAPPAN P L, SAHOO P K. A common generaliztion of functional equations charactering normed and quasi-inner-product spaces[J]. Canad Math Bull, 1992,35(3):321-327.

[9] FAIZIEV V A, SAHOO P K. On the stability of Drygas functional equation on groups[J]. Banach J Math Anal, 2007,1(1):43-55.

[10] SIROUNI M, KABBAJ S. A fixed point approach to the hyperstability of Drygas functional equation in metric spaces[J]. J Math Comput Sci, 2014,4(4):705-715.

[11] SABOUR K H. A variant of Drygas' functional equation with an endomorphism[J]. Asia Mathematika, 2020,4(1):63-68.

[12] CHOI C, LEE B. Stability of mixed additive-quadratic and additive-Drygas functional equations[J]. Results Math, 2020,75:38.

[13] SUN W L, JIN Y, PARK C, et al. 3-Variable double ρ-functional inequalities of Drygas[J]. J Math Inequal, 2019,13(4):1235-1244.

(上接第 104 页)

[5] 许绍元,马超,周作领.具有 Banach 代数的锥度量空间上拟压缩映射的新的不动点定理[J].中山大学学报(自然科学版),2015,54(4):1-4.

[6] 朴勇杰.具有 Banach 代数的无正规的锥度量空间上拟收缩映射的不动点定理的改进[J].中山大学学报(自然科学版),2018,57(1):63-68.

[7] RHAODES B E. Contraction type mappings on a 2-metric space[J]. Maehmatische Nachrichten, 1979,91:151-155.

[8] PIAO Y J. Ćirić fixed point theorems under c-distance on non-normal con metric spaces over Banach algebras[J]. Adv Fixed Point Theory, 2020,10:5.

[9] BASHIROV A E, KURPLNARA E M, OZYAPLCL A. Multiplicative calculus and its applications[J]. J Math Anal Appl, 2008,337:36-48.

[10] ÖZAVSAR M, CEVIKEL A C. Fixed point of multiplicative contraction mappings on mul-tiplicative metric spaces[J]. Appl Math, 2012,3:35-39.

[11] GU F, CHO Y J. Common fixed points results for four maps satisfying A-contractive condition in multiplicative metric spaces[J]. Fixed Point Theory Appl, 2015,3:160-165.

[12] PIAO Y J. Unique common fixed points for four non-continuous mappings satisfying ψ-implicit contractive condition on non-complete multiplicative metric spaces[J]. Adv Fixed Point Theory, 2019,9(2):135-145.