文章编号：1004-4353(2021)01-0021-06

一类拟线性薛定谔方程的 $H^2(\mathbf{R}^N)$-解的爆破现象

林振生[1]， 龙群飞[2]

(1. 福建工程学院 计算机科学与数学学院，福建 福州 350118；
2. 贵州师范大学 数学科学学院，贵州 贵阳 550025)

摘要：为了获得有非正初始能量解的爆破结果，将参数分成 3 类（① $\beta \leqslant 0$，$\theta < 0$ 和 $2 < p \leqslant 4 + \frac{4}{N}$；② $\beta > 0$，$\theta < 0$ 和 $2 + \frac{4}{N} < p < 2 \cdot 2^*$；③ $\beta > 0$，$\theta \geqslant 0$ 和 $4 + \frac{4}{N} \leqslant p < 2 \cdot 2^*$）进行讨论，并在不同参数假设下分别给出了一类拟线性薛定谔方程的 $H^2(\mathbf{R}^N)$-解的爆破现象. 研究表明，在第 ② 类情形下，当 p 趋近于 $2 + \frac{4}{N}$ 时，柯西问题的解在时间无穷大时爆破. 本文结果扩展了文献[8]的研究结果.

关键词：拟线性薛定谔方程；$H^2(\mathbf{R}^N)$-解；有限时间；爆破

中图分类号：O175.2 **文献标识码**：A

The blowing-up phenomena of $H^2(\mathbf{R}^N)$-solution for some kind of quasi-linear Schrödinger equations

LIN Zhensheng[1], LONG Qunfei[2]

(1. *School of Computer Science and Mathematics, Fujian University of Technology, Fuzhou* 350118, *China*;
2. *School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang* 550025, *China*)

Abstract: In order to obtain a blow up result for the solutions with non-positive initial energy, we discuss them by dividing the parameters into three categories: (1) $\beta \leqslant 0$, $\theta < 0$ and $2 < p \leqslant 4 + \frac{4}{N}$; (2) $\beta > 0$, $\theta < 0$ and $2 + \frac{4}{N} < p < 2 \cdot 2^*$; (3) $\beta > 0$, $\theta \geqslant 0$ and $4 + \frac{4}{N} \leqslant p < 2 \cdot 2^*$. And, with varying different parameter assumptions, we separately prove the blowing-up phenomena of $H^2(\mathbf{R}^N)$-solution for some quasi-linear Schrödinger equations. The results show that for the second case, p approaching to $2 + \frac{4}{N}$ additionally, the solutions of Cauchy problem blow up when the time tends to infinity. The results of this paper extend the results of the literature [8].

Keywords: quasi-linear Schrödinger equation; $H^2(\mathbf{R}^N)$-solution; finite time; blow up

0 引言

本文将考虑如下一类拟线性薛定谔方程

收稿日期：2020－11－26 **作者简介**：林振生(1983—)，男，博士，讲师，研究方向为非线性分析及其应用.

基金项目：国家自然科学基金面上项目(11871152)；福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JT180326)；福建工程学院科研启动基金(GY-Z20090)；贵州师范大学博士科研启动项目(GZNU[2018]34)

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t + \Delta u + \beta |u|^{p-2} u + \theta \Delta(|u|^2) u = 0, \\ u_0 = u(x, 0) \in H^2(\mathbf{R}^N) = W^{2,2}(\mathbf{R}^N),\ x \in \mathbf{R}^N \end{cases} \tag{1}$$

的 $H^2(\mathbf{R}^N)$-解的爆破现象. 其中: $2 < p < 2 \cdot 2^*$, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, $\mathrm{i}^2 = -1$, $\beta \in \mathbf{R}$, $\theta \in \mathbf{R}$, $u = u(x, t): \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ 是复值函数, $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 是标准的拉普拉斯算子.

目前,已有许多学者对方程(1)进行了研究,并取得了较好的研究成果. 例如:方程(1)驻波解的存在性[1-3]、方程(1)正解的存在性[2]、方程(1)解的渐近行为[4]、方程(1)柯西问题的局部或整体解的适定性[5]. 2014 年, Adachi 等[6] 在方程(1)满足 $2 + \dfrac{4}{N-2} < p < \dfrac{(2a-1)N+2}{N-2}$ 的条件下,刻画了方程(1)基态解的爆破率. Guo 等在 $p \geqslant 8$, $\beta > 0$, $\theta > 0$, $N = 1$ 时和在 $\beta \geqslant 0$, $\theta \in \mathbf{R}$, $4 + \dfrac{4}{N} \leqslant p < 2 \cdot 2^*$ 时,分别得到了方程(1)的解在有限时间爆破[7] 和方程(1)的 $H^2(\mathbf{R}^N)$-解在有限时间爆破[8] 的结论. 1977 年, Glassey 给出了如下不等式[9]:

$$\frac{\mathrm{d}\left(-\operatorname{Im}\int_{\mathbf{R}^N} \bar{u} x \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x\right)}{\mathrm{d}t} \geqslant [n(c_n - 1) - 2] \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x > 0 \ (n(c_n - 1) - 2 > 0). \tag{2}$$

受到文献[8]以及不等式(2)的启发,本文在 $\beta \in \mathbf{R}$, $\theta \in \mathbf{R}$, $2 < p < 2 \cdot 2^*$ 的条件下,且在参数取值允许范围内通过选取不同取值探讨方程(1)的 $H^2(\mathbf{R}^N)$-解的爆破现象.

1 主要结果及其证明

定理 1 设 $u(x, t) \in H^2(\mathbf{R}^N)(N \geqslant 1)$ 是方程(1)的解,并且满足:

(I) $\nabla |u_0|^2 \in L^2(\mathbf{R}^N)$ 和 $u_0 \in H^2(\mathbf{R}^N)$;

(II) $E(0) = \int_{\mathbf{R}^N} \left(|\nabla u_0|^2 - \dfrac{2\beta}{p} |u_0|^p + \dfrac{\theta}{2} |\nabla |u_0|^2|^2 \right) \mathrm{d}x \leqslant 0$;

(III) $\operatorname{Im}\int_{\mathbf{R}^N} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 \,\mathrm{d}x < 0$, 并且 $|x| u_0 \in L^2(\mathbf{R}^N)$.

假设参数满足下列条件之一:

(IV) $\beta \leqslant 0$, $\theta < 0$, 其中: ① $2 < p < 4$; ② $4 \leqslant p \leqslant 4 + \dfrac{4}{N}$, 并且 β 有界.

(V) $\beta > 0$, $\theta < 0$, $2 + \dfrac{4}{N} \leqslant p < 2 \cdot 2^*$.

(VI) $\beta > 0$, $\theta \geqslant 0$, $4 + \dfrac{4}{N} \leqslant p < 2 \cdot 2^*$.

在上述假设条件下,方程(1)的解在有限时间关于 $L^2(\mathbf{R}^N)$ 梯度爆破,即 $\lim\limits_{t \to T_0^-} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 = +\infty$, 解在有限时间爆破.

注记 1 当 $\beta \leqslant 0$, $\theta < 0$ 和 $2 < p \leqslant 4 + \dfrac{4}{N}$ 时,方程(1)的解的爆破现象仍然是开放问题;当 $\theta = 0$ 时,方程(1)的能量 $E(t) > 0$, 除非 $u = 0$ 和 $\nabla u = 0$ 才会有 $E(t) = 0$.

注记 2 当 $\beta > 0$, $\theta < 0$ 时,定理 1 将文献[8]中 p 的取值范围从 $4 + \dfrac{4}{N} \leqslant p < 2 \cdot 2^*$ 拓宽为 $2 + \dfrac{4}{N} < p < 2 \cdot 2^*$.

注记 3 定理 1 中的条件(VI)也是文献[8]中的关键性条件,且本文采用的引入附加参数及逼近的

证明方法同样适用于文献[8]中的定理 1.1.

在证明定理 1 之前，首先给出引理 1.

引理 1　设 u 是方程(1)在 $0 \leqslant t < t_0$ 上的解，则下列等式均成立：

(I) $\int_{\mathbf{R}^N} |u(x,t)|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N} |u(x,0)|^2 \mathrm{d}x$，　(3)

(II) $$E(t) = \int_{\mathbf{R}^N} \left[|\nabla u(x,t)|^2 - \frac{2\beta}{p} |u(x,t)|^p + \frac{\theta}{2} |\nabla(|u(x,t)|^2)|^2 \right] \mathrm{d}x,$$

$$\int_{\mathbf{R}^N} \left[|\nabla u(x,0)|^2 - \frac{2\beta}{p} |u(x,0)|^p + \frac{\theta}{2} |\nabla(|u(x,0)|^2)|^2 \right] \mathrm{d}x = E(0), \tag{4}$$

(III) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbf{R}^N} |u(x,t)|^2 |x|^2 \mathrm{d}x = 4 \int_{\mathbf{R}^N} \mathrm{Im}\, \nabla u \cdot x \bar{u} \mathrm{d}x, \tag{5}$$

(IV) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(- \int_{\mathbf{R}^N} \mathrm{Im}\, \nabla u \cdot x \bar{u} \mathrm{d}x \right) =$$

$$-2 \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{\beta N(p-2)}{p} \int_{\mathbf{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x - \frac{\theta(N+2)}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla(|u|^2)|^2 \mathrm{d}x. \tag{6}$$

为了证明方便，记：

$$D(t) = \int_{\mathbf{R}^N} |u(x,t)|^2 |x|^2 \mathrm{d}x, \tag{7}$$

$$D_1(t) = - \int_{\mathbf{R}^N} \mathrm{Im}\, \nabla u \cdot x \bar{u} \mathrm{d}x. \tag{8}$$

证明　1) 用 $\bar{u}$ ($\bar{u}$ 为 u 的复共轭) 同时乘以方程(1)的两边并取积分得：

$$\int_{\mathbf{R}^N} [\mathrm{i} u_t \bar{u} + \Delta u \bar{u} + \beta |u|^{p-2} u \bar{u} + \theta \Delta(|u|^2) u \bar{u}]\, \mathrm{d}x = 0.$$

由上式可得：

$$\frac{\mathrm{i}}{2} \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^N} [\nabla u \cdot \nabla \bar{u} + \beta |u|^p - \theta |(\nabla |u|^2)|^2] \mathrm{d}x = 0.$$

取上式的虚部可得 $\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u^2 \mathrm{d}x = 0$，由此引理 1 中的(I)得证.

2) 用 $\bar{u}_t$ 同时乘以方程(1)的两边并取积分得：

$$\int_{\mathbf{R}^N} [\mathrm{i} |u_t|^2 + \Delta u u_t + \beta |u|^{p-2} u u_t + \theta \Delta(|u|^2) u u_t] \mathrm{d}x = 0.$$

由上式可得：

$$\mathrm{i} \int_{\mathbf{R}^N} |u_t|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\nabla u|^2 + \frac{\beta}{p} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |u|^p - \frac{\theta}{4} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\nabla(|u|^2)|^2 \right] \mathrm{d}x = 0,$$

$$\mathrm{i} \int_{\mathbf{R}^N} |u_t|^2 \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{\beta}{p} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |u|^p + \frac{\theta}{4} |\nabla(|u|^2)|^2 \right] \mathrm{d}x \right\}.$$

对上式取实部即可证得引理 1 中的(II).

3) 用 $\bar{u}|x|^2$ 同时乘以方程(1)的两边并取积分得：

$$\mathrm{i} \int_{\mathbf{R}^N} u_t \bar{u} |x|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^N} [\Delta u \bar{u} |x|^2 + \beta |u|^{p-2} u \bar{u} |x|^2 + \theta \Delta(|u|^2) u \bar{u} |x|^2]\, \mathrm{d}x = 0.$$

由上式可得：

$$\frac{\mathrm{i}}{2} \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |u|^2 |x|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^N} [\beta |u|^p |x|^2 - \nabla u \cdot \nabla \bar{u} |x|^2 + \nabla u \bar{u} \cdot \nabla |x|^2 -$$

$$\theta |\nabla(|u|^2)| |x|^2 - \theta \nabla |u|^2 u^2 \cdot \nabla |x|^2] \mathrm{d}x = 0,$$

$$\frac{\mathrm{i}}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbf{R}^N} |u|^2 |x|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^N} [\beta |u|^p |x|^2 - 2\, \nabla u \cdot x \bar{u} - |\nabla u|^2 |x|^2 - \theta |\nabla(|u|^2)| |x|^2 -$$

$2\theta\nabla|u|^2\cdot xu^2]\mathrm{d}x=0.$

对上式取虚部即可证得引理1中的(III).

4) 由于 u 是方程(1)的解,则对式(8)关于 t 求一次导数可得:

$$\frac{\mathrm{d}D_1(t)}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^N}(\bar{u}_t x\nabla u+\bar{u}x\nabla u_t)\mathrm{d}x=-\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^N}(2x\nabla\bar{u}+N\bar{u})u_t\mathrm{d}x=$$

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^N}(2x\nabla\bar{u}+N\bar{u})(\Delta u+\beta|u|^{p-2}u+\theta(\Delta|u|^2)u)\mathrm{d}x. \tag{9}$$

由于

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^N}(2x\nabla\bar{u}+N\bar{u})\Delta u\,\mathrm{d}x=-\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^N}[\nabla u\,\nabla(2x\nabla\bar{u})+N\,\nabla u\nabla\bar{u}]\mathrm{d}x=-N\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-$$

$$2\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}x\nabla|\nabla u|^2\mathrm{d}x=-2\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x, \tag{10}$$

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^N}(2x\nabla\bar{u}+N\bar{u})|u|^{p-2}u\,\mathrm{d}x=N\int_{\mathbf{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^N}|u|^{p-2}x\nabla|u|^2\mathrm{d}x=N\int_{\mathbf{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x+$$

$$\frac{2}{p}\int_{\mathbf{R}^N}x\nabla|u|^p\mathrm{d}x=N\int_{\mathbf{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x-\frac{2}{p}\int_{\mathbf{R}^N}\nabla\cdot x|u|^p\mathrm{d}x=\frac{N(p-2)}{p}\int_{\mathbf{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x, \tag{11}$$

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^N}(2x\nabla\bar{u}+N\bar{u})(\Delta|u|^2)u\,\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^N}N(\Delta|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^N}(x\nabla|u|^2)(\Delta|u|^2)\mathrm{d}x=$$

$$-N\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla|u|^2|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}\nabla|u|^2\,\nabla(x\nabla|u|^2)\mathrm{d}x=-(N+1)\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla|u|^2|^2\mathrm{d}x-$$

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}x\nabla|\nabla|u|^2|^2\mathrm{d}x=-(N+1)\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla|u|^2|^2\mathrm{d}x+\frac{N}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla|u|^2|^2\mathrm{d}x=$$

$$-\frac{N+2}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla|u|^2|^2\mathrm{d}x, \tag{12}$$

因此将式(10)、(11)及式(12)代入式(9)即得式(6),由此可知引理1中的(IV)得证.

下面对定理1中的 $E(0)\leqslant 0$ 和 $\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^N}\nabla u\cdot x\bar{u}\mathrm{d}x<0$ 做合理性分析.选择与文献[8]一样的检验函数 $u(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|x|^2}\varphi(x)$,$\lambda>0$,这里 $\varphi(x)$ 是一个实泛函,$x\in\mathbf{R}^N$,$\mathrm{i}^2=-1$.因为 $\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^N}\nabla u\cdot x\bar{u}\mathrm{d}x=-2\lambda^2\int_{\mathbf{R}^N}|x|^2\ |\varphi|^2\mathrm{d}x$,所以无论是哪种情况,$\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}^N}\nabla u\cdot x\bar{u}\mathrm{d}x<0$ 都成立.

下面验证 $E(0)\leqslant 0$.根据检验函数 $u(x)$ 的定义和引理1中的(II)有:

$$E(0)=\lambda^2\left[\int_{\mathbf{R}^N}(4|x|^2|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2)\mathrm{d}x-\frac{2\beta\lambda^{p-2}}{p}\int_{\mathbf{R}^N}|\varphi|^p\mathrm{d}x+\frac{\lambda^2\theta}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla|\varphi|^2|^2\mathrm{d}x\right]. \tag{13}$$

由以上可知,可以在不同允许取值参数范围内对 $E(0)\leqslant 0$ 进行讨论.

第1种情形 因为 $\beta\leqslant 0$,$\theta<0$ 及 $2<p\leqslant 4+\frac{4}{N}$,所以在式(13)中只有第3个积分项是负的,且容易推得 $E(0)\leqslant 0$.事实上,当 $2<p<4$ 时,有 $0<p-2<2$.因此,当 λ 足够大时,$E(0)\leqslant 0$ 成立.当 $4\leqslant p\leqslant 4+\frac{4}{N}$,$\lambda\geqslant 1$ 时,有 $\lambda^{p-2}\geqslant\lambda^2$,且式(13)中的第1个积分项恒正.又因为 β 有界,所以 $E(0)\leqslant 0$ 成立.

第2种情形 因为 $\beta>0$,$\theta<0$,所以式(13)中的第2个和第3个积分项都是非正的,并且第3个积分项恒负.而 $p>2$,故当 λ 足够大时,$E(0)\leqslant 0$ 成立.

第3种情形 因为 $\beta>0$,$\theta\geqslant 0$,所以在式(13)中只有第2个积分项是负的.而 $p>4$,故当 λ 足够大时,$E(0)\leqslant 0$ 成立.

定理1的证明 根据 $E(0)\leqslant 0$ 的爆破理论,需要从式(6)中得到如下不等式:

$$\frac{\mathrm{d}D_1(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant \alpha\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x > 0, \ \alpha > 0. \tag{14}$$

为了能使爆破指数 p 在定理 1 中的 3 种假设((IV)、(V) 和(VI)) 条件下均能使式(14) 成立，本文引入了一个参数 α ($\alpha > 0$). 于是由式(6) 可得：

$$\frac{\mathrm{d}D_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha E(t) + (\alpha - 2)\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{\beta(Np - 2N - 2\alpha)}{p}\int_{\mathbf{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x + \frac{\theta[\alpha - (N+2)]}{2}\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla(|u|^2)|^2 \mathrm{d}x. \tag{15}$$

由式(15) 可知，只需得到式(16) 即可得到式(14).

$$\frac{\mathrm{d}D_1(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant (\alpha - 2)\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x > 0, \ (\alpha - 2) > 0. \tag{16}$$

由于引入的常数 α 与方程(1) 无关，所以不能将定理 1 的条件直接代入式(15) 进行验算. 因此，在满足式(16) 的条件下，本文利用式(15) 对 p 的取值范围进行如下分析：

第 1 种情形　当 $\beta \leqslant 0, \theta < 0$ 和 $E(0) \leqslant 0$ 时，由式(15) 可知 $\alpha > 0, \alpha - 2 > 0, p \leqslant 2 + \frac{4}{N}$ 和 $\alpha \leqslant N + 2$. 结合 $2 < p < 2 \cdot 2^*$，可推得 $2 < p \leqslant 2 + \frac{2 + 2\alpha}{N}$. 当 α 取最大值时，p 的取值范围最大；而 α 的最大值是 $N + 2$，故 p 的最大取值范围是 $2 < p \leqslant 4 + \frac{4}{N}$.

第 2 种情形　根据 $\beta > 0, \theta < 0$ 和 $E(0) \leqslant 0$ 与 $2 < p < 2 \cdot 2^*$，可以推得 $2 + \frac{2\alpha}{N} \leqslant p < 2 \cdot 2^*$ 和 $\alpha \leqslant N + 2$，且只有当 α 达到最小值时 p 的取值范围达到最大. 又因为 $\alpha > 2$，故 p 的取值范围是 $2 + \frac{4}{N} < p < 2 \cdot 2^*$.

第 3 种情形　根据 β, θ 的条件和 $E(0) \leqslant 0$ 与 $2 < p < 2 \cdot 2^*$，可推得 $2 + \frac{2\alpha}{N} \leqslant p < 2 \cdot 2^*$ 和 $\alpha \geqslant N + 2$，且只有当 α 取最小值 $N + 2$ 时，p 的取值范围达到最大，故 p 的最大取值范围是 $4 + \frac{4}{N} \leqslant p < 2 \cdot 2^*$.

根据 $D(t)$、$D_1(t)$ 的定义以及式(6)、(16)、柯西-施瓦兹不等式和变量分离法可得：

$$D_1(t) \geqslant \frac{D_1(0)D(0)}{D(0) - D_1(0)(\alpha - 2)t}. \tag{17}$$

式(17) 的详细证明可参见文献[8]. 由式(17) 可进一步推得 $t_0 = \frac{D(0)}{D_1(0)(\alpha - 2)}$. 取 $T^* = t_0$，则存在 $T_0 \leqslant T^*$，使得

$$\lim_{t \to T_0^-} |\nabla u|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \geqslant \lim_{t \to T_0^-} \frac{D_1(0)[D_1(0)]^{\frac{1}{2}}}{D(0) - D_1(0)(\alpha - 2)t} = +\infty. \tag{18}$$

由式(18) 可知，方程(1) 的解在有限时间爆破.

推论 1　设 $u(x,t) \in H^2(\mathbf{R}^N)$ $(N \geqslant 1)$ 是方程(1) 的解，同时满足定理 1 中的(I)、(II)、(III) 和(V)，则方程(1) 的解 $u(x,t)$ 在指数 p 的取值范围($2 + \frac{2\alpha}{N} \leqslant p < 2 \cdot 2^*$) 逼近最大范围($2 + \frac{4}{N} < p < 2 \cdot 2^*$) 时依赖于 ε，且在时间 $T^* = \left.\frac{D(0)}{D_1(0)\varepsilon}\right|_{\varepsilon \to 0} \to +\infty$ 时爆破.

定理 1 中 p 和 α 的取值范围是 $2 + \frac{2\alpha}{N} \leqslant p < 2 \cdot 2^*$，并且 α 满足 $\alpha \leqslant 2 + N$. 又因为在定理 1 的证明中要求 $\alpha > 2$，所以只有当 α 无限地趋近于 2 时，p 的取值范围才能无限地趋近最大. 因此，可以用逼近

的方法表示 p 的最大取值范围.当 α 趋近于 2 时(可以用 $\alpha=2+\varepsilon$ 来表示,其中 ε 是任意小的正常数),p 的最大逼近范围是 $2+\frac{4+2\varepsilon}{N}\leqslant p<2\cdot 2^{*}$.由以上可知爆破时间 T^{*} 与 α 有关,因此在 p 的最大取值范围内可以研究方程(1)解的爆破现象.

推论 1 的证明 根据定理 1 的证明可以得

$$T^{*}=t_0=\frac{D(0)}{D_1(0)(\alpha-2)}, \tag{19}$$

且 p 的最大逼近范围是 $2+\frac{4+2\varepsilon}{N}\leqslant p<2\cdot 2^{*}$,其中 $\alpha=2+\varepsilon$.将 $\alpha=2+\varepsilon$ 代入式(19)得 $T^{*}=t_0=\frac{D(0)}{D_1(0)\varepsilon}$.故当 $\varepsilon\to 0$ 时,$T^{*}\to+\infty$ 且式(18)成立,由此知推论 1 成立.

参考文献:

[1] LIU J Q, WANG Y Q, WANG Z Q. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, II [J]. Journal of Differential Equations, 2003,187:407-426.

[2] LIU H D, ZHAO L G. Existence results for quasilinear Schrödinger equations with a general nonlinearity[J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2020,19(6):3429-3444.

[3] 薛艳昉.拟线性薛定谔方程解的存在性和非存在性研究[D].重庆:西南大学,2018:1-94.

[4] 邱雯.一类拟线性薛定谔方程解的存在性及渐近性质[D].武汉:武汉理工大学,2019:1-50.

[5] LANGE H, POPPENBERG M, TEISMANN H. Nash-Moser methods for the solution of quasilinear Schrödinger equations[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1999,24(7/8):1399-1418.

[6] ADACHI S, SHIBATA M, WATANABE T. Blow-up phenomena and asymptotic profiles of ground states of quasilinear elliptic equations with H^1-supercritical nonlinearities[J]. Journal of Differential Equations, 2014,256(4):1492-1514.

[7] GUO B L, CHEN J Q. Blow up and strong instability result for a quasilinear Schrödinger equation[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009,33(11):4192-4200.

[8] GUO B L, CHEN J Q, SU F Q. The "Blow up" problem for a quasilinear Schrödinger equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 2005,46(7):1794-1797.

[9] GLASSEY R T. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1977,18(9):1794-1797.