第 47 卷 第 1 期
2021 年 3 月

延边大学学报(自然科学版)
Journal of Yanbian University (Natural Science)

Vol. 47 No. 1
Mar. 2021

文章编号： 1004-4353(2021)01-0017-04

全空间上一类 Kirchhoff 型问题正基态解的存在性

吴燕林， 钱晓涛

(阳光学院 基础教研部，福建 福州 350015)

摘要： 在全空间上应用 Nehari 流形和集中紧性原理研究了如下一类 Kirchhoff 型问题：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+u=Q(x)|u|^{p-2}u,\ x\in\mathbf{R}^N; \\ u\in H^1(\mathbf{R}^N),\ u>0,\ x\in\mathbf{R}^N, \end{cases}$$

并证明了该问题至少存在一个正基态解.该结果补充了文献[1-4]关于正基态解的存在性结果.

关键词： Kirchhoff 问题；正基态解；变分方法；Nehari 流形；集中紧性原理

中图分类号： O175.2　　　**文献标识码：** A

Existence of ground state positive solution for a class of Kirchhoff type problem on unbounded domain

WU Yanlin， QIAN Xiaotao

(*Department of Basic Teaching and Research*, *Yango University*, *Fuzhou* 350015, *China*)

Abstract: We study the following class of Kirchhoff type problem on unbounded domain

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+u=Q(x)|u|^{p-2}u,\ x\in\mathbf{R}^N; \\ u\in H^1(\mathbf{R}^N),\ u>0,\ x\in\mathbf{R}^N, \end{cases}$$

and prove the existence of at least one ground state positive solution by using Nehari manifold and concentration compact principle. The result can be seen as a supplement of literature [1-4] concerning the existence of ground state positive solution.

Keywords: Kirchhoff problem; ground state positive solution; variational method; Nehari manifold; concentration compact principle

0 引言

本文考虑如下 *Kirchhoff* 型问题：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+u=Q(x)|u|^{p-2}u,\ x\in\mathbf{R}^N; \\ u\in H^1(\mathbf{R}^N),\ u>0,\ x\in\mathbf{R}^N. \end{cases} \tag{1}$$

其中：$a,b>0$；$N=2,3$；非线性项幂次 $4<p<2^*$ ($2^*=+\infty$，当 $N=2$；$2^*=6$，当 $N=3$)；位势函数 $Q(x)>0$，且 $Q(x)\in L^\infty(\mathbf{R}^N)$.

收稿日期： 2020－11－25　　**基金项目：** 福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JAT170772)

作者简介： 吴燕林(1984—)，女，副教授，研究方向为非线性分析及其应用.

当 $a=1,b=0,2<p<2^*,Q(x)>0$ 且 $1=\lim\limits_{|x|\to\infty}Q(x)=\inf\limits_{x\in\mathbf{R}^N}Q(x)$ 时,文献[1]证明了问题(1)至少存在一个正解.文献[2]减弱了 $Q(x)$ 在无穷远处所需满足的渐近条件,通过无穷远处的集中紧性原理也证得了文献[1]的结果.当 $N=3,Q(x)\equiv 1$ 时,文献[3-4]分别研究了问题(1)次临界和临界的情形,并均证得了问题(1)至少存在一个正基态解.当 $Q(x)$ 变号时,文献[5]证得了问题(1)至少存在一个正解.文献[6]进一步研究了 $Q(x)$ 变号且 $b<0$ 的情形.受上述文献的启发,本文研究 $Q(x)>0$,且 $Q(x)$ 既不满足无穷远处的渐近性质,也不是一个常数时方程(1)解的存在性.

为了得到问题(1)的正解,本文定义如下泛函:

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2-\frac{1}{p}\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(u^+)^p\mathrm{d}x,$$

其中 $u^+=\max\{u(x),0\}$, $\|u\|^2=\int_{\mathbf{R}^N}a|\nabla u|^2+|u|^2\mathrm{d}x$,即 $\|u\|$ 是 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 空间中由相应内积诱导的等价范数.众所周知,泛函 I 的非平凡临界点就是问题(1)的非负非平凡解.

1 预备知识

给出一些记号:$H^1(\mathbf{R}^N)$ 和 $L^s(\mathbf{R}^N)$ $(2\leqslant s\leqslant 2^*)$ 均为标准的Sobolev空间,$\rightharpoonup$ 和 $\rightarrow$ 分别表示弱收敛和强收敛,$B_r(x_0)$ 表示以 x_0 为中心、r 为半径的球.当无特别指出时,默认为收敛是 $n\to\infty$ 情况下的.固定 $p\in(2,2^*)$,则由 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 的嵌入性质可定义如下:

$$S_p:=\inf\left\{\int_{\mathbf{R}^N}a|\nabla u|^2+|u|^2\mathrm{d}x:\int_{\mathbf{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x=1\right\}>0.$$

以下首先证明泛函 I 具有山路几何结构.

引理1 泛函 I 满足以下两个条件:① 存在 $\alpha,\rho>0$,使得对所有的 $\|u\|=\rho$ 都有 $I(u)\geqslant\alpha>0$;② 存在 $e\in H^1(\mathbf{R}^N)$,使得 $\|e\|>\rho$ 且 $I(e)<0$.

证明 1) 因为 $I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2-\frac{1}{p}\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(u^+)^p\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{|Q(x)|_\infty}{p}\int_{\mathbf{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{|Q(x)|_\infty}{p}S_p^{-p/2}\|u\|^p=\frac{a}{2}\|u\|^2\left(1-\frac{2|Q(x)|_\infty S_p^{-p/2}}{p}\|u\|^{p-2}\right)$,所以存在 $\alpha,\rho>0$,使得对所有的 $\|u\|=\rho$ 都有 $I(u)\geqslant\alpha>0$.

2) 取 $u_0\in H^1(\mathbf{R}^N)$ 满足 $u_0\geqslant 0$ 和 $\|u_0\|=1$,则

$$\lim_{t\to+\infty}I(tu_0)=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{a}{2}t^2\|u_0\|^2+\frac{b}{4}t^4\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_0|^2\mathrm{d}x\right)^2-\frac{1}{p}t^p\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(u_0)^p\mathrm{d}x\right]=-\infty.$$

因此存在 $t_0>\rho$,使得 $I(t_0u_0)<0$.令 $e=t_0u_0$,由此引理1得证.

根据引理1和山路定理可得泛函 I 的一列 $(PS)_{c_*}$ 序列 $\{u_n\}\subset H^1(\mathbf{R}^N)$ 满足 $I(u_n)\to c_*$ 和 $I'(u_n)\to 0$,其中 $c_*:=\inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\max\limits_{t\in[0,1]}I(\gamma(t))\geqslant\alpha>0$, $\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H^1(\mathbf{R}^N)):\gamma(0)=0,I(\gamma(1))<0\}$.

引理2 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 中有界.

证明 由 $\{u_n\}$ 是泛函 I 的一列 $(PS)_{c_*}$ 序列可知

$$c_*+1+o(1)\geqslant I(u_n)-\frac{1}{4}\langle I'(u_n),u_n\rangle=\frac{1}{4}\|u_n\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(u_n^+)^p\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{4}\|u_n\|^2,$$

所以 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 中有界.

引理3 存在一列 $\{y_n\}\subset\mathbf{R}^N$ 和常数 $R,\beta>0$,使得 $\liminf\limits_{n\to+\infty}\int_{B_R(y_n)}|u_n|^2\mathrm{d}x\geqslant\beta>0$.

证明 若引理3的结论不成立,则由集中紧性原理[7]可知,对于任意的 $r\in(2,2^*)$,有 $u_n\to 0$ 于 $L^r(\mathbf{R}^N)$.因此由 Vitali 收敛定理和 $Q(x)\in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ 可知,有 $\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(u_n^+)^p\mathrm{d}x\to 0$.由此可得

$$o(1)=\langle I'(u_n),u_n\rangle=\|u_n\|^2+b\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(u_n^+)^p\mathrm{d}x=$$

$$\|u_n\|^2+b\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2+o(1),$$

因此 $u_n\to 0$ 于 $H^1(\mathbf{R}^N)$. 于是有 $I(u_n)\to 0$，这与 $I(u_n)\to c_*\geqslant\alpha>0$ 矛盾. 引理 3 证毕.

为了得到方程(1) 的基态解，定义如下的 Nehari 流形：

$$\Lambda=\{u\in H^1(\mathbf{R}^N)\backslash\{0\}:G(u)=0\},$$

其中 $G(u)=\langle I'(u),u\rangle$.

引理 4　对于任意的 $u\in\Lambda$，存在常数 $\sigma,\delta>0$ 使得 $\|u\|\geqslant\sigma$ 且 $\langle G'(u),u\rangle\leqslant-\delta$.

证明　对于任意的 $u\in\Lambda$，有

$$0=\langle I'(u),u\rangle=\|u\|^2+b\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(u^+)^p\mathrm{d}x\geqslant\|u\|^2-|Q(x)|_\infty S_p^{-p/2}\|u\|^p.$$

令 $\sigma=(|Q(x)|_\infty S_p^{-p/2})^{-1/(p-2)}$，于是有 $\|u\|\geqslant\sigma$，进而可得

$$\langle G'(u),u\rangle=2\|u\|^2+4b\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2-p\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(u^+)^p\mathrm{d}x=$$

$$(2-p)\|u\|^2+b(4-p)\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2\leqslant-(p-2)\|u\|^2\leqslant-(p-2)\sigma^2.$$

令 $\delta=(p-2)\sigma^2$，由此即可证得引理 4 成立.

由文献[8] 中命题 3.11 的证明可知，对于任意的 $u\in H^1(\mathbf{R}^N)\backslash\{0\}$，都存在 $t(u)$ 使得 $t(u)u\in\Lambda$ 且 $c_*=\inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\max\limits_{t\in[0,1]}I(\gamma(t))=\inf\limits_{u\in\Lambda}I(u)$. 又由引理 4 可知，$G'(u)\neq 0$. 因此，若泛函 I 在 $u_*\in\Lambda$ 达到极小值 c_*，则 u_* 是泛函 I 的非平凡临界点.

2　主要结果及其证明

定理 1　问题(1) 至少存在一个正基态解.

证明　由引理 1 和引理 2 知，泛函 I 存在一个有界 $(PS)_{c_*}$ 序列 $\{u_n\}\subset H^1(\mathbf{R}^N)$. 由引理 3 知，存在一列 $\{y_n\}\subset\mathbf{R}^N$ 和常数 $R,\beta>0$ 使得 $\liminf\limits_{n\to\infty}\int_{B_R(y_n)}|u_n|^2\mathrm{d}x\geqslant\beta>0$.

令 $v_n(x):=u_n(x+y_n)$，则由全空间 $\mathbf{R}^N$ 的平移不变性知 $\{v_n\}$ 也是泛函 I 的一个有界 $(PS)_{c_*}$ 序列. 于是，可以假设 $v_*\in H^1(\mathbf{R}^N)$ 满足 $v_n\rightharpoonup v_*$ 于 $H^1(\mathbf{R}^N)$，且 $v_n\to v_*$ 于 $L^2(B_R(0))$. 又因为

$$\int_{B_R(0)}|v_*|^2\mathrm{d}x=\liminf_{n\to\infty}\int_{B_R(0)}|v_n|^2\mathrm{d}x=\liminf_{n\to\infty}\int_{B_R(y_n)}|u_n|^2\mathrm{d}x\geqslant\beta>0,$$

所以 $v_*\neq 0$.

由范数的弱下半连续性知，有 $\liminf\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_*|^2\mathrm{d}x$. 再由 $\{v_n\}$ 是泛函 I 的一个 $(PS)_{c_*}$ 序列知，若 $\liminf\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x>\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_*|^2\mathrm{d}x$，则对于任意的 $\varphi\in H^1(\mathbf{R}^N)$ 有

$$0=\liminf_{n\to\infty}\langle I'(v_n),\varphi\rangle=$$

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\int_{\mathbf{R}^N}(a\nabla v_n\nabla\varphi+v_n\varphi)\mathrm{d}x+b\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^N}\nabla v_n\nabla\varphi\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(v_n^+)^{p-1}\varphi\mathrm{d}x\right]=$$

$$\int_{\mathbf{R}^N}(a\nabla v_*\nabla\varphi+v_*\varphi)\mathrm{d}x+b\left(\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbf{R}^N}\nabla v_*\nabla\varphi\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(v_*^+)^{p-1}\varphi\mathrm{d}x>$$

$$\int_{\mathbf{R}^N}(a\nabla v_*\nabla\varphi+v_*\varphi)\mathrm{d}x+b\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_*|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^N}\nabla v_*\nabla\varphi\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(v_*^+)^{p-1}\varphi\mathrm{d}x.$$

在上式中，取 $\varphi=v_*$，则

$$\langle I'(v_*),v_*\rangle=\|v_*\|^2+b\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_*|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(v_*^+)^p\mathrm{d}x<0. \tag{2}$$

再取 $t_*=t_*(v_*)\in\mathbf{R}^+$ 使得 $t_*v_*\in\Lambda$,则

$$\langle I'(t_*v_*),t_*v_*\rangle=t_*^2\|v_*\|^2+bt_*^4\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_*|^2\mathrm{d}x\right)^2-t_*^p\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(v_*^+)^p\mathrm{d}x=0.$$

将上面的等式两边同除以 t_*^p 得

$$\frac{1}{t_*^{p-2}}\|v_*\|^2+b\frac{1}{t_*^{p-4}}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_*|^2\mathrm{d}x\right)^2=\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(v_*^+)^p\mathrm{d}x.$$

将上式代入式(2)得 $\left(1-\frac{1}{t_*^{p-2}}\right)\|v_*\|^2+b\left(1-\frac{1}{t_*^{p-4}}\right)\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_*|^2\mathrm{d}x\right)^2<0$,所以 $t_*\in(0,1)$. 再由Fatou引理有

$$\begin{aligned}&c_*\leqslant I(t_*v_*)=I(t_*v_*)-\frac{1}{4}\langle I'(t_*v_*),t_*v_*\rangle=\\&\frac{1}{4}t_*^2\|v_*\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)t_*^p\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(v_*^+)^p\mathrm{d}x<\frac{1}{4}\|v_*\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(v_*^+)^p\mathrm{d}x\leqslant\\&\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}\|v_n\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(v_n^+)^p\mathrm{d}x\right]=\liminf_{n\to\infty}\left[I(v_n)-\frac{1}{4}\langle I'(v_n),v_n\rangle\right]=c_*.\end{aligned}$$

$c_*<c_*$ 矛盾,所以 $\liminf\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x>\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_*|^2\mathrm{d}x$ 不可能成立. 于是可知,$\liminf\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_*|^2\mathrm{d}x$. 因此 $\langle I'(v_*),v_*\rangle=0$,即 $v_*\in\Lambda$. 进而可得

$$c_*\leqslant I(v_*)=I(v_*)-\frac{1}{4}\langle I'(v_*),v_*\rangle\leqslant\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}\|v_n\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbf{R}^N}Q(x)(v_n^+)^p\mathrm{d}x\right]=c_*,$$

其中第2个不等式使用了Fatou引理,故 $I(v_*)=c_*$. 这表明 $v_*\geqslant0$ 是问题(1)的非平凡基态解. 再由标准的正则性提升方法和强极大值原理可知,$v_*>0$. 综上可知,v_* 是问题(1)的正基态解,定理1证毕.

注 显然,文献[1-4]的 $Q(x)$ 均满足本文的条件,因此本文的结果可以看作是文献[1-4]的补充.

参考文献:

[1] DING W Y, NI W M. On the existence of positive entire solutions of a semilinear Elliptic equation[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1986,91(4):283-308.

[2] BAHRI A, LIONS P L. On the existence of a positive solution of semilinear Elliptic equations in unbounded domains[J]. Annales De L Institut Henri Poincare-Analysis Non Linear, 1997,14(3):365-413.

[3] HE X M, ZOU W M. Existence and concentration behavior of positive solutions for a Kirchhoff equation in $\mathbf{R}^3$[J]. Journal of Differential Equations, 2012,252(2):1813-1834.

[4] WANG J, TIAN L X, XU J X, et al. Multiplicity and concentration of positive solutions for a Kirchhoff type problem with critical growth[J]. Journal of Differential Equations, 2012,253(7):2314-2351.

[5] CHEN J Q. Multiple positive solutions to a class of Kirchhoff equation on $\mathbf{R}^3$ with indefinite nonlinearity[J]. Nonlinear Analysis, 2014,96:134-145.

[6] QIAN X T, CHAO W. Existence of positive solutions for nonlocal problems with indefinite nonlinearity[J]. Boundary Value Problems, 2020,40:1-13.

[7] LIONS P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations[J]. Annales De Linstitut Henri Poincare Non Linear Analysis, 1984,1:223-283.

[8] WILLEM M. Minimax Theorems[M]. Boston: Birkhäuser, 1996:133-134.