文章编号：1004-4353(2021)01-0010-07

带有局部化源的弱耦合退化奇异抛物型方程组解的爆破性

林志强
（福州理工学院，福建 福州 350506）

摘要：在齐次狄利克雷边界条件下讨论了带有局部化源的弱耦合退化奇异抛物型方程组 $u_t-(x^{\alpha}u_x)_x=\mathrm{e}^{mu(x_0(t),t)+nv(x_0(t),t)}$，$v_t-(x^{\beta}v_x)_x=\mathrm{e}^{pu(x_0(t),t)+qv(x_0(t),t)}$ 的爆破性，其中 $x_0(t):\mathbf{R}^+\to(0,a)$ 是 Hölder 连续的，$T\leqslant\infty$，$a(a>0)$ 是常数，m、n、p、q 是正实数，$\alpha,\beta\in[0,2)$. 利用上下解的方法得到了上述方程组的非负古典解的存在性和解在有限时刻爆破的充分条件，并得到了 $\alpha=\beta$ 条件下的解的爆破速率.

关键词：上下解；局部化源；爆破；爆破集；爆破速率估计
中图分类号：O175.26　　**文献标识码**：A

Global existence and blow-up for parabolic system with localized source

LIN Zhiqiang
(*Fuzhou Institute of Technology*, *Fuzhou* 350506, *China*)

Abstract: In this paper, we discuss the following weakly coupled degenerate and singular parabolic equations with localized source $u_t-(x^{\alpha}u_x)_x=\mathrm{e}^{mu(x_0(t),t)+nv(x_0(t),t)}$, $v_t-(x^{\beta}v_x)_x=\mathrm{e}^{pu(x_0(t),t)+qv(x_0(t),t)}$ in $(0,a)\times(0,T)$ with homogeneous Dirichlet boundary conditions, where $x_0(t):\mathbf{R}^+\to(0,a)$ is Hölder continuous, $T\leqslant\infty$, a $(a>0)$ are constants, m,n,p,q are positive real numbers and $\alpha,\beta\in[0,2)$. The existence of a unique classical non-negative solution is established and the sufficient conditions for the solution that blow-up in finite time are obtained. We also obtain the blow-up rate under the condition $\alpha=\beta$.

Keywords: upper and lower solutions; localized source; blow-up; blow-up set; blow-up rate estimates

0　引言

在文献[1]中，作者研究了带有固定局部化源的抛物型方程组

$$\begin{cases}x^{\gamma_1}u_t-(x^{\alpha}u_x)_x=v^{p}(x_0,t),\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T);\\ x^{\gamma_2}u_t-(x^{\beta}v_x)_x=u^{q}(x_0,t),\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T),\end{cases}$$

得到了该方程组唯一非负古典解的存在性以及解的全局存在性的充分条件和该方程组在有限时间解的爆破性，并证明了在某一适当的条件下解的爆破集是整个区域. 在文献[2]中，作者研究了如下带有非局部源的抛物型方程组：

收稿日期：2020－09－20　　**基金项目**：福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JT180741)
作者简介：林志强(1983—)，男，讲师，研究方向为偏微分方程.

$$\begin{cases}u_t-(x^\alpha u_x)_x=\int_0^a v^n(x,t)\mathrm{e}^{mu(x,t)}\mathrm{d}x,\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T);\\ u_t-(x^\beta v_x)_x=\int_0^a u^p(x,t)\mathrm{e}^{qv(x,t)}\mathrm{d}x,\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T).\end{cases}$$

作者得到了该方程组局部解的存在唯一性，并用上下解的方法得到了该方程组解的整体存在性和有限时刻爆破的充分条件.在文献[3]中，作者研究了带有局部源的抛物型方程整体解的存在性和解的爆破性.在文献[4]中，作者研究了带有非线性局部源的抛物型方程组解的一致爆破模式和边界层问题.在文献[5]中，作者研究了带有局部源的渗流方程整体解的有界性.在文献[6]中，作者研究了带局部源的退化抛物方程(渗流方程)解的爆破性.在文献[7]中，作者研究了带局部源的退化和奇异的抛物方程解的爆破性.在文献[8]中，作者研究了带局部源的弱耦合退化和奇异抛物方程组整体解的存在性和解的爆破性.受以上文献的启发，本文讨论下列方程组：

$$\begin{cases}u_t-(x^\alpha u_x)_x=\mathrm{e}^{mu(x_0(t),t)+nv(x_0(t),t)},\ x\in(0,a),\ t>0;\\ v_t-(x^\beta v_x)_x=\mathrm{e}^{pu(x_0(t),t)+qv(x_0(t),t)},\ x\in(0,a),\ t>0;\\ u(0,t)=u(a,t)=v(0,t)=v(a,t),\ t>0;\\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x),\ x\in(0,a).\end{cases}\tag{1}$$

其中：$x_0(t):\mathbf{R}^+\to(0,a)$ 是 Hölder 连续的；初值 $u_0(x),v_0(x)\in C^{2+\gamma}([0,a])$ 在 $\gamma\in(0,1)$ 时为非负非平凡函数，并且满足相容性条件；m、n、p、q 是正实数；$T>0$；$a>0$；$\alpha,\beta\in[0,2)$，为常数.令 $D=(0,a)$，$\Omega_t=D\times(0,t]$，$\overline{D}$ 和 $\overline{\Omega}_t$ 是闭区域.当 x 趋于 0 时，u_x,u_{xx} 和 v_x,v_{xx} 的系数可能趋于 0 或者 ∞，所以方程组(1)是退化和奇异的.

问题(1)不仅可以用于描述带有内部局部源项的几何体的热传导问题[9]，还可以用于描述某些动力系统发生在一点、几点甚至某曲线处的物理现象[10-11]，因此研究问题(1)具有重要的现实意义.

1　比较原理

为讨论问题(1)的非负古典解的唯一性，首先给出问题(1)上下解的定义.

定义1　称非负函数$(u(x,t),v(x,t))$为问题(1)的上解，如果$(u(x,t),v(x,t))\in[C([0,a]\times[0,T))\cap C^{2,1}((0,a)\times(0,T))]^2$ 且满足

$$\begin{cases}u_t-(x^\alpha u_x)_x\geqslant\mathrm{e}^{mu(x_0(t),t)+nv(x_0(t),t)},\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T);\\ v_t-(x^\beta v_x)_x\geqslant\mathrm{e}^{pu(x_0(t),t)+qv(x_0(t),t)},\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T);\\ u(0,t)\geqslant0,\ u(a,t)\geqslant0,\ v(0,t)\geqslant0,\ v(a,t)\geqslant0,\ t\in(0,T);\\ u(x,0)\geqslant u_0(x),\ v(x,0)\geqslant v_0(x),\ x\in[0,a].\end{cases}\tag{2}$$

类似地，如果$(u(x,t),v(x,t))\in[C([0,a]\times[0,T))\cap C^{2,1}((0,a)\times(0,T))]^2$ 满足问题(2)的反向不等式，则称其为问题(1)的下解.

引理1　令 $\mu_i(t),\nu_i(t)\ (i=1,2)$，$\lambda_i(x_0(t),t),\theta_i(x_0(t),t)\ (i=1,2)$ 是定义在$[0,r]$上的非负连续函数，其中 $r\in(0,T)$.令$(u(x,t),v(x,t))\in[C(\overline{\Omega}_r)\cap C^{2,1}(\Omega_r)]^2$ 满足：

$$u_t-(x^\alpha u_x)_x\geqslant\mu_1(t)\lambda_1(x_0(t),t)u(x_0(t),t)+\nu_1(t)\theta_1(x_0(t),t)v(x_0(t),t),$$
$$(x,t)\in(0,a)\times(0,T);$$
$$v_t-(x^\beta v_x)_x\geqslant\mu_2(t)\lambda_2(x_0(t),t)v(x_0(t),t)+\nu_2(t)\theta_2(x_0(t),t)u(x_0(t),t),$$
$$(x,t)\in(0,a)\times(0,T);$$
$$u(0,t)\geqslant0,\ u(a,t)\geqslant0,\ v(0,t)\geqslant0,\ v(a,t)\geqslant0,\ t\in(0,T);$$
$$u(x,0)\geqslant0,\ v(x,0)\geqslant0,\ x\in[0,a],$$

则有 $u(x,t)\geqslant0,\ v(x,t)\geqslant0,\ (x,t)\in[0,a]\times[0,T)$.

证明　如果$(w(x,t),z(x,t))\in[C(\overline{\Omega}_r)\cap C^{2,1}(\Omega_r)]^2$ 满足：

$$\begin{cases}w_t-(x^{\alpha}w_x)_x\geqslant\mu_1(t)\lambda_1(x_0(t),t)w(x_0(t),t)+\nu_1(t)\theta_1(x_0(t),t)z(x_0(t),t),\\ \quad (x,t)\in(0,a)\times(0,T);\\ z_t-(x^{\beta}z_x)_x\geqslant\mu_2(t)\lambda_2(x_0(t),t)z(x_0(t),t)+\nu_2(t)\theta_2(x_0(t),t)w(x_0(t),t),\\ \quad (x,t)\in(0,a)\times(0,T);\\ w(0,t)\geqslant 0,\ w(a,t)\geqslant 0,\ z(0,t)\geqslant 0,\ z(a,t)\geqslant 0,\ t\in(0,T);\\ w(x,0)>0,\ z(x,0)>0,\ x\in[0,a],\end{cases}\tag{3}$$

则

$$w(x,t)\geqslant 0,\ z(x,t)\geqslant 0,\ (x,t)\in\Omega_r.\tag{4}$$

令 $w(x,t)=u(x,t)+\eta e^{ct}$, $z(x,t)=v(x,t)+\eta e^{ct}$,其中 $\eta(\eta>0)$ 充分小,C 是待定的常数,则在 Ω_r 边界上有 $w(x,t)>0$, $z(x,t)>0$,且

$$w_t-(x^{\alpha}w_x)_x-\mu_1(t)\lambda_1(x_0(t),t)w(x_0(t),t)-\nu_1(t)\theta_1(x_0(t),t)z(x_0(t),t)\geqslant$$
$$\eta e^{ct}(c-\mu_1(t)\lambda_1(x_0(t),t)-\nu_1(t)\theta_1(x_0(t),t));$$
$$z_t-(x^{\beta}z_x)_x-\mu_2(t)\lambda_2(x_0(t),t)z(x_0(t),t)-\nu_2(t)\theta_2(x_0(t),t)w(x_0(t),t)\geqslant$$
$$\eta e^{ct}(c-\mu_2(t)\lambda_2(x_0(t),t)-\nu_2(t)\theta_2(x_0(t),t)).$$

令 $c_1=\max\limits_{t\in[0,r]}[\mu_1(t)\lambda_1(x_0(t),t)+\nu_1(t)\theta_1(x_0(t),t)]$, $c_2=\max\limits_{t\in[0,r]}[\mu_2(t)\lambda_2(x_0(t),t)+\nu_2(t)\theta_2(x_0(t),t)]$,并取 $c=\max[c_1,c_2]$,则由式(3) 和式(4) 可知,$w(x,t)>0$, $z(x,t)>0$, $(x,t)\in[0,a]\times[0,r]$. 当 $\eta\to 0^+$ 时,可得 $u(x,t)\geqslant 0$, $v(x,t)\geqslant 0$, $(x,t)\in[0,a]\times[0,r]$. 再根据 $r\in(0,T)$ 的任意性知引理 1 成立.

引理 2 假定(u,v) 是问题(1) 的非负解,若非负函数$(w(x,t),z(x,t))\in[C(\bar{\Omega}_r)\cap C^{2,1}(\Omega_r)]^2$ 满足

$$\begin{cases}w_t-(x^{\alpha}w_x)_x\geqslant(\leqslant)e^{mw(x_0(t),t)+nz(x_0(t),t)},\ (x,t)\in(0,a)\times(0,r);\\ z_t-(x^{\beta}z_x)_x\geqslant(\leqslant)e^{qz(x_0(t),t)+pw(x_0(t),t)},\ (x,t)\in(0,a)\times(0,r);\\ u(0,t)\geqslant(=)0,\ u(a,t)\geqslant(=)0,\ v(0,t)\geqslant(=)0,\ v(a,t)\geqslant(=)0,\ t\in(0,r);\\ u(x,0)\geqslant(\leqslant)u_0(x),\ v(x,0)\geqslant(\leqslant)v_0(x),\ x\in[0,a],\end{cases}\tag{5}$$

则$(w(x,t),z(x,t))\geqslant(\leqslant)(u(x,t),v(x,t))$, $(x,t)\in[0,a]\times[0,T)$. 式(5) 中 $r\in(0,T)$.

证明 首先证明"$\geqslant$"的情况. 令 $\phi_1(x,t)=w(x,t)-u(x,t)$, $\phi_2(x,t)=z(x,t)-v(x,t)$,并将方程(5) 减去问题(1),则根据中值定理有:

$$\phi_{1t}-(x^{\alpha}\phi_{1x})_x\geqslant e^{mw(x_0(t),t)+nz(x_0(t),t)}-e^{mu(x_0(t),t)+nv(x_0(t),t)}=e^{mw(x_0(t),t)+nz(x_0(t),t)}-$$
$$e^{mu(x_0(t),t)+nz(x_0(t),t)}+e^{mu(x_0(t),t)+nz(x_0(t),t)}-e^{mu(x_0(t),t)+nv(x_0(t),t)}=e^{nz(x_0(t),t)}[e^{mw(x_0(t),t)}-e^{mu(x_0(t),t)}]+$$
$$e^{mu(x_0(t),t)}[e^{nz(x_0(t),t)}-e^{nv(x_0(t),t)}]=e^{nz(x_0(t),t)}me^{m\eta_1}\phi_1(x_0(t),t)+e^{mu(x_0(t),t)}ne^{n\eta_2}\phi_2(x_0(t),t)=:$$
$$\mu_1(t)\lambda_1(x_0(t),t)\phi_1(x_0(t),t)+\nu_1(t)\theta_1(x_0(t),t)\phi_2(x_0(t),t),$$
$$\phi_{2t}-(x^{\beta}\phi_{2x})_x\geqslant e^{qz(x_0(t),t)+pw(x_0(t),t)}-e^{qv(x_0(t),t)+pu(x_0(t),t)}=e^{qz(x_0(t),t)+pw(x_0(t),t)}-$$
$$e^{pw(x_0(t),t)+qv(x_0(t),t)}+e^{pw(x_0(t),t)+qv(x_0(t),t)}-e^{qv(x_0(t),t)+pu(x_0(t),t)}=(e^{qz(x_0(t),t)}-e^{qv(x_0(t),t)})e^{pw(x_0(t),t)}+$$
$$(e^{pw(x_0(t),t)}-e^{pu(x_0(t),t)})e^{qv(x_0(t),t)}=e^{pw(x_0(t),t)}qe^{q\eta_3}\phi_2(x_0(t),t)+e^{qv(x_0(t),t)}pe^{p\eta_4}\phi_1(x_0(t),t)=:$$
$$\mu_2(t)\lambda_2(x_0(t),t)\phi_2(x_0(t),t)+\nu_2(t)\theta_2(x_0(t),t)\phi_1(x_0(t),t).$$

其中 η_1 和 η_3 是 u 和 w 的中间值,η_2 和 η_4 是 v 和 z 的中间值. 由上述可知 $\phi_1(x,t)$ 和 $\phi_2(x,t)$ 满足:

$$\phi_{1t}-(x^{\alpha}\phi_{1x})_x\geqslant\mu_1(t)\lambda_1(x_0(t),t)\phi_1(x_0(t),t)+\nu_1(t)\theta_1(x_0(t),t)\phi_2(x_0(t),t),$$
$$(x,t)\in(0,a)\times(0,r);$$
$$\phi_{2t}-(x^{\beta}\phi_{2x})_x\geqslant\mu_2(t)\lambda_2(x_0(t),t)\phi_2(x_0(t),t)+\nu_2(t)\theta_2(x_0(t),t)\phi_1(x_0(t),t),$$
$$(x,t)\in(0,a)\times(0,r);$$
$$\phi_1(0,t)\geqslant 0,\ \phi_1(a,t)\geqslant 0,\ \phi_2(0,t)\geqslant 0,\ \phi_2(a,t)\geqslant 0,\ t\in(0,r);$$
$$\phi_1(x,0)\geqslant 0,\ \phi_2(x,0)\geqslant 0,\ x\in[0,a].$$

对任意 $r\in(0,T)$，由引理 1 知$(\phi_1(x,t),\phi_2(x,t))\geqslant(0,0)$，所以在$[0,a]\times[0,T)$上有 $w(x,t)\geqslant u(x,t)$，$z(x,t)\geqslant v(x,t)$. 因“$\leqslant$”的证明与“$\geqslant$”的情况类似，故省略. 综上，引理 2 得证.

2　解的有限时间爆破性

令 $\underline{u}(x,t)=\underline{u}(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{mu(x_0(s),s)+nv(x_0(s),s)}\mathrm{d}s$，$\bar{u}=\underline{u}+C_0$，$\underline{v}(x,t)=\underline{v}(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{pu(x_0(s),s)+qv(x_0(s),s)}\mathrm{d}s$，$\bar{v}=\underline{v}+C_0$，其中 $C_0=\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty$. 对 t 求导得：

$$\underline{u}_t-(x^\alpha\underline{u}_x)_x=\bar{u}_t-(x^\alpha\bar{u}_x)_x=\mathrm{e}^{mu(x_0(t),t)+nv(x_0(t),t)}=u_t-(x^\alpha u_x)_x,$$

$$\underline{v}_t-(x^\beta\underline{v}_x)_x=\bar{v}_t-(x^\beta\bar{v}_x)_x=\mathrm{e}^{pu(x_0(t),t)+qv(x_0(t),t)}=v_t-(x^\beta v_x)_x.$$

因为 $\underline{u}(x,0)=0\leqslant u_0(x)\leqslant\bar{u}(x,0)$，$\underline{v}(x,0)=0\leqslant v_0(x)\leqslant\bar{v}(x,0)$，则根据最值原理可知，只要$(u,v)$存在，就有 $\underline{u}\leqslant u\leqslant\bar{u}$ 和 $\underline{v}\leqslant v\leqslant\bar{v}$. 特别地，$\underline{u}(t)\leqslant u(x_0(t),t)\leqslant\bar{u}(t)$，$\underline{v}(t)\leqslant v(x_0(t),t)\leqslant\bar{v}(t)$.

定理 1　假定(u,v) 是问题(1) 的非负解，则(u,v) 在有限时刻爆破，且爆破集为$(0,a)$.

证明　由 $(u,v)\geqslant(\underline{u},\underline{v})$ 有：$\underline{u}_t=\mathrm{e}^{mu(x_0(t),t)+nv(x_0(t),t)}\geqslant\mathrm{e}^{m\underline{u}(t)+n\underline{v}(t)}\geqslant\mathrm{e}^{n\underline{v}(t)}$，$t>0$；$\underline{v}_t=\mathrm{e}^{pu(x_0(t),t)+qv(x_0(t),t)}\geqslant\mathrm{e}^{p\underline{u}(t)+q\underline{v}(t)}\geqslant\mathrm{e}^{p\underline{u}(t)}$，$t>0$，所以$(\underline{u}+\underline{v})_t\geqslant\mathrm{e}^{k\underline{v}(t)}+\mathrm{e}^{k\underline{u}(t)}\geqslant2\mathrm{e}^{k(\underline{u}+\underline{v})/2}$，其中 $k=\min(n,p)$. 进而可得 $-(\mathrm{e}^{-k(\underline{u}+\underline{v})/2})_t=\frac{k}{2}\mathrm{e}^{-k(\underline{u}+\underline{v})/2}(\underline{u}+\underline{v})_t\geqslant c$，$t>0$. 对上述不等式从 0 到 t 进行积分，可得 $t\leqslant C_1-C_2\mathrm{e}^{-k(\underline{u}+\underline{v})(t)/2}\leqslant C_1$. 该结果表明$(\underline{u}+\underline{v})$ 在有限时间内. 再由 $\underline{u}\leqslant u$，$\underline{v}\leqslant v$ 可知，(u,v) 在有限时间爆破，且爆破集为$(0,a)$.

3　解的同时爆破性

为了证明问题(1) 的解存在全局爆破和爆破集，本文假设：

(H) $\alpha,\beta\in(0,1)$，且对于常数 M_1 和 M_2 有$(x^\alpha u_{0x})_x\leqslant M_1$，$(x^\alpha v_{0x})_x\leqslant M_2$，$x\in(0,a)$.

以下用 T 表示$(u(x,t),v(x,t))$的爆破时间，并且令 $g_1(t)=\mathrm{e}^{mu(x_0(t),t)+nv(x_0(t),t)}$，$G_1(t)=\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s$；$g_2(t)=\mathrm{e}^{pu(x_0(t),t)+qv(x_0(t),t)}$，$G_2(t)=\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s$.

引理 3　令假设(H) 成立，则问题(1) 的解$(u(x,t),v(x,t))$ 满足

$$(x^\alpha u_x)_x\leqslant M_1,\ (x^\alpha v_x)_x\leqslant M_2,\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T).\tag{6}$$

证明　因引理 3 的证明与文献[8] 中的证明类似，故略.

引理 4　令假设(H) 成立，并假定问题(1) 的解$(u(x,t),v(x,t))$ 在有限时刻 T 同时爆破，则

$$\lim_{t\to T}G_1(t)=\infty,\ \lim_{t\to T}G_2(t)=\infty.$$

证明　因引理 4 的证明与文献[8] 中的证明类似，故略.

引理 5　令假设(H) 成立，并假定问题(1) 的解$(u(x,t),v(x,t))$ 在有限时刻 T 同时爆破，则

$$\lim_{t\to T}\frac{u(x,t)}{G_1(t)}=1,\ \lim_{t\to T}\frac{v(x,t)}{G_2(t)}=1\tag{7}$$

在任意子集 $[c,d]\subset(0,a)$ 一致成立.

证明　因引理 5 的证明与文献[8] 中的证明类似，故略.

定理 2　假定(u,v) 是问题(1) 的非负解，则以下结论成立：

(i) 当 $p\geqslant m$，$n\geqslant q$ 时，u 和 v 同时爆破；

(ii) 当 $p<m$，$n\geqslant q$ 时，或者 $p\geqslant m$，$n<q$ 时，u 和 v 不同时爆破.

证明　i) 假定 u 在有限时刻 T 爆破，而 v 在$(0,a)\times(0,T)$ 上保持有界，则下列式子在$(0,a)$ 上的任意子集一致成立：

$$G_1'(t)=g_1(t)=\mathrm{e}^{mu(x_0(t),t)+nv(x_0(t),t)}\cong \mathrm{e}^{mG_1(t)+nv(x_0(t),t)},\ t\to T;$$
$$G_2'(t)=g_2(t)=\mathrm{e}^{pu(x_0(t),t)+qv(x_0(t),t)}\cong \mathrm{e}^{pG_1(t)+qv(x_0(t),t)},\ t\to T.$$

由于 $u_0(x)$, $v_0(x)$, $v(x,t)$ 是 $(0,a)\times(0,T)$ 上的有界非负函数,所以存在 4 个正的有界函数 $k_i(t)$, $i=1,2,3,4$,且同时有

$$k_1(t)\mathrm{e}^{mG_1(t)}\leqslant G_1'(t)\leqslant k_2(t)\mathrm{e}^{mG_1(t)},\ t\to T;$$
$$k_3(t)\mathrm{e}^{pG_1(t)}\leqslant G_2'(t)\leqslant k_4(t)\mathrm{e}^{pG_1(t)},\ t\to T. \tag{8}$$

由式(8)可得

$$k_0\mathrm{e}^{(p-m)G_1(t)}\leqslant \frac{\mathrm{d}G_2(t)}{\mathrm{d}G_1(t)}\leqslant \frac{k_4(t)}{k_1(t)}\mathrm{e}^{(p-m)G_1(t)}, \tag{9}$$

其中 $k_0=\inf\limits_{t\in(0,T)}\dfrac{k_3(t)}{k_2(t)}>0$. 在 (t_1,t_2) $(0\leqslant t_1<t_2\leqslant T)$ 上对式(9)进行积分可得:

$$\frac{k_0}{p-m}[\mathrm{e}^{(p-m)G_1(t_2)}-\mathrm{e}^{(p-m)G_1(t_1)}]\leqslant G_2(t_2)-G_2(t_1),\ p>m; \tag{10}$$

$$k_0(G_1(t_2)-G_1(t_1))\leqslant G_2(t_2)-G_2(t_1),\ p=m. \tag{11}$$

注意到 $\lim\limits_{t\to T}G_1(t)=\infty$. 令式(10)和式(11)中的 $t_2\to T$,则可得 $\lim\limits_{s\to T}G_2(s)=\infty$. 进而根据式(6)和

$$v(x,t)-v_0(x)=\int_0^t(x^\alpha v_x(x,s))_x\mathrm{d}t=G_2(t),\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T)$$

可得 $\lim\limits_{t\to T}|v(x,t)|_\infty=\infty$,这与假设 v 在 $(0,a)\times(0,T)$ 上有界相矛盾.

假定 v 在有限时刻 T 爆破,u 在 $(0,a)\times(0,T)$ 上保持有界,则当 $n\geqslant q$ 时利用类似于上述的方法可得到 u 和 v 同时爆破.

ii) 首先考虑 $p<m$ 和 $n\geqslant q$ 的情况. 假设 v 在有限时刻 T 爆破,则由定理 1 可得:

$$\underline{u}_t=\mathrm{e}^{mu(x_0(t),t)+nv(x_0(t),t)}\geqslant \mathrm{e}^{m\underline{u}(t)+n\underline{v}(t)},\ t\in(0,T);$$
$$\underline{v}_t=\mathrm{e}^{pu(x_0(t),t)+qv(x_0(t),t)}\geqslant \mathrm{e}^{p\underline{u}(t)+q\underline{v}(t)},\ t\in(0,T). \tag{12}$$

因 $\underline{v}=\bar{v}-C_0$, $\underline{u}=\bar{u}-C_0$,于是可得:

$$\underline{u}_t=\bar{u}_t\leqslant \mathrm{e}^{m(\underline{u}(t)+C_0)+n(\underline{v}(t)+C_0)}=\mathrm{e}^{(m+n)C_0}\mathrm{e}^{m\underline{u}(t)+n\underline{v}(t)},\ t\in(0,T);$$
$$\underline{v}_t=\bar{v}_t\leqslant \mathrm{e}^{p(\underline{u}(t)+C_0)+q(\underline{v}(t)+C_0)}=\mathrm{e}^{(p+q)C_0}\mathrm{e}^{p\underline{u}(t)+q\underline{v}(t)},\ t\in(0,T). \tag{13}$$

由不等式(12)和(13)可得 $c\mathrm{e}^{(m-p)\underline{u}+(n-q)\underline{v}}\leqslant \dfrac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}\underline{v}}\leqslant C\mathrm{e}^{(m-p)\underline{u}+(n-q)\underline{v}}$, $t\in(0,T)$,即

$$c\mathrm{e}^{(n-q)\underline{v}}\mathrm{d}\underline{v}\leqslant \mathrm{e}^{(p-m)\underline{u}}\mathrm{d}\underline{u}\leqslant C\mathrm{e}^{(n-q)\underline{v}}\mathrm{d}\underline{v},\ t\in(0,T). \tag{14}$$

当 $p<m$ 和 $n>q$ 时,在 $[0,t]$ 上对式(14)进行积分可得

$$\frac{c}{n-q}(\mathrm{e}^{(n-q)\underline{v}}-1)\leqslant \frac{1}{p-m}(\mathrm{e}^{(p-m)\underline{u}}-1),\ t\in(0,T). \tag{15}$$

因为 $\underline{u}\leqslant u\leqslant \underline{u}+C_0$, $\underline{v}\leqslant v\leqslant \underline{v}+C_0$,所以若 u 也在有限时刻 T 爆破,则当 t 趋于 T 时不等式(15)出现矛盾,所以 u 和 v 不同时爆破.

当 $p<m$ 且 $n=q$ 时,式(14)等价于 $c\mathrm{d}\underline{v}\leqslant \mathrm{e}^{(p-m)\underline{u}}\mathrm{d}\underline{u}\leqslant C\mathrm{d}\underline{v}$, $t\in(0,T)$. 对该式从 0 到 t 进行积分得

$$c\underline{v}(t)\leqslant \frac{1}{p-m}(\mathrm{e}^{(p-m)\underline{u}}-1),\ t\in(0,T). \tag{16}$$

由上述证明可知,如果 $\underline{u}$ 和 $\underline{v}$ 在有限时刻 T 爆破,则由不等式(16)可推出矛盾,所以 u 和 v 不同时爆破. 当 $p\geqslant m$, $n<q$ 时,采取同样的方法可得到 u 和 v 不同时爆破. 综上,定理 2 得证.

4 解的爆破速率

定理 3 假定 (u,v) 是问题(1)的古典解,且 (u,v) 在有限时间 T 爆破. 若 $\alpha,\beta\in(0,1)$ 且对于常数 M_1 和 M_2 有 $(x^\alpha u_{0x})_x\leqslant M_1$, $(x^\alpha v_{0x})_x\leqslant M_2$, $x\in(0,a)$,则下列结论成立:

(i) 当 $p>m\geqslant 0$ 且 $n>q\geqslant 0$ 时，则 $\lim\limits_{t\to T}\dfrac{u(x,t)}{|\ln(T-t)|}=\dfrac{n-q}{np-mq}$，$\lim\limits_{t\to T}\dfrac{v(x,t)}{|\ln(T-t)|}=\dfrac{p-m}{np-mq}$；

(ii) 当 $p>m\geqslant 0$ 且 $n=q\geqslant 0$ 时，则 $\lim\limits_{t\to T}\dfrac{u(x,t)}{\ln|\ln(T-t)|}=\dfrac{1}{p-m}$，$\lim\limits_{t\to T}\dfrac{v(x,t)}{|\ln(T-t)|}=\dfrac{1}{q}$；

(iii) 当 $p=m\geqslant 0$ 且 $n>q\geqslant 0$ 时，则 $\lim\limits_{t\to T}\dfrac{u(x,t)}{|\ln(T-t)|}=\dfrac{1}{m}$，$\lim\limits_{t\to T}\dfrac{v(x,t)}{\ln|\ln(T-t)|}=\dfrac{1}{n-q}$；

(iv) 当 $p=m\geqslant 0$ 且 $n=q\geqslant 0$ 时，存在常数 $C(C>0)$ 使得：

$-c\ln(T-t)-C\leqslant u(x,t)\leqslant -C\ln(T-t)+C,\ x\in(0,a),\ t\to T;$

$-c\ln(T-t)-C\leqslant v(x,t)\leqslant -C\ln(T-t)+C,\ x\in(0,a),\ t\to T.$

证明　由定理 2 的证明可知，u 和 v 在同一时刻 T 爆破. 由引理 5 可得：

$$\lim_{t\to T}\frac{u^m(x,t)}{G_1^m(t)}=\lim_{t\to T}\frac{v^n(x,t)}{G_2^n(t)}=\lim_{t\to T}\frac{u^p(x,t)}{G_1^p(t)}=\lim_{t\to T}\frac{v^q(x,t)}{G_2^q(t)}=1; \tag{17}$$

$$0\leqslant\frac{u(x,t)}{G_1(t)}\leqslant C,\ 0\leqslant\frac{v(x,t)}{G_2(t)}\leqslant C; \tag{18}$$

其中 $C>0$，$x\in(0,a)$，t 足够接近于 T. 由式(17) 可得：

$$G_1'(t)=g_1(t)=e^{mu(x_0(t),t)+nv(x_0(t),t)}\cong e^{mG_1(t)+nG_2(t)},\ t\to T; \tag{19}$$

$$G_2'(t)=g_2(t)=e^{pu(x_0(t),t)+qv(x_0(t),t)}\cong e^{pG_1(t)+qG_2(t)},\ t\to T. \tag{20}$$

联立式(19) 和式(20) 可得

$$\frac{dG_1(t)}{dG_2(t)}\cong\frac{e^{(n-q)G_2(t)}}{e^{(p-m)G_1(t)}},\ t\to T. \tag{21}$$

i) 由式(21) 可得：

$$e^{G_1(t)}\cong\left[\frac{(p-m)}{(n-q)}\right]^{\frac{1}{p-m}}e^{\frac{(n-q)}{(p-m)}G_2(t)},\ t\to T; \tag{22}$$

$$e^{G_2(t)}\cong\left[\frac{(n-q)}{(p-m)}\right]^{\frac{1}{n-q}}e^{\frac{(p-m)}{(n-q)}G_1(t)},\ t\to T. \tag{23}$$

再由式(18)、(20)、(22) 和式(23) 可得：

$$G_1'(t)\cong e^{mG_1(t)+nG_2(t)}\cong e^{mG_1(t)}\left[\frac{(n-q)}{(p-m)}\right]^{\frac{n}{n-q}}e^{\frac{p-m}{n-q}nG_1(t)}=\left[\frac{(n-q)}{(p-m)}\right]^{\frac{n}{n-q}}e^{\frac{np-mq}{n-q}G_1(t)},\ t\to T; \tag{24}$$

$$G_2'(t)\cong e^{pG_1(t)+qG_2(t)}\cong e^{qG_2(t)}\left[\frac{(p-m)}{(n-q)}\right]^{\frac{p}{p-m}}e^{\frac{n-q}{p-m}pG_2(t)}=\left[\frac{(p-m)}{(n-q)}\right]^{\frac{p}{p-m}}e^{\frac{np-mq}{p-m}G_2(t)},\ t\to T. \tag{25}$$

在 (t,T) 上对式(24)、(25) 进行积分可得：$\lim\limits_{t\to T}\dfrac{G_1(t)}{|\ln(T-t)|}=\dfrac{n-q}{np-mq}$，$\lim\limits_{t\to T}\dfrac{G_2(t)}{|\ln(T-t)|}=\dfrac{p-m}{np-mq}$. 再由式(7) 即可得结论(i) 成立.

ii) 由式(8) 得

$$\frac{1}{p-m}e^{(p-m)G_1(t)}\cong G_2(t),\ t\to T. \tag{26}$$

再联立式(26) 和(20) 得 $G_2'(t)\cong e^{pG_1(t)+qG_2(t)}\cong(p-m)^{\frac{p}{p-m}}e^{qG_2(t)}G_2(t)^{\frac{p}{p-m}}$. 在 (t,T) 上对上式进行积分可得

$$\int_t^T e^{-qG_2(s)}G_2(s)^{\frac{-p}{p-m}}dG_2(s)\cong(p-m)^{\frac{p}{p-m}}(T-t),\ t\to T. \tag{27}$$

因为 $q>0$，积分 $\int_t^T e^{-qG_2(s)}G_2(s)^{\frac{-p}{p-m}}dG_2(s)$ 是收敛的，$\lim\limits_{t\to T}\int_t^T e^{-qG_2(s)}G_2(s)^{\frac{-p}{p-m}}dG_2(s)=0$，且同时注意到

$$\lim_{G_2\to\infty}\frac{\int_{G_2}^{\infty}e^{-q\tau}\tau^{\frac{-p}{p-m}}d\tau}{e^{-qG_2}G_2^{\frac{-p}{p-m}}}=\lim_{G_2\to\infty}\frac{-e^{-qG_2}G_2^{\frac{-p}{p-m}}}{\frac{-p}{p-m}G_2^{\frac{-p}{p-m}-1}e^{-qG_2}-qe^{-qG_2}G_2^{\frac{-p}{p-m}}}=\lim_{G_2\to\infty}\frac{1}{\frac{p}{p-m}G_2^{-1}+q}=\frac{1}{q}$$，所以有

$$\int_t^T \mathrm{e}^{-qG_2(s)} G_2(s)^{\frac{-p}{p-m}} \mathrm{d}G_2(s) \cong \frac{1}{q} \mathrm{e}^{-qG_2(s)} G_2(s)^{\frac{-p}{p-m}},\ t \to T. \tag{28}$$

由式(27)和式(28)可得

$$\frac{1}{q} \mathrm{e}^{-qG_2(s)} G_2(s)^{\frac{-p}{p-m}} \cong (p-m)^{\frac{p}{p-m}} (T-t),\ t \to T. \tag{29}$$

由式(29)可知,当 $t \to T$ 时有 $v(x,t) \sim G_2(t)$,所以 $\mathrm{e}^{-qv(x,t)} v(x,t)^{\frac{-p}{p-m}} \cong q(p-m)^{\frac{p}{p-m}}(T-t)$,$t \to T$,即 $\lim\limits_{t \to T} \mathrm{e}^{qv(x,t)} v(x,t)^{\frac{-p}{p-m}} (T-t) = \frac{1}{q}(p-m)^{\frac{-p}{p-m}}$,$t \to T$. 当 $n=q$ 时,$v(x,t) \sim G_2(t)$ 在 $(0,a)$ 的任意子集一致成立. 再由式(26)和式(29)可得:

$$\mathrm{e}^{pG_1(t)} \cong (p-m)^{\frac{p}{p-m}} G_2(t)^{\frac{p}{p-m}},\ t \to T;$$

$$\mathrm{e}^{qG_2(t)} \cong \frac{1}{q}(p-m)^{\frac{-p}{p-m}} G_2(t)^{\frac{-p}{p-m}} (T-t)^{-1},\ t \to T.$$

由上述 2 个式子可得 $G'_2(t) \cong \mathrm{e}^{pG_1(t)+qG_2(t)} \cong \frac{1}{q}(T-t)^{-1}$,$t \to T$. 在 $(0,t)$ 上对该式进行积分可得 $G_2(t) \cong \frac{1}{q}\ln(T-t)$,$t \to T$. 再由式(7)和 $n=q>0$ 可知结论(ii)得证.

iii)(iii)的证明与(ii)的证明类似,故略.

iv)由 $p=m \geqslant 0$,$n=q \geqslant 0$ 和式(14)可得 $c\underline{v}(t) \leqslant \underline{u}(t) \leqslant C\underline{v}(t)$. 再由 $\underline{v}(t) \leqslant v(x,t) \leqslant \underline{v}(t) + C_0$ 可得 $c_1 \mathrm{e}^{c_2 \underline{v}(t)} \leqslant \underline{v}_t(t) \leqslant C_1 \mathrm{e}^{C_2 \underline{v}(t)}$. 对上式从 t 到 T 积分得:

$$-c\ln(T-t) - C \leqslant \underline{v}(t) \leqslant -C\ln(T-t) + C,\ t \in (0,T). \tag{30}$$

因 $\underline{v} \leqslant \underline{u} \leqslant C\underline{v}$,则由式(30)即可得到 $\underline{u}$ 的估计. 因 $\lim\limits_{t \to T} \frac{u(x,t)}{\underline{u}(t)} = \lim\limits_{t \to T} \frac{v(x,t)}{\underline{v}(t)} = 1$,因此结论(iv)得证.

参考文献:

[1] LI J, CUI Z J, MU C L. Global existence and blow-up for degenerate and singular parabolic system with localized sources[J]. Appl Math Comput, 2008, 199(1): 292-300.

[2] 王胜青,何万生,彭聪明. 具有非局部源的退化奇异抛物方程组解的爆破[J]. 纯粹数学与应用数学,2016,32(5):448-456.

[3] JOHN M C, PEIRCE A, YIN H M. The blow-up property of solutions to some diffusion equations with localized nonlinear reaction[J]. Math Anal Appl, 1992, 169(2): 313-328.

[4] 王明新,李慧玲. 带有非线性局部化反应源项的抛物型方程组解的一致爆破模式与边界层[J]. 中国科学:数学,2004,34(5):537-548.

[5] CHEN Y P, LIU Q L, GAO H J. Boundedness of global solutions of a porous medium equations with a localized source[J]. Nonlinear Analysis, 2006, 64(10): 2168-2182.

[6] 刘其林,李玉祥,谢春红. 带局部非线性反应项的退化解的抛物方程解的爆破性质[J]. 数学学报,2003,6:1135-1142.

[7] ZHENG B Z, CHEN Y P. Global blow-up for a localized degenerate and singular parabolic equations with weighted nonlocal boundary conditions[J]. Ann of Diff Eqs, 2014, 30(4): 484-493.

[8] ZHOU J, MU C L. Global existence and blow-up for weakly coupled degenerate and singular parabolic equation with localized source[J]. Z Angew Math Phys, 2011, 62: 47-66.

[9] CHAN C Y, CHEN C S. A numerical method for semi-linear singular parabolic quenching problem[J]. Quart Appl Math, 1989, 47: 45-57.

[10] BIMPONG-BOTA K, ORTOLEVA P, ROSSI J. Far-From-equilibrium phenomena at local sites of reaction[J]. J Chem Phys, 1974, 60(8): 3124-3133.

[11] ORTOLEVA P, ROSSI J. Local structures in chemical reactions with heterogeneous catalysis[J]. J Chem Phys, 1972, 56(9): 4397-4400.

[12] 叶其孝,李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京:科学出版社,1999:106-147.

[13] 王术. Sobolev 空间与偏微分方程引论[M]. 北京:科学出版社,2008:18-23.

[14] 姜礼尚,陈亚浙,易法槐,等. 数学物理方程讲义[M]. 北京:高等教育出版社,1986:161-183.