文章编号: 1004-4353(2021)01-0001-09

一类分数阶微分包含耦合系统边值问题解的存在性

于鹏艳，　侯成敏*
(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要: 利用 Kakutani 映射非线性选择性定理研究了一类分数阶微分包含耦合系统边值问题解的存在性，结果表明当多值映射具有凸值时上述边值问题至少存在一个解的充分条件.

关键词: Kakutani 映射非线性选择性定理；分数阶微分包含；耦合系统；边值问题
中图分类号: O175.6　　　**文献标识码:** A

The existence of solutions for a class of coupled systems of fractional differential inclusions with coupled boundary value problems

YU Pengyan,　HOU Chengmin*
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: The existence of solutions for a class of coupled fractional-order differential inclusions systems supplemented with boundary value problems is investigated by using the nonlinear alternative for Kakutani maps theorem, and a sufficient condition is given for the existence of at least one solution to the above problem when the multi-valued mappings have convex values.

Keywords: the nonlinear alternative for Kakutani maps theorem; fractional-order differential inclusions; coupled systems; boundary value problems

0　引言

近年来，分数阶微分方程和微分包含耦合系统受到国内外学者的广泛关注，并得到了一些很好的研究成果. 2017 年，H.H.Alsulami 等[1]研究了一类带有不可分的成对边值条件的 Caputo 型分数阶微分方程耦合系统

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}x(t)=f(t,x(t),y(t)),\ t\in[0,T],\ 1<\alpha\leqslant 2; \\ {}^{C}D^{\beta}y(t)=g(t,x(t),y(t)),\ t\in[0,T],\ 1<\beta\leqslant 2; \\ x(0)=\upsilon_1 y(T),\ x'(0)=\upsilon_2 y'(T); \\ y(0)=\mu_1 x(T),\ y'(0)=\mu_2 x'(T) \end{cases}$$

解的存在唯一性. 其中: ${}^{C}D^{\alpha}$ 和 ${}^{C}D^{\beta}$ 分别表示 α 阶和 β 阶 Caputo 型分数阶导数; $f,g:[0,T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; υ_i 和 μ_i 是常实数, $\upsilon_i\mu_i\neq 1$, $i=1,2$.

2019 年，B.Ahmad 等[2] 研究了一类带有边界条件的分数阶微分包含系统

收稿日期: 2020-12-27　　　* **通信作者:** 侯成敏(1963—)，女，教授，研究方向为微分方程及其应用.
基金项目: 吉林省教育厅"十三五"科学技术研究项目(JJKH20170454KJ)

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}x(t)\in F(t,x(t),y(t)),\ t\in[0,T],\ 1<\alpha\leqslant 2; \\ {}^{C}D^{\beta}y(t)\in G(t,x(t),y(t)),\ t\in[0,T],\ 1<\beta\leqslant 2; \\ x(0)=\upsilon_1 y(T),\ x'(0)=\upsilon_2 y'(T); \\ y(0)=\mu_1 x(T),\ y'(0)=\mu_2 x'(T) \end{cases}$$

解的存在性.其中:${}^{C}D^{\alpha}$ 和${}^{C}D^{\beta}$ 分别表示α 阶和β 阶 Caputo 型分数阶导数;$F,G:[0,T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\rightarrow P(\mathbf{R})$ 是多值映射,$P(\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}$ 的所有非空子集全体;υ_i 和μ_i是常实数,$\upsilon_i\mu_i\neq 1$, $i=1,2$.

2019年,B.Ahmad等[3] 研究了一类分数阶混合微分方程系统边值问题

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{1-}D^{\beta}_{0+}x(t)=f(t,x(t),y(t)),\ t\in J:=[0,1],\ 1<\alpha,\ 0<\beta; \\ {}^{C}D^{p}_{1-}D^{q}_{0+}y(t)=g(t,x(t),y(t)),\ t\in J:=[0,1],\ p\leqslant 2,\ q\leqslant 1; \\ x(0)=x'(0)=0,\ x(1)=\gamma y(\eta),\ 0<\eta<1; \\ y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=\delta x(\theta),\ 0<\theta<1 \end{cases}$$

解的存在性.其中:${}^{C}D^{\alpha}_{1-}$ 和${}^{C}D^{p}_{1-}$ 分别表示α阶和p阶右 Caputo 型分数阶导数;D^{β}_{0+} 和 D^{q}_{0+} 分别表示β阶和 q 阶左 Riemann-Liouville 型分数阶导数;$\gamma,\delta\in\mathbf{R}$;$f,g:J\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$.

受以上文献启发,本文考虑一类新的混合 Caputo 型和 Riemann-Liouville 的分数阶微分包含耦合系统问题:

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{1-}D^{\beta}_{0+}x(t)\in F(t,x(t),y(t)),\ t\in J:=[0,1],\ 1<\alpha\leqslant 2,\ 0<\beta\leqslant 1; \\ {}^{C}D^{p}_{1-}D^{q}_{0+}y(t)\in G(t,x(t),y(t)),\ t\in J:=[0,1],\ 1<p\leqslant 2,\ 0<q\leqslant 1; \\ x(0)=x'(0)=0,\ x(1)=\lambda y(\upsilon),\ 0<\upsilon<1; \\ y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=\mu x(\omega),\ 0<\omega<1. \end{cases} \tag{1}$$

其中:${}^{C}D^{\alpha}_{1-}$ 和${}^{C}D^{p}_{1-}$ 分别表示 α 阶和 p 阶右 Caputo 型分数阶导数;D^{β}_{0+} 和 D^{q}_{0+} 分别表示 β 阶和 q 阶左 Riemann-Liouville 型分数阶导数;$F,G:J\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\rightarrow P(\mathbf{R})$ 是多值映射,$P(\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}$ 的所有非空子集全体;$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$.

1 预备知识

设$(X,\|\cdot\|)$ 为赋范空间,记 $P(X)=\{Y\subseteq X:Y\neq\varnothing\}$,$P_b(X)=\{Y\in P(X):Y \text{ 是有界的}\}$,$P_{cl}(X)=\{Y\in P(X):Y\text{ 是闭的}\}$,$P_{cp,c}(X)=\{Y\in P(X):Y\text{ 是紧凸的}\}$.

定义1[4] 设 $G:X\rightarrow P(X)$ 为多值映射.多值映射的基本概念如下:

1) 若对于所有 $x\in X$,$G(x)$ 是凸(闭)的,则称 $P(x)$ 为凸(闭)值的.

2) 若对于任意的$x_0\in X$,集合$G(x_0)$是X的非空闭子集,且对于X中包含$G(x_0)$的每一个开集N,都存在一个 x_0 的开邻域 N_0,使得 $G(x_0)\subseteq N$,则称 G 是上半连续的.

3) 若对于每一个 $B\in P_b(X)$,$G(B)$ 是相对紧的,则称 G 是完全连续的.

4) 若对于每一个 $y\in\mathbf{R}$,函数 $t\rightarrow d(y,G(t))=\inf\{|y-z|:z\in G(t)\}$ 可测,则称多值映射 $G:[a,b]\rightarrow P_{cl}(\mathbf{R})$ 可测.

5) 若多值映射 G 是全连续的,且具有非空紧值,则 G 是上半连续的当且仅当G 有一个闭图,即:$x_n\rightarrow x_*$,$y_n\rightarrow y_*$,$y_n\in G(x_n)\Rightarrow y_*\in G(x_*)$.集合 $Gr(G)=\{(x,y)\in X\times Y,\ y\in G(X)\}$ 表示 G 的图像.

定义2[4] 设$G:[a,b]\times\mathbf{R}^2\rightarrow P(\mathbf{R})$为多值映射,若(i) 对于 $\forall x,y\in\mathbf{R}$,$t\rightarrow G(t,x,y)$ 是可测的;(ii) 当 $t\in[a,b]$ 时,$(x,y)\rightarrow F(t,x,y)$ 是上半连续的,且几乎处处成立;则称多值映射 $G:[a,b]\times\mathbf{R}^2\rightarrow P(\mathbf{R})$ 是 Carathéodory 多值映射.(iii) 设 $G:[a,b]\times\mathbf{R}^2\rightarrow P(\mathbf{R})$ 是 Carathéodory 多值映射.任取 $\rho>0$,$\exists\varphi_\rho\in L^1([a,b],\mathbf{R}^+)$,对于 $x,y\in\mathbf{R}$,$\|x\|$,$\|y\|\leqslant\rho$ 和几乎所有的 $t\in[a,b]$,若有

$\|G(t,x,y)\| = \sup\{|v| : v \in G(t,x,y) \leqslant \varphi_\rho\}$，则称 G 是 L^1-Carathéodory 多值映射.

定义 3[5]　定义函数 $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ 的 r 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分为

$$I_{0+}^{r}f(t)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{1-r}}\mathrm{d}s,$$

其中 $t>0$，$r>0$，$\Gamma(r)$ 为 Gamma 函数，右端积分在 $\mathbf{R}^+$ 上逐点有定义.

定义 4[5]　定义连续函数 $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ 的 r 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数为

$$D_{0+}^{r}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-r)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_0^t(t-s)^{n-r-1}f(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $r>0$，$n=[r]+1$，$[r]$ 表示 r 的整数部分，等式右端积分在 $\mathbf{R}^+$ 上逐点有定义.

定义 5[5]　连续函数 $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ 的 r 阶 Caputo 型分数阶导数可写成

$${}^{c}D_{0+}^{r}f(t)=D_{0+}^{r}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0)\right),\ t>0,\ n-1<r<n.$$

定义 6[5]　若 $f(t)\in C^n[0,\infty)$，则

$${}^{c}D_{0+}^{r}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-r)}\int_0^t\frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{r+1-n}}\mathrm{d}s=I^{n-r}f^{(n)}(t),\ t>0,\ n-1<q<n.$$

引理 1[3]　令 $h,k\in C(J,\mathbf{R})$，$\Lambda:=\dfrac{1-\lambda\mu\upsilon^{q+1}\omega^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\neq 0$，则带有非局部边值条件的线性分数阶微分系统

$$\begin{cases}{}^{C}D_{1-}^{\alpha}D_{0+}^{\beta}x(t)=h(t),\ t\in J:=[0,1];\\ {}^{C}D_{1-}^{p}D_{0+}^{q}y(t)=k(t),\ t\in J:=[0,1];\\ x(0)=x'(0)=0,\ x(1)=\lambda y(\upsilon),\ 0<\upsilon<1;\\ y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=\mu x(\omega),\ 0<\omega<1\end{cases}\tag{2}$$

的解为

$$\begin{cases}x(t)=I_{0+}^{\beta}I_{1-}^{\alpha}h(t)+\dfrac{t^{\beta+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\{[\lambda I_{0+}^{q}I_{1-}^{p}k(\upsilon)-I_{0+}^{\beta}I_{1-}^{\alpha}h(1)]+\\ \qquad\lambda\upsilon^{q+1}[\mu I_{0+}^{\beta}I_{1-}^{\alpha}h(\omega)-I_{0+}^{q}I_{1-}^{p}k(1)]\},\\ y(t)=I_{0+}^{q}I_{1-}^{p}k(t)+\dfrac{t^{q+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\{[\mu I_{0+}^{\beta}I_{1-}^{\alpha}h(\omega)-I_{0+}^{q}I_{1-}^{p}k(1)]+\\ \qquad\mu\omega^{\beta+1}[\lambda I_{0+}^{q}I_{1-}^{p}k(\upsilon)-I_{0+}^{\beta}I_{1-}^{\alpha}h(1)]\}.\end{cases}$$

定义 7　函数 $(x,y)\in C^2(J,\mathbf{R})\times C^2(J,\mathbf{R})$ 是系统(1)的解，即该函数满足系统(1)中的成对边值条件，并存在函数 $f,g\in L^1(J,\mathbf{R})$ 使得 $f(t)\in F(t,x(t),y(t))$，$g(t)\in G(t,x(t),y(t))$ 在 J 上几乎处处成立，其中：

$$\begin{aligned}x(t)=&\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\frac{t^{\beta+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times\\ &\left\{\lambda\int_0^{\upsilon}\frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.\\ &\left.\lambda\upsilon^{q+1}\left[\mu\int_0^{\omega}\frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\},\\ y(t)=&\int_0^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\frac{t^{q+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times\\ &\left\{\mu\int_0^{\omega}\frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.\\ &\left.\mu\omega^{\beta+1}\left[\lambda\int_0^{\upsilon}\frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\}.\end{aligned}$$

2 主要结果及其证明

令空间 $X=\{x(t)\mid x(t)\in C([0,1],\mathbf{R})\}$，并定义 $\|x\|=\sup\{|x(t)|,t\in[0,1]\}$，则 $(X,\|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间[6]. 取 $(x,y)\in X\times X$，并且令 $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$，则显然 $(X\times X,\|(x,y)\|)$ 也是一个巴拿赫空间.

任取 $(x,y)\in X\times X$，并将 $S_{F,(x,y)}=\{f\in L^1([0,1],\mathbf{R}):f(t)\in F(t,x(t),y(t)),\text{ a. e. }t\in[0,1]\}$ 和 $S_{G,(x,y)}=\{g\in L^1([0,1],\mathbf{R}):g(t)\in G(t,x(t),y(t)),\text{ a. e. }t\in[0,1]\}$ 分别作为 F 和 G 的选择集.

根据引理 1，将算子 $\Theta_1,\Theta_2:X\times X\to P(X\times X)$ 定义为如下：

$$\Theta_1(x,y)=\{h_1\in X\times X:\exists f\in S_{F,(x,y)},g\in S_{G,(x,y)}\text{ 使得 } h_1(x,y)(t)=Q_1(x,y)(t),\text{对于 }\forall t\in[0,1]\},\tag{3}$$

$$\Theta_2(x,y)=\{h_2\in X\times X:\exists f\in S_{F,(x,y)},g\in S_{G,(x,y)}\text{ 使得 } h_2(x,y)(t)=Q_2(x,y)(t),\text{对于 }\forall t\in[0,1]\}.\tag{4}$$

其中：

$$\begin{aligned}Q_1(x,y)(t)=&\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\frac{t^{\beta+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times\\&\left\{\lambda\int_0^{\upsilon}\frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.\\&\left.\lambda\upsilon^{q+1}\left[\mu\int_0^{\omega}\frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\},\\Q_2(x,y)(t)=&\int_0^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\frac{t^{q+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times\\&\left\{\mu\int_0^{\omega}\frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.\\&\left.\mu\omega^{\beta+1}\left[\lambda\int_0^{\upsilon}\frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\}.\end{aligned}$$

再定义算子 $\Theta:X\times X\to P(X\times X)$：$\Theta(x,y)(t)=\begin{pmatrix}\Theta_1(x,y)(t)\\\Theta_2(x,y)(t)\end{pmatrix}$. 为了计算方便，引入如下记号：

$$M_1=\frac{1+\dfrac{1}{|\Lambda|\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}(1+|\lambda||\mu|\upsilon^{q+1}\omega^{\beta})}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)},\tag{5}$$

$$M_2=\frac{|\lambda|\upsilon^{q}(1+\upsilon)}{|\Lambda|\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)},\tag{6}$$

$$M_3=\frac{|\mu|\omega^{\beta}(1+\omega)}{|\Lambda|\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+2)\Gamma(q+2)},\tag{7}$$

$$M_4=\frac{1+\dfrac{1}{|\Lambda|\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}(1+|\lambda||\mu|\upsilon^{q}\omega^{\beta+1})}{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)},\tag{8}$$

$$L=\frac{1}{(M_1+M_3)\|p_1\|[\psi_1(\|x\|)+\varphi_1(\|y\|)]+(M_2+M_4)\|p_2\|[\psi_2(\|x\|)+\varphi_2(\|y\|)]}.\tag{9}$$

引理 2[4] 若 $G:X\to P_{cl}(Y)$ 是上半连续的，则 $Gr(G)$ 是 $X\times Y$ 的一个闭子集. 即：对于任意序列 $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ 和 $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$，当 $n\to\infty$ 时有 $x_n\to x_*$，$y_n\to y_*$，$y_n\in G(x_n)$，则 $y_*\in G(x_*)$. 反之，如果 G 是完全连续的且有一个闭图像，则 G 是上半连续的.

引理 3[7] 令 X 是一个可分的巴拿赫空间，$G:[0,T]\times\mathbf{R}^2\to P_{cp,c}(\mathbf{R})$ 是一个 L^1-Carathéodory 多值映射，$\chi:L^1([0,T],\mathbf{R})\to C([0,T],\mathbf{R})$ 是一个线性连续映射，则算子

$$\chi \circ S_{G,x}: C([0,T],\mathbf{R}) \to P_{cp,c}(C([0,T],\mathbf{R})), x \to (\chi \circ S_{G,x}) = \chi(S_{G,x})$$

在 $C([0,T],\mathbf{R}) \times C([0,T],\mathbf{R})$ 上是一个闭图算子.

引理 4[8]　令 E_1 是一个巴拿赫空间 E 的一个闭凸子集，并且 U 是一个带有零元素的 E_1 的开子集. 假设 $F: \overline{U} \to P_{cp,c}(E)$ 是一个上半连续紧映射，则有以下(i)或(ii)成立：(i)F 在 $\overline{U}$ 中有一个不动点；(ii)存在一个 $u \in \partial U$，且当 $\lambda \in (0,1)$ 时有 $u \in \lambda F(u)$.

定理 1　系统(1)在 $[0,1]$ 上至少有一个解，若以下假设成立：

(H1) 多值映射 $F,G: [0,1] \times \mathbf{R}^2 \to P(\mathbf{R})$ 是 L^1-Carathéodory 多值映射，且具有非空紧值和凸值.

(H2) 存在连续非减函数 $\psi_1,\psi_2,\varphi_1,\varphi_2: [0,\infty) \to (0,\infty)$，且函数 $p_1,p_2 \in C([0,1],\mathbf{R})$ 满足：$\|F(t,x,y)\|_P := \sup\{|f|: f \in F(t,x,y)\} \leqslant p_1(t)[\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)]$，$\|G(t,x,y)\|_P := \sup\{|g|: g \in G(t,x,y)\} \leqslant p_2(t)[\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)]$，并且对于任意的 $(t,x,y) \in [0,1] \times \mathbf{R}^2$.

(H3) 存在一个正数 A 满足 $AL > 1$，其中 $M_i (i = 1,2,3,4)$ 和 L 分别由式(5)—(9)给出.

证明　取 $f \in S_{F,(x,y)}$，$g \in S_{G,(x,y)}$，则对于 $(x,y) \in X \times X$ 有：

$$h_1(x,y)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \frac{t^{\beta+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)} \times$$
$$\left\{\lambda \int_0^v \frac{(v-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s - \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \right.$$
$$\left.\lambda v^{q+1}\left[\mu \int_0^\omega \frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s - \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\},$$

$$h_2(x,y)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \frac{t^{q+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)} \times$$
$$\left\{\mu \int_0^\omega \frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s - \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \right.$$
$$\left.\mu \omega^{\beta+1}\left[\lambda \int_0^v \frac{(v-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s - \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\},$$

因上式中 $h_1 \in \Theta_1$，$h_2 \in \Theta_2$，所以 $(h_1,h_2) \in \Theta(x,y)$. 下面证明算子 Θ 满足 Leray-Schauder 型非线性选择定理的假设条件.

1) 证 $\Theta(x,y)$ 是凸值的. 令 $(h_i,\bar{h}_i) \in (\Theta_1,\Theta_2)(i = 1,2)$，则存在 $f_i \in S_{F,(x,y)}$ 和 $g_i \in S_{G,(x,y)}(i = 1,2)$，且对于每一个 $t \in (0,1)$ 有：

$$h_i(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_i(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \frac{t^{\beta+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)} \times$$
$$\left\{\lambda \int_0^v \frac{(v-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} g_i(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s - \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_i(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \right.$$
$$\left.\lambda v^{q+1}\left[\mu \int_0^\omega \frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_i(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s - \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} g_i(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\},$$

$$\bar{h}_i(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} g_i(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \frac{t^{q+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)} \times$$
$$\left\{\mu \int_0^\omega \frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_i(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s - \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} g_i(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \right.$$
$$\left.\mu \omega^{\beta+1}\left[\lambda \int_0^v \frac{(v-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} g_i(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s - \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_i(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\}.$$

令 $0 \leqslant \omega \leqslant 1$，则对于每一个 $t \in (0,1)$ 有：

$$[\omega h_1 + (1-\omega)h_2](t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} [\omega f_1(u) + (1-\omega) f_2(u)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s +$$
$$\frac{t^{\beta+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)} \times \left\{\lambda \int_0^v \frac{(v-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} [\omega g_1(u) + (1-\omega) g_2(u)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s - \right.$$

$$\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[\omega f_1(u)+(1-\omega)f_2(u)]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s+$$

$$\lambda \upsilon^{q+1}\left[\mu\int_0^{\omega} \frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[\omega f_1(u)+(1-\omega)f_2(u)]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\right.$$

$$\left.\left.\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}[\omega g_1(u)+(1-\omega)g_2(u)]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\},$$

$$[\omega\bar{h}_1+(1-\omega)\bar{h}_2](t)=\int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}[\omega g_1(u)+(1-\omega)g_2(u)]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s+$$

$$\frac{t^{q+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times\left\{\mu\int_0^{\omega} \frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[\omega f_1(u)+(1-\omega)f_2(u)]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\right.$$

$$\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}[\omega g_1(u)+(1-\omega)g_2(u)]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s+$$

$$\mu\omega^{\beta+1}\left[\lambda\int_0^{\upsilon} \frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}[\omega g_1(u)+(1-\omega)g_2(u)]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\right.$$

$$\left.\left.\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[\omega f_1(u)+(1-\omega)f_2(u)]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\}.$$

因 F 和 G 是凸值的,所以 $S_{F,(x,y)}$ 和 $S_{G,(x,y)}$ 也是凸值的.由 $\omega h_1+(1-\omega)h_2\in\Theta_1$ 和 $\omega\bar{h}_1+(1-\omega)\bar{h}_2\in\Theta_2$ 可知,$\omega(h_1,\bar{h}_1)+(1-\omega)(h_2,\bar{h}_2)\in\Theta$.

2) 证 Θ 将有界集映射到 $X\times X$ 中的有界集.取 $r>0$,并在 $X\times X$ 上做一个有界集 B_r($B_r=\{(x,y)\in X\times X:\|(x,y)\|\leqslant r\}$).由于 $(1-s)^{\alpha}\leqslant 1$,$1<\alpha\leqslant 2$,因此有:

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}u\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)},$$

$$|h_1(x,y)(t)|\leqslant\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(u)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\frac{|t|^{\beta+1}}{|\Lambda|\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times$$

$$\left\{|\lambda|\int_0^{\upsilon} \frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}|g(u)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(u)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.$$

$$|\lambda||\upsilon|^{q+1}\left[|\mu|\int_0^{\omega} \frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(u)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\times\right.$$

$$\left.\left.\int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}|g(u)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\}\leqslant\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|p_1\|[\psi_1(\|x\|)+\varphi_1(\|y\|)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{|\Lambda|\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times\left\{|\lambda|\int_0^{\upsilon} \frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}\|p_2\|[\psi_2(\|x\|)+\varphi_2(\|y\|)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.$$

$$\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|p_1\|[\psi_1(\|x\|)+\varphi_1(\|y\|)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s+$$

$$|\lambda||\upsilon|^{q+1}\left[|\mu|\int_0^{\omega} \frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|p_1\|[\psi_1(\|x\|)+\varphi_1(\|y\|)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\left.\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}\|p_2\|[\psi_2(\|x\|)+\varphi_2(\|y\|)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\}\leqslant$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\|p_1\|[\psi_1(\|x\|)+\varphi_1(\|y\|)]+\frac{1}{|\Lambda|\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times$$

$$\left\{|\lambda|\frac{\upsilon^{q}}{\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)}\|p_2\|[\psi_2(\|x\|)+\varphi_2(\|y\|)]+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\times\right.$$

$$\|p_1\|[\psi_1(\|x\|)+\varphi_1(\|y\|)]+|\lambda|\upsilon^{q+1}\left[|\mu|\frac{\omega^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\|p_1\|[\psi_1(\|x\|)+\varphi_1(\|y\|)]+\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}\|p_2\|[\psi_2(\|x\|)+\varphi_2(\|y\|)]\right]\right\}\leqslant$$

$$M_1\|p_1\|[\psi_1(\|x\|)+\varphi_1(\|y\|)]+M_2\|p_2\|[\psi_2(\|x\|)+\varphi_2(\|y\|)],\tag{10}$$

$$|h_2(x,y)(t)| \leqslant \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} \|p_2\| [\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)] \mathrm{d}u\mathrm{d}s +$$
$$\frac{|t|^{q+1}}{|\Lambda| \Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)} \times \Big\{ |\mu| \int_0^\omega \frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|p_1\| [\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)] \mathrm{d}u\mathrm{d}s +$$
$$\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} \|p_2\| [\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)] \mathrm{d}u\mathrm{d}s +$$
$$|\mu| \omega^{\beta+1} \Big[|\lambda| \int_0^\upsilon \frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} \|p_2\| [\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)] \mathrm{d}u\mathrm{d}s +$$
$$\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|p_1\| [\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)] \mathrm{d}u\mathrm{d}s \Big] \Big\} \leqslant$$
$$\frac{1}{\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)} \|p_2\| [\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)] + \frac{1}{|\Lambda| \Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)} \times$$
$$\Big\{ |\mu| \frac{\omega^\beta}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+1)} \|p_1\| [\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)] + \frac{1}{\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)} \times$$
$$\|p_2\| [\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)] + |\mu| \omega^{\beta+1} \Big[|\lambda| \frac{\upsilon^q}{\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)} \|p_2\| [\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)] +$$
$$\frac{1}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+1)} \|p_1\| [\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)] \Big] \Big\} \leqslant$$
$$M_3 \|p_1\| [\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)] + M_4 \|p_2\| [\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)]. \tag{11}$$

由于式(10) 和式(11) 分别是 $|h_1|$ 和 $|h_2|$ 的一个上界，因而可知 $|h_i|$ $(i=1,2)$ 的上确界满足：

$$\|h_1(x,y)\| \leqslant M_1 \|p_1\| [\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)] + M_2 \|p_2\| [\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)], \tag{12}$$
$$\|h_2(x,y)\| \leqslant M_3 \|p_1\| [\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)] + M_4 \|p_2\| [\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)]. \tag{13}$$

将式(12) 和式(13) 相加得

$$\|(h_1,h_2)\| = \|h_1(x,y)\| + \|h_2(x,y)\| \leqslant (M_1+M_3) \|p_1\| [\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)] +$$
$$(M_2+M_4) \|p_2\| [\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)] = l\ (\text{为常数}). \tag{14}$$

3) 证 Θ 是等度连续的. 取 $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$，则存在 $f \in S_{F,(x,y)}$ 和 $g \in S_{G,(x,y)}$，且使得

$$|h_1(x,y)(t_2) - h_1(x,y)(t_1)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} \|p_1\| [\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)] \times$$
$$\left| \int_0^{t_1} [(t_2-s)^{\beta-1} - (t_1-s)^{\beta-1}] \mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\beta-1} \mathrm{d}s \right| +$$
$$\frac{|t_2^{\beta+1} - t_1^{\beta+1}|}{|\Lambda| \Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)} \Big\{ \|p_2\| [\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)] |\lambda| \int_0^\upsilon \frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} \mathrm{d}u\mathrm{d}s +$$
$$\|p_1\| [\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)] \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{d}u\mathrm{d}s +$$
$$|\lambda| \upsilon^{q+1} \Big[\|p_1\| [\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)] |\mu| \int_0^\omega \frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{d}u\mathrm{d}s +$$
$$\|p_2\| [\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)] \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_s^1 \frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} \mathrm{d}u\mathrm{d}s \Big] \Big\} \leqslant$$
$$\|p_1\| [\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)] \frac{|t_2^\beta - t_1^\beta|}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} +$$
$$\frac{|t_2^{\beta+1} - t_1^{\beta+1}|}{|\Lambda| \Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)} \Big\{ \|p_2\| [\psi_2(\|x\|) + \varphi_2(\|y\|)] \frac{|\lambda| \upsilon^q (1+\upsilon)}{\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)} +$$
$$\|p_1\| [\psi_1(\|x\|) + \varphi_1(\|y\|)] \frac{1 + |\lambda| |\mu| \upsilon^{q+1} \omega^\beta}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+1)} \Big\}.$$

类似于上述的证明可得：

$$|h_2(x,y)(t_2)-h_2(x,y)(t_1)|\leqslant\|p_2\|[\psi_2(\|x\|)+\varphi_2(\|y\|)]\frac{|t_2^q-t_1^q|}{\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)}+$$

$$\frac{|t_2^{q+1}-t_1^{q+1}|}{|\Lambda|\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\left\{\|p_1\|[\psi_1(\|x\|)+\varphi_1(\|y\|)]\frac{|\mu|\omega^\beta(1+\omega)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}+\right.$$

$$\left.\|p_2\|[\psi_2(\|x\|)+\varphi_2(\|y\|)]\frac{1+|\lambda||\mu|\upsilon^q\omega^{\beta+1}}{\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)}\right\}.$$

由上式可知,算子 $\Theta(x,y)$ 是等度连续的. 再根据 Arzelá-Ascoli 定理可知,算子 $\Theta(x,y)$ 是完全连续的.

4)证明算子 Θ 有一个闭图像. 令 $(x_n,y_n)\to(x_*,y_*)$, $(h_n,\bar{h}_n)\in\Theta(x_n,y_n)$, $(h_n,\bar{h}_n)\to(h_*,\bar{h}_*)$,则在此只需证明 $(h_*,\bar{h}_*)\in\Theta(x_*,y_*)$ 即可. 对于任意 $(h_n,\bar{h}_n)\in\Theta(x_n,y_n)$,存在 $f_n\in S_{F,(x_n,y_n)}$ 和 $g_n\in S_{G,(x_n,y_n)}$,且有:

$$h_n(x_n,y_n)(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_n(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\frac{t^{\beta+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times$$

$$\left\{\lambda\int_0^\upsilon\frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g_n(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_n(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\lambda\upsilon^{q+1}\left[\mu\int_0^\omega\frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_n(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g_n(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\},$$

$$\bar{h}_n(x_n,y_n)(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g_n(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\frac{t^{q+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times$$

$$\left\{\mu\int_0^\omega\frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_n(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g_n(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\mu\omega^{\beta+1}\left[\lambda\int_0^\upsilon\frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g_n(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_n(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\}.$$

考虑连续线性算子 $\Phi_1,\Phi_2:L^1([0,1],X\times X)\to C([0,1],X\times X)$,并做如下定义:

$$\Phi_1(x,y)(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\frac{t^{\beta+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times$$

$$\left\{\lambda\int_0^\upsilon\frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\lambda\upsilon^{q+1}\left[\mu\int_0^\omega\frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\},$$

$$\Phi_2(x,y)(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\frac{t^{q+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times$$

$$\left\{\mu\int_0^\omega\frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\mu\omega^{\beta+1}\left[\lambda\int_0^\upsilon\frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\}.$$

由引理 3 可知 $(\Phi_1,\Phi_2)\circ(S_F,S_G)$ 是一个闭图像算子,进而知对于所有的 n 都满足 $(h_n,\bar{h}_n)\in(\Phi_1,\Phi_2)\circ(S_{F,(x,y)},S_{G,(x,y)})$. 由于 $(x_n,y_n)\to(x_*,y_*)$, $(h_n,\bar{h}_n)\to(h_*,\bar{h}_*)$,因此有 $f_*\in S_{F,(x,y)}$ 和 $g_*\in S_{G,(x,y)}$,且使得:

$$h_*(x,y)(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_*(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\frac{t^{\beta+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times$$

$$\left\{\lambda\int_0^\upsilon\frac{(\upsilon-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g_*(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_*(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\lambda\upsilon^{q+1}\left[\mu\int_0^\omega\frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_*(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g_*(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\},$$

$$\bar{h}_*(x,y)(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g_*(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\frac{t^{q+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times$$

$$\left\{\mu\int_0^{\omega}\frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_*(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g_*(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\mu\omega^{\beta+1}\left[\lambda\int_0^{v}\frac{(v-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g_*(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_*(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\}.$$

由上述证明可知$(h_*,\bar{h}_*)\in\Theta(x_*,y_*)$.

5) 证明存在一个开集 $U\subseteq C([0,1],\mathbf{R})$，且对于所有的 $k\in(0,1)$ 和$(x,y)\in\partial U$ 都有$(x,y)\notin k\Theta(x,y)$. 令$(x,y)\in k\Theta(x,y)$，其中 $k\in(0,1)$，则存在 $f\in S_{F,(x,y)}$ 和 $g\in S_{G,(x,y)}$，且使得：

$$x(t)=k\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\frac{kt^{\beta+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times$$
$$\left\{\lambda\int_0^{v}\frac{(v-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\lambda v^{q+1}\left[\mu\int_0^{\omega}\frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\},$$
$$y(t)=k\int_0^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\frac{kt^{q+1}}{\Lambda\Gamma(\beta+2)\Gamma(q+2)}\times$$
$$\left\{\mu\int_0^{\omega}\frac{(\omega-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\mu\omega^{\beta+1}\left[\lambda\int_0^{v}\frac{(v-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_s^1\frac{(u-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_s^1\frac{(u-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\right\}.$$

类似于式(10)—(14) 的放缩，可得如下$\|x\|$和$\|y\|$：

$$\|x\|\leqslant M_1\|p_1\|[\psi_1(\|x\|)+\varphi_1(\|y\|)]+M_2\|p_2\|[\psi_2(\|x\|)+\varphi_2(\|y\|)],\tag{15}$$
$$\|y\|\leqslant M_3\|p_1\|[\psi_1(\|x\|)+\varphi_1(\|y\|)]+M_4\|p_2\|[\psi_2(\|x\|)+\varphi_2(\|y\|)].\tag{16}$$

将式(15) 和式(16) 相加得

$$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|\leqslant$$
$$(M_1+M_3)\|p_1\|[\psi_1(\|x\|)+\varphi_1(\|y\|)]+(M_2+M_4)\|p_2\|[\psi_2(\|x\|)+\varphi_2(\|y\|)].\tag{17}$$

将不等式(17) 两侧同时乘以 L 即可得到$\|(x,y)\|L\leqslant 1$.

由条件(H3) 知，存在$A>0$使得$\|(x,y)\|\neq A$. 令$U=\{(x,y)\in X\times X:\|(x,y)\|<A\}$. 注意到算子 $\Theta:\bar{U}\to P_{cp,cv}(X)\times P_{cp,cv}(X)$ 是上半连续的和完全连续的. 从选择的U可知，对于任意$k\in(0,1)$，不存在$(x,y)\in\partial U$ 使得$(x,y)\in k\Theta(x,y)$. 再由 Leray-Schauder 型非线性选择定理可知，Θ 在 $\bar{U}$ 中存在一个不动点(x,y)，且该不动点为问题(1) 的一个解.

参考文献：

[1] ALSULAMI H H, NTOUYAS S K, AGARWAL R P, et al. A study of fractional-order coupled systems with a new concept of coupled non-separated boundary conditions[J]. Boundary Value Problems, 2017, 2017(68): 1-11.

[2] AHMAD B, NTOUYAS S K, ALSAEDI A. Coupled systems of fractional differential inclusions with coupled boundary conditions[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2019, 2019(69): 1-21.

[3] AHMAD B, NTOUYAS S K, ALSAEDI A. Fractional order differential systems involving right Caputo and left Riemann-Liouville fractional derivatives with nonlocal coupled conditions[J]. Boundary Value Problems, 2019, 2019(109): 1-12.

[4] DEIMLING K. Multivalued Differential Equations[M]. Berlin, New York: Walter De Gruyter, 1992: 3-9.

[5] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, Trujillo J J. Theory and applications of fractional differential equations[M]. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies, 2006: 69-96.

[6] 程其襄，张奠宇，胡善文，等. 实变函数与泛函分析[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2019：141.

[7] LOSTA A, OPIAL Z. An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations[J]. Bull Acad Polon Sci, Sér Sci Math Astron Phys, 1965(13): 781-786.

[8] GRANAS A, DUGUGUNDJI J. Fixed Point Theory[M]. New York: Springer, 2003: 3-6.