

文章编号: 1004-4353(2023)02-0164-06

## 输入压力和带载转矩对齿轮马达产生脉动的耦合影响分析

钟国坚<sup>1</sup>, 杨元慧<sup>2</sup>

( 1. 闽西职业技术学院 信息与制造学院, 福建 龙岩 364021;

2. 龙岩学院 物理与机电工程学院, 福建 龙岩 364000 )

**摘要:** 针对齿轮马达输出引起的脉动问题, 基于输入压力与带载转矩的耦合机理以及刚体定轴转动定律和脉动转速下的角加速, 建立了一个齿轮副与负载物的带载转矩模型和一个输入压力的动态计算模型. 研究表明: 在固定输入压力下, 齿数越少, 计算所得的马达转速的脉动误差越大; 输出转速由输入流量决定; 输出转速的周期性变化会使负载物产生较大的惯性转矩; 增大背压和适当减小输出轴直径, 有利于减小齿轮马达的惯性转矩和输入压力产生的脉动; 齿轮副为小侧隙时比为大侧隙时能更有效地减小齿轮马达的转速、转矩和输入压力所产生的脉动; 使用同尺寸齿轮副的泵和马达, 可以降低负载物的高惯性转矩. 该研究结果可为提高齿轮马达的工作质量和设计提供参考.

**关键词:** 齿轮马达; 齿轮副; 脉动系数; 输入压力; 带载转矩; 输出转速

**中图分类号:** TH325

**文献标识码:** A

## Coupling impact analysis of input pressure and load torque on pulsation of gear motor

ZHONG Guojian<sup>1</sup>, YANG Yuanhui<sup>2</sup>

( 1. School of Information and Manufacturing, Minxi Vocational and Technical College, Longyan 364021, China;

2. School of Physics and Mechatronics Engineering, Longyan University, Longyan 364000, China )

**Abstract:** Aiming at the pulsation problem caused by the output of gear motor, based on the coupling mechanism of input pressure and load torque, the law of fixed axis rotation of rigid body and angular acceleration under the pulsation speed, a gear pair and load torque model and a dynamic calculation model of input pressure were established. The results show that under the fixed input pressure, the less the number of teeth, the greater the calculated motor speed pulsation error. The output speed is determined by the input flow rate. The periodic change of the output speed will make the load produce a larger inertia torque. Increasing the back pressure and decreasing the diameter of the output shaft are beneficial to reducing the inertia torque of the gear motor and the pulsation caused by the input pressure. The pulsation caused by motor speed, torque and input pressure can be reduced more effectively when the gear pair has small backlash than large backlash. The use of the same size gear pair pump and motor, can reduce the load of high inertia torque. The research results can provide reference for improving the working quality and design of gear motor.

**Keywords:** gear motor; gear pair; pulse coefficient; input pressure; load torque; output speed

收稿日期: 2023-02-15

基金项目: 国家自然科学基金青年项目(11902135);福建省中青年教师教育科研项目(JAT210910)

作者简介: 钟国坚(1982—),男,硕士,副教授,研究方向为机械设计制造及自动化.

## 0 引言

齿轮马达是一种将液压能转化为机械能的液压元件(通过输入一定压力的流体介质来驱动壳体内的两个(或两个以上)相互啮合的齿轮转动),常被用于高速低转矩的机械液压系统中<sup>[1]</sup>.但齿轮马达在运行过程中,经常会受到载荷、振动频率、齿轮摩擦以及轴承转动等的影响而产生输出脉动和噪声,进而会影响其工作的稳定性.为此,一些学者对该问题进行了研究.例如:甄帅等<sup>[1]</sup>研究了齿轮马达的制动机理及其性能;王霞琴等<sup>[2]</sup>研究了变工作条件下的齿轮泵特性;鄢圣杰等<sup>[3]</sup>研究了困油对齿轮马达输出特性的影响;张永祥等<sup>[4]</sup>研究了齿轮泵的瞬时流量以及抑制流量脉动的方法;彭锐等<sup>[5]</sup>研究了齿轮马达的困油输出转矩转速及其脉动的最小化策略;王建等<sup>[6]</sup>为了降低齿轮泵的流量脉动,提出了一种基于流量脉动系数的齿轮泵齿廓的主动设计方法;李玲辉等<sup>[7]</sup>利用仿真方法研究了外啮合齿轮泵的流量特性.在上述文献中,相关研究大多都是针对某一特定的输入压力和流量进行研究的,所得的相关结论(如齿轮马达与齿轮泵的转速、转矩及脉动系数相同等)<sup>[8-10]</sup>难以应用于实际.鉴于此,本文在额定输入流量下,基于齿轮副与负载的动态牵引原理,通过实例分析了输入压力与负载转矩(尤其是负载的惯性转矩)的耦合机理,以为进一步抑制齿轮马达的输出脉动提供参考.

## 1 齿轮马达的参数计算

### 1.1 马达的输出脉动系数

设齿轮马达的额定输入流量为  $Q$ , 输入压力为  $p_i$ , 回油背压为  $p_o$ , 输出转速为  $\omega$ , 输出转矩为  $M$ . 设两个相同尺寸齿轮的齿宽为  $B$ , 齿数为  $z$ , 顶圆半径为  $R_e$ , 节圆半径为  $R$ , 基圆半径为  $R_b$ , 基圆节距为  $P_b$ . 图1为齿轮副为大侧隙时的任意啮合位置及其余隙容积位置图,图2为齿轮副为小侧隙时的啮合位置及其余隙容积位置图.图中,  $O_1$  和  $O_2$  分别为转矩输出齿轮和空转齿轮的中心,对称型双卸荷槽位于齿轮副的余隙位置处.其中:  $f$  为啮合点  $k$  到节点  $j$  的距离;  $f_0$  表示余隙位置处的  $f$ , 当齿轮副为大侧隙时  $f_0 = P_b/2$ , 当齿轮副为小侧隙时  $f_0 = P_b/4$ .

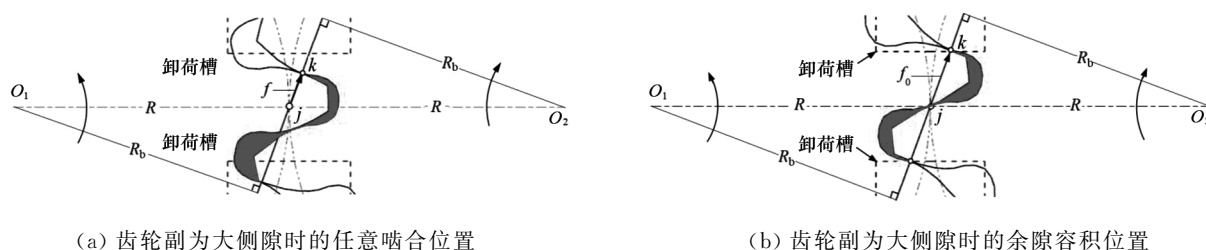


图1 齿轮副为大侧隙时的任意啮合位置及其余隙容积位置

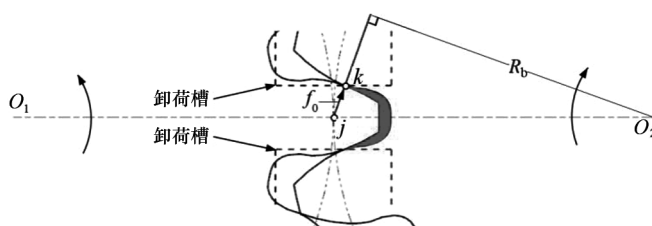


图2 齿轮副为小侧隙时的啮合位置及其余隙容积位置

由文献[11]可知,外啮合齿轮泵的流量可表示为:

$$Q = \omega B (R_e^2 - R^2 - f^2), \quad (1)$$

齿轮马达输出的转速  $\omega$ 、输出转矩  $M$  可表示为:

$$\begin{cases} \omega = \frac{Q}{B(R_e^2 - R^2 - f^2)} = \frac{Q}{BR^2} \times \frac{1}{\xi_e^2 - 1 - \xi_f^2}; \\ M = (p_i - p_o)B(R_e^2 - R^2 - f^2) = (p_i - p_o)BR^2(\xi_e^2 - 1 - \xi_f^2), \\ -f_0 \leq f \leq f_0, -\xi_{f0} \leq \xi_f \leq \xi_{f0}. \end{cases} \quad (2)$$

在研究马达输出转速的脉动系数  $\delta_\omega$ 、马达输出转矩的脉动系数  $\delta_M$ 、齿轮泵输出流量的脉动系数  $\delta_P$  时,王郝、高俊峰等<sup>[8-10]</sup> 均将其设置为相同,即  $\delta_\omega = \delta_M = \delta_P$ ,且分别将参数  $R_e$ 、 $f$ 、 $f_0$  无量纲化为:

$$\xi_e = \frac{R_e}{R}; \xi_f = \frac{f}{R}; \xi_{f0} = \frac{f_0}{R} = \begin{cases} 0.50P_b/R, & \text{大侧隙时;} \\ 0.25P_b/R, & \text{小侧隙时.} \end{cases} \quad (3)$$

由于式(1)中的  $Q$  与式(2)中的  $M$  在计算形式上完全一致,因此可知将  $\delta_M$  和  $\delta_P$  设置为相等是正确的;但由于式(1)中的  $Q$  与式(2)中的  $\omega$  在计算形式上是完全不同的,因此将  $\delta_\omega$  和  $\delta_P$  设置为相等是错误的,而应将其设置为:

$$\delta_\omega \neq \delta_M = \delta_P = \frac{\xi_{f0}^2}{\xi_e^2 - 1 - \xi_{f0}^2/3}. \quad (4)$$

由式(2)中的  $\omega$  式可得  $\omega$  的均值  $\omega_{\text{mean}}$ 、 $\omega$  的最大值  $\omega_{\text{max}}$  和  $\omega$  的最小值  $\omega_{\text{min}}$  分别为:

$$\begin{cases} \omega_{\text{mean}} = \frac{1}{2f_0} \int_{-f_0}^{+f_0} \omega df = \frac{Q}{2BR^2 \xi_{f0} \sqrt{\xi_e^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{\xi_e^2 - 1} + \xi_{f0}}{\sqrt{\xi_e^2 - 1} - \xi_{f0}}, \\ \omega_{\text{max}} = \frac{Q}{BR^2} \times \frac{1}{\xi_e^2 - 1 - \xi_{f0}^2}, \\ \omega_{\text{min}} = \frac{Q}{BR^2} \times \frac{1}{\xi_e^2 - 1}. \end{cases} \quad (5)$$

由式(5)可知,齿轮马达输出转速  $\omega$  的修正脉动系数  $\delta_\omega$  应为:

$$\delta_\omega = \frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{\omega_{\text{mean}}} = \frac{2\xi_{f0}^3}{\sqrt{\xi_e^2 - 1}(\xi_e^2 - 1 - \xi_{f0}^2) \ln \frac{\sqrt{\xi_e^2 - 1} + \xi_{f0}}{\sqrt{\xi_e^2 - 1} - \xi_{f0}}}. \quad (6)$$

利用式(4)和式(6)计算可知,  $\delta_\omega$  始终大于  $\delta_M$ . 如当齿数为 10、齿顶高系数为 1、压力角为  $20^\circ$ 、变位系数为 0.081 时,由公式(4)和公式(6)计算可得:齿轮副为大侧隙时,  $\delta_\omega = 0.44$ ,  $\delta_M = 0.38$ ,  $\delta_\omega > \delta_M$ . 由此进一步计算可得,  $\delta_\omega$  与  $\delta_M$  之间的误差约为 16%. 齿轮副为小侧隙时,  $\delta_\omega = 0.088$ ,  $\delta_M = 0.086$ ,  $\delta_\omega > \delta_M$ . 由此进一步计算可得,  $\delta_\omega$  与  $\delta_M$  之间的误差约为 2.3%. 由上述  $\delta_\omega$  与  $\delta_M$  之间的误差可知,不仅  $\delta_\omega$  始终大于  $\delta_M$ ,而且齿轮副为小侧隙时比为大侧隙时更能有效地减小转速、转矩和输入压力所产生的脉动,因此在齿轮马达的实际应用中应优先选用齿轮副的小侧隙.

## 1.2 马达脉动转速下角加速度的计算方法

由渐开线齿轮的成形原理<sup>[12]</sup> 可得齿轮的角速度为:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d(R_b \phi)}{dt} = R_b \frac{d\phi}{dt} = R_b \omega. \quad (7)$$

式中,  $\phi$  是  $f$  或  $\xi_f$  所对应的齿轮角度. 将式(2)中的  $\omega$  式对  $f$  进行一阶求导可得:

$$\frac{d\omega}{df} = \frac{2Q}{BR^3} \times \frac{\xi_f}{(\xi_e^2 - 1 - \xi_f^2)^2}. \quad (8)$$

于是由式(7)和式(8)可得马达齿轮副的角加速度为:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{df} \times \frac{df}{dt} = \frac{2R_b Q^2}{B^2 R^5} \times \frac{\xi_f}{(\xi_e^2 - 1 - \xi_f^2)^3}. \quad (9)$$

### 1.3 马达脉动转速下脉动转矩的计算方法

马达齿轮副与负载物一体化的动态牵引如图3所示. 图中:  $J$  为齿轮副与轴的转动惯量( $J = me^2$ , 其中  $m$  为质量,  $e$  为偏心距),  $g$  为重力加速度,  $r_0$  为输出轴半径,  $F_0$  为负载力,  $M_0$  为负载转矩( $M_0 = F_0 r_0$ ). 根据刚体的定轴转动定律( $M = J \frac{d\omega}{dt}$ )<sup>[13]</sup> 和式(9) 可得马达齿轮副与负载物一体化的合外力矩(忽略由摩擦等所引起的转矩损失)为:

$$M - M_0 = J \frac{d\omega}{dt} = me^2 \frac{d\omega}{dt}. \quad (10)$$

当  $F_0 \leq 0$  时, 因牵引带会发生松动, 且负载物的质量  $m_0 g$ 、惯性力  $m_0 r_0 \frac{d\omega}{dt}$  不对  $M$  产生影响, 因此此时的负载力应为:

$$F_0 = m_0 g + m_0 r_0 \frac{d\omega}{dt} (\xi_f^*). \quad (11)$$

于是由式(9)一(11) 可得:

$$M_{\min} \approx 0. \quad (12)$$

将数值解  $\xi_f^*$  代入式(11) 和式(12) 中后, 再利用 Excel 中的单变量求解功能<sup>[14]</sup> 对其进行模拟求解可得:

$$F_0(\xi_f) = \begin{cases} 0, & -\xi_{f0} \leq \xi_f \leq \xi_f^*; \\ m_0 g + m_0 r_0 \frac{d\omega}{dt}, & \xi_f^* \leq \xi_f \leq +\xi_{f0}. \end{cases} \quad (13)$$

$$M_0(\xi_f) = \begin{cases} 0, & -\xi_{f0} \leq \xi_f \leq \xi_f^*; \\ m_0 g r_0 + m_0 r_0^2 \frac{d\omega}{dt}, & \xi_f^* \leq \xi_f \leq +\xi_{f0}. \end{cases} \quad (14)$$

由式(14) 可知, 输出轴径  $r_0$  是以其平方的值( $m_0 r_0^2 \frac{d\omega}{dt}$ ) 来影响惯性转矩的. 由此可知, 适当减小输出轴径能有效减少惯性力矩.

### 1.4 马达带载输入压力及其脉动系数的计算方法

由式(10)、式(14) 及  $m \ll m_0$ 、 $e \ll r_0$  可得液压的转矩为:

$$M = M_0 + me^2 \frac{d\omega}{dt} \approx M_0. \quad (15)$$

再由  $M_0 = F_0 r_0$  和式(2) 中的液压转矩  $M$  式可得:

$$M = (p_i - p_o) BR^2 (\xi_e^2 - 1 - \xi_f^2) \approx M_0 = F_0 r_0. \quad (16)$$

由式(16) 可得带载下的输入压力为:

$$p_i \approx p_o + \frac{M_0}{BR^2} \times \frac{1}{\xi_e^2 - 1 - \xi_f^2}. \quad (17)$$

由负载转矩  $M$  的最大值  $M_{\max}$  ( $M_{\text{mean}} \approx \frac{1}{2\xi_{f0}} \int_{-\xi_{f0}}^{+\xi_{f0}} M_0 d\xi_f$ )、最小值  $M_{\min}$  ( $M_{\min} \approx 0$ ) 和均值  $M_{\text{mean}}$  ( $M_{\max} \approx M_0(\xi_{f0})$ ) 可得带载转矩的脉动系数  $\delta_{PM}$  为:

$$\delta_{PM} = \frac{M_{\max} - M_{\min}}{M_{\text{mean}}} \approx \frac{M_0(\xi_{f0})}{\frac{1}{2\xi_{f0}} \int_{-\xi_{f0}}^{+\xi_{f0}} M_0 d\xi_f} > 1. \quad (18)$$

由带载输入压力  $p_i$  的最大值  $p_{i,\max}$  ( $p_{i,\text{mean}} \approx p_o + \frac{1}{2\xi_{f0} BR^2} \int_{\xi_f^*}^{+\xi_{f0}} \frac{M_0}{\xi_e^2 - 1 - \xi_f^2} d\xi_f$ )、最小值  $p_{i,\min}$  ( $p_{i,\min} \approx$

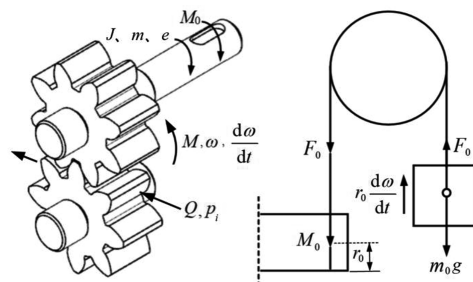


图3 齿轮副与负载物一体化的动态牵引示意图

$p_o$ ) 和均值  $p_{i, \text{mean}}$  ( $p_{i, \text{max}} \approx p_o + \frac{M_o(\xi_{f0})}{BR^2(\xi_e^2 - 1 - \xi_{f0}^2)}$ ) 可得带载输入压力的脉动系数  $\delta_{pi}$  为:

$$\delta_{pi} = \frac{p_{i, \text{max}} - p_{i, \text{min}}}{p_{i, \text{mean}}} = \frac{M_o(\xi_{f0}) / (\xi_e^2 - 1 - \xi_{f0}^2)}{p_o + \frac{1}{2\xi_{f0}} \int_{\xi_f^*}^{\xi_{f0}} \frac{M_o}{\xi_e^2 - 1 - \xi_f^2} d\xi_f}. \quad (19)$$

## 2 马达带载转矩及其输入压力的实例分析

实例的参数分别取: 齿数为 14, 齿顶高系数为 1, 压力角为  $20^\circ$ , 变位系数为  $-0.054$ ,  $B = 30 \text{ mm}$ ,  $Q = 40 \text{ L/min}$ ,  $p_o = 0.1 \text{ MPa}$ ,  $m_o = 1000 \text{ kg}$ ,  $r_o = 20 \text{ mm}$ . 图 4 为齿轮马达的带载输出转速、带载输出转矩和带载输入压力随齿轮副啮合位置的变化, 其中图 4(a) 是利用式(2) 计算后绘制得到的, 图 4(b) 是利用式(16) 计算后绘制得到的, 图 4(c) 是利用式(17) 计算后绘制得到的.

由图 4(a) 可以看出, 在不考虑介质压缩和泄漏的理想状态下, 齿轮马达的输出转速仅与输入流量有关, 而与齿轮马达是否带载无关. 由图 4(b) 和图 4(c) 可以看出, 输出转速  $\omega$  的周期性变化(降速  $\rightarrow$  增速  $\rightarrow$  降速)与齿轮副啮合位置的周期性变化有关<sup>[15]</sup>, 同时在负载上产生了较大的惯性转矩. 在降速阶段, 负载物因受到重力加速度的影响, 其负载惯性转矩为负值, 并由此导致马达齿轮副上的液压转矩和输入压力快速降低; 在增速阶段, 负载物惯性转矩、马达齿轮副上的液压转矩和输入压力与降速阶段的现象相反. 由图 4(c) 还可以看出, 马达的大背压  $p_o$  增加到一定值时可使输入压力曲线整体上移, 从而可提高缓和惯性转矩的能力, 有助于降低输入压力的脉动<sup>[16]</sup>. 此外, 对比图 4 中的各图还可知, 齿轮副为小侧隙时比为大侧隙时可更有效地缓解转速脉动、速度脉动和输入压力所产生的脉动; 因此, 在条件允许的情况下应优先考虑使用小侧隙齿轮副, 以减少脉动的产生和提高齿轮马达的稳定性.

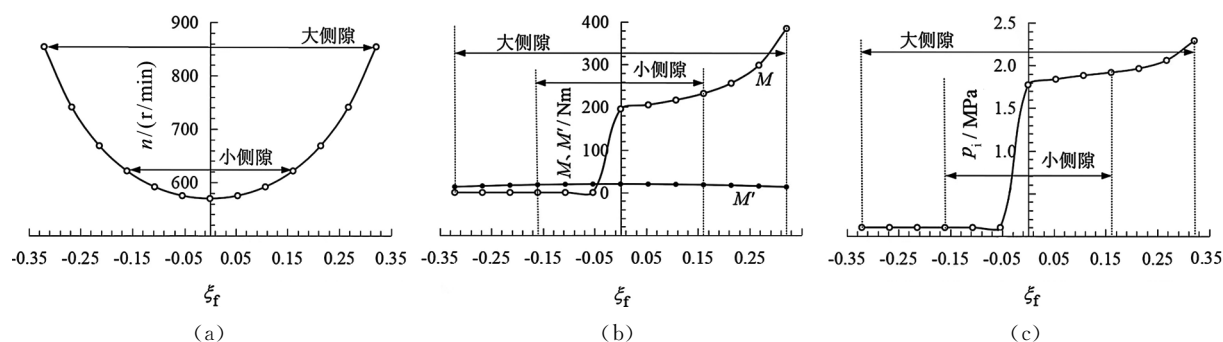


图 4 带载转速(a)、带载转矩(b)和带载输入压力(c)随齿轮副啮合位置的变化

## 3 同尺寸齿轮副马达与泵联动对脉动产生的影响

上述研究(基于额定输入流量)表明, 额定输入流量一般是由稳流泵(齿轮泵溢流阀)的恒定输出流量提供; 但由于齿轮泵本身的输出流量是周期性脉动的<sup>[17]</sup>, 因此负载物的高惯性转矩会使齿轮马达的输出转矩和输入压力产生较大的脉动.

假设泵齿轮副和马达齿轮副尺寸相同, 齿轮马达的输入流量由齿轮泵的脉动输出流量直接提供, 于是由两者的工作原理完全相反可知: 在不考虑泄漏、压缩等原因造成的容积损失情况下, 齿轮马达的输出转速等于齿轮泵的输入转速, 即齿轮马达的输出转速为恒速. 因此, 相同尺寸的马达和泵齿轮副可以避免负载的高惯性转矩, 进而可提高牵引质量. 但在实际中, 由于液压系统通常由单一的动力源驱动, 且泵的排量较大, 以及马达和泵的尺寸很少有相同的原因, 因此通常使用蓄能器来减小系统的脉动.



## 4 结论

本文基于输入压力与带载转矩的耦合机理对齿轮马达进行研究表明:①固定输入压力下,现有计算马达转速脉动的公式存在一定误差,即计算修正后的结果大于原有结果,且齿数越少计算所得的误差越大.②齿轮马达的输出转速主要与输入流量有关,输出转速 $\omega$ 的周期性变化(降速→增速→降速)与齿轮副啮合位置的周期性变化有关.③输出转速的周期性变化会导致负载物产生较大的惯性转矩.④在降速阶段,由于负载物受重力加速度的影响,其惯性转矩为负,并由此会导致马达齿轮副上的液压转矩和输入压力快速降低;在增速阶段,其现象与降速阶段相反.负载物的惯性转矩会导致输出转矩和输入压力产生较大的脉动,因此适当增大背压可有效减小惯性转矩和输入压力所产生的脉动.⑤输出轴径是以其平方的值来影响惯性转矩的,因此适当减小输出轴直径可有效减小惯性转矩和输入压力所产生的脉动.⑥齿轮副为小侧隙时比为大侧隙时更能有效减小转速、转矩和输入压力所产生的脉动,因此在实际应用中应优先选用小侧隙,以减少脉动的产生和提高齿轮马达的稳定性.⑦当泵齿轮副和马达齿轮副的尺寸相同,且齿轮马达的输入流量直接由齿轮泵的脉动输出流量提供时,可有效降低负载物的惯性转矩,进而可提高牵引的稳定性.本文的研究成果可为提高齿轮马达的工作质量和设计提供参考.

## 参考文献:

- [1] 甄帅,左铁峰. 齿轮马达的制动机理研究及性能最大化措施[J]. 液压与气动,2022,46(1):150-154.
- [2] 王霞琴,邓龙,柴红强,等. 变工作条件下齿轮泵特性分析[J]. 液压与气动,2022,46(8):178-188.
- [3] 鄢圣杰,王如意. 困油对齿轮马达输出特性的影响与分析[J]. 机械传动,2022,46(2):114-118.
- [4] 张永祥,金健. 齿轮泵的瞬时流量及流量脉动的抑制[J]. 液压与气动,2015(3):46-49.
- [5] 彭锐,王建锋,孙自文. 齿轮马达的困油输出转矩转速及其脉动最小化策略[J]. 机械传动,2021,45(11):51-56.
- [6] 王建,崔祥波,常雪峰. 基于流量脉动系数的齿轮泵齿廓的主动设计及特性分析[J]. 液压与气动,2019(9):29-35.
- [7] 李玲辉,陈奎生,湛从昌. 考虑空化的外啮合齿轮泵流量特性仿真分析[J]. 武汉科技大学学报,2021,44(4):262-269.
- [8] 王郝,宋安然,李玉龙. 无另置困油缓冲槽的轴向两段式齿轮泵[J]. 机械传动,2023,47(2):164-168.
- [9] 王郝,宋安然,李玉龙. 齿轮泵与齿轮马达的脉动差异性及其轻量化设计[J]. 机械传动,2023,47(1):77-81.
- [10] 高俊峰,闻佳,刘巧燕,等. 内外啮合齿轮泵与马达传动的特性分析[J]. 机床与液压,2016,44(7):62-65.
- [11] 何存兴. 液压元件[M]. 北京:机械工业出版社,1985.
- [12] 刘萍. 空天用泵轻量化的齿廓逆向设计方法及高形技术[J]. 流体机械,2020,48(7):33-37.
- [13] 张居敏,王鹏. 基于刚体平面运动微分方程的达朗贝尔原理推导[J]. 武汉轻工大学学报,2021,40(6):52-57.
- [14] 吴维锋,童杰,李玉龙. 轻量化罗茨泵无流量脉动无轴向力的耦合设计[J]. 机械传动,2021,45(12):79-84.
- [15] 李玉龙,刘春艳,王生. 大侧隙外啮合齿轮泵的困油特性和流量特性[J]. 机械科学与技术,2015,34(3):454-458.
- [16] 闻德生,隋广东,田山恒,等. 内外啮合齿轮马达泄漏与容积效率分析及试验[J]. 吉林大学学报(工学版),2019,49(4):1186-1193.
- [17] 李玉龙,赵宏顺,宋安然,等. 航天超低黏度齿轮微泵困油下的流量脉动研究[J]. 液压与气动,2020(10):64-68.