

文章编号: 1004-4353(2023)02-0149-06

# 水资源非线性损失对植被生长影响的模型研究

石志高

(福建江夏学院 数理教研部, 福州 350108)

**摘要:** 为研究水资源非线性损失(因自然或人为原因造成的损失)对植被生长的影响,依据生态模型建立了一种植被与水资源相互影响的微分方程模型. 首先,对该模型平衡点的性态进行了分析;其次,利用 Dulac 判别法证明了模型的正平衡点是全局渐近稳定的,并给出了其生态意义;最后,对模型进行了数值仿真,并分析了水资源损失的变化对植被生长的影响. 该研究结果可为合理调控水资源与植被的相互关系提供理论依据.

**关键词:** 微分方程; 平衡点; 非线性; 水资源; 植被; 模拟仿真; 全局渐近稳定

**中图分类号:** O193; O175.1

**文献标识码:** A

## A model study on the impact of nonlinear loss of water resources on vegetation growth

SHI Zhigao

(Teaching and Research Department of Mathematics and Physics, Fujian Jiangxia University,  
Fuzhou 350108, China)

**Abstract:** To study the impact of nonlinear loss of water resources (caused by natural or human factors) on vegetation growth, a differential equation model for the interaction between vegetation and water resources was established based on an ecological model. Firstly, the behavior of the equilibrium point of the model was analyzed; Secondly, the Dulac discriminant method was used to prove that the positive equilibrium point of the model was globally asymptotically stable, and the ecological significance was given; Finally, numerical simulations were conducted on the model to analyze the impact of changes in water resource loss on vegetation growth. The research results can provide theoretical basis for reasonable regulation of the relationship between water resources and vegetation.

**Keywords:** differential equation; equilibrium point; nonlinearity; water resources; vegetation; analog simulation; globally asymptotically stable

## 0 引言

植被和水资源是生态系统的重要组成部分,其中水资源决定了植被的生长状态. 由于干旱地区的降水量存在很大的不稳定性,因此其对干旱地区的植被生长具有较大影响,并进而会影响整个干旱地区的生态系统平衡. 为了研究干旱地区的水资源损失对绿洲植被的影响,近年来一些学者对荒漠-绿洲系统与水资源的相互关系做了一些理论研究<sup>[1-4]</sup>,但应用微分方程生态模型对两者的关系进行研究得较少<sup>[5-6]</sup>. 2014 年,冯建刚等<sup>[6]</sup>在水资源损失为线性的情形下研究了如下水资源和植被系统相互影响的微

收稿日期: 2023-04-08

基金项目: 福建省自然科学基金(2021J011228)

作者简介: 石志高(1983—),男,硕士,副教授,研究方向为微分方程及应用.

分方程模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r - cx - ny - hxy, \\ \frac{dy}{dt} = axy - \beta y. \end{cases} \quad (1)$$

研究显示:植被的退化不会周期性发生;当降雨量过少时,植被会因缺水而导致其逐渐退化和形成荒漠;当降雨量充足时,植被的密度取决于水的供给数量.但在实际中,由于水资源的损失大多是非线性的,因此本文在文献[6]研究的基础上考虑水资源非线性损失对植被生长的影响,并建立和研究如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - bx^\theta - cy - dxy, \\ \frac{dy}{dt} = y(-h + ex). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $a, b, c, d, e, h$  均为正常数, $x$  表示地下水资源, $y$  表示植被密度, $a$  表示地下水的增量, $b$  表示因土壤渗透而导致的水的损失率, $-bx^\theta$  表示水资源的非线性损失, $c$  表示单位密度的植被蒸散量, $h$  表示因缺水而导致的植被死亡率, $dxy$  表示植被对水的吸收量, $exy$  表示植被的生长量.

注 1 文献[6]研究的是  $\theta = 1$  时的情形,本文研究的是  $\theta > 0$  且  $\theta \neq 1$  时的情形.

## 1 预备知识

**定义 1**<sup>[6]</sup> 对于驻定微分方程组  $\frac{dy}{dt} = f(y)$ ,  $y \in D \subseteq \mathbf{R}^n$ , 若方程组  $f(y) = 0$  的解  $y = y^*$  为相空间中满足微分方程组的点,则称  $y = y^*$  为平衡解(驻定解、常数解),又称为奇点(平衡点).

**定理 1**<sup>[6]</sup> (Bendison-Dulac 判别法) 若在单连通区域  $G$  内存在函数  $B(x, y) \in C^1(G)$ , 使得  $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \geq 0 (\leq 0)$ ,  $(x, y) \in G$ , 且不在  $G$  的任一子区域内恒为零,则系统不存在全部位于  $G$  内的闭轨线和具有有限个奇点的奇异闭轨线. 其中函数  $B(x, y)$  常称为 Dulac 函数.

**定理 2**<sup>[6]</sup> 对应于矩阵  $A$  的特征根的不同情况,微分方程组零解的稳定性态为:

- 1) 若特征根均具有负实部,则方程组的零解是渐近稳定的.
- 2) 若有正实部的特征根,则方程组的零解是不稳定的.

## 2 模型的平衡点分析

由模型(2)的生态意义知,只需在  $\bar{G} = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  上对模型(2)的平衡点进行讨论即可.

**引理 1** ① 当  $\frac{a}{b} \leq \left(\frac{h}{e}\right)^\theta$  时,模型(2)有平衡点  $A(x_0, 0)$ . ② 当  $\frac{a}{b} > \left(\frac{h}{e}\right)^\theta$  时,模型(2)有平衡点  $A(x_0, 0)$  和正平衡点  $B(x_1, y_1)$ .

**证明** 解方程组  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - bx^\theta - cy - dxy = 0, \\ \frac{dy}{dt} = y(-h + ex) = 0 \end{cases}$  可得模型(2)的所有可能的平衡点均存在以下两

种情形:  $\begin{cases} a - bx^\theta = 0, \\ y = 0 \end{cases}$  和  $\begin{cases} a - bx^\theta - cy - dxy = 0, \\ -h + ex = 0. \end{cases}$

解第 1 种情形可得  $\begin{cases} x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\theta}}, \\ y = 0. \end{cases}$  记  $x_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\theta}}$ , 则由方程的解可知,此时存在平衡点  $A(x_0, 0)$ .

解第2种情形可得 
$$\begin{cases} y = \frac{be}{ce+dh} \left[ \frac{a}{b} - \left( \frac{h}{e} \right)^\theta \right], \\ x = \frac{h}{e}. \end{cases}$$
 记  $x_1 = \frac{h}{e}$ ,  $y_1 = \frac{be}{ce+dh} \left[ \frac{a}{b} - \left( \frac{h}{e} \right)^\theta \right]$ , 则由方程

的解可知, 仅当  $\frac{a}{b} > \left( \frac{h}{e} \right)^\theta$  时, 存在正平衡点  $B(x_1, y_1)$ .

**定理3** ① 当  $\frac{a}{b} < \left( \frac{h}{e} \right)^\theta$  时, 平衡点  $A(x_0, 0)$  是稳定的结点. ② 当  $\frac{a}{b} = \left( \frac{h}{e} \right)^\theta$  时, 正平衡点  $B(x_1, y_1)$  与平衡点  $A(x_0, 0)$  重叠, 且此时平衡点  $A(x_0, 0)$  和正平衡点  $B(x_1, y_1)$  均是高次奇点. ③ 当  $\frac{a}{b} > \left( \frac{h}{e} \right)^\theta$  时, 平衡点  $A(x_0, 0)$  是鞍点, 正平衡点  $B(x_1, y_1)$  是稳定的结点.

**证明** 模型(2)对应的雅可比矩阵为:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -b\theta x^{\theta-1} - dy & -c - dx \\ ey & ex - h \end{bmatrix},$$

且其特征方程为  $\lambda^2 + (b\theta x^{\theta-1} + dy - ex + h)\lambda + be\theta x^\theta - bh\theta x^{\theta-1} - dhy - cey = 0$ . 下面利用雅可比矩阵对应的行列式和迹来判定平衡点对应的特征根的符号, 具体如下:

$$\det J(x_0, 0) = (-b\theta x_0^{\theta-1})(ex_0 - h) = -be\theta \left( \frac{a}{b} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \left( \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{\theta}} - \frac{h}{e} \right),$$

$$\text{tr} J(x_0, 0) = -b\theta x_0^{\theta-1} + ex_0 - h = -b\theta \left( \frac{a}{b} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} + e \left( \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{\theta}} - \frac{h}{e} \right),$$

$$\det J(x_1, y_1) = (-b\theta x_1^{\theta-1} - dy_1)(ex_1 - h) + ey_1(c + dx_1) = \frac{bce^2 + bedh}{ce + dh} \left[ \frac{a}{b} - \left( \frac{h}{e} \right)^\theta \right],$$

$$\text{tr} J(x_1, y_1) = -b\theta x_1^{\theta-1} - dy_1 + ex_1 - h = -b\theta \left( \frac{a}{b} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} - \frac{bed}{ce + dh} \left[ \frac{a}{b} - \left( \frac{h}{e} \right)^\theta \right].$$

于是由微分方程定性理论的平衡点理论可得:

1) 当  $\frac{a}{b} < \left( \frac{h}{e} \right)^\theta$  时, 对于平衡点  $A(x_0, 0)$ , 有  $\det J(x_0, 0) = -be\theta \left( \frac{a}{b} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \left( \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{\theta}} - \frac{h}{e} \right) > 0$ ,  $\text{tr} J(x_0, 0) = -b\theta \left( \frac{a}{b} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} + e \left( \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{\theta}} - \frac{h}{e} \right) < 0$ . 此时平衡点  $A(x_0, 0)$  的特征根均具有负实部, 故平衡点  $A(x_0, 0)$  是稳定的结点.

2) 当  $\frac{a}{b} = \left( \frac{h}{e} \right)^\theta$  时, 正平衡点  $B(x_1, y_1)$  与平衡点  $A(x_0, 0)$  重叠, 且  $\det J(x_0, 0) = -be\theta \times \left( \frac{a}{b} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \left( \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{\theta}} - \frac{h}{e} \right) = 0$ , 故平衡点  $A(x_0, 0)$  和正平衡点  $B(x_1, y_1)$  均是高次奇点.

3) 当  $\frac{a}{b} > \left( \frac{h}{e} \right)^\theta$  时, 对于平衡点  $A(x_0, 0)$ , 有  $\det J(x_0, 0) = -be\theta \left( \frac{a}{b} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \left( \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{\theta}} - \frac{h}{e} \right) < 0$ , 且此时平衡点  $A(x_0, 0)$  的特征根具有正实部, 故平衡点  $A(x_0, 0)$  是不稳定的鞍点. 对于正平衡点  $B(x_1, y_1)$ , 有  $\det J(x_1, y_1) = (-b\theta x_1^{\theta-1} - dy_1)(ex_1 - h) + ey_1(c + dx_1) = \frac{bce^2 + bedh}{ce + dh} \left[ \frac{a}{b} - \left( \frac{h}{e} \right)^\theta \right] > 0$ ,  $\text{tr} J(x_1, y_1) = -b\theta \left( \frac{a}{b} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} - \frac{bed}{ce + dh} \left[ \frac{a}{b} - \left( \frac{h}{e} \right)^\theta \right] < 0$ , 且此时正平衡点  $B(x_1, y_1)$  的特征根均具有负实部, 故正平衡点  $B(x_1, y_1)$  是稳定的结点.

**定理4** 模型(2)的正平衡点  $B(x_1, y_1)$  是全局渐近稳定的.

**证明** 由定理 3 知正平衡点  $B(x_1, y_1)$  是局部渐近稳定的. 再由微分方程定性理论可知, 若模型(2) 在  $G = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$  内不存在闭轨线, 则正平衡点  $B(x_1, y_1)$  是全局渐近稳定的. 对模型(2) 取 Dulac 函数  $B(x, y) = y^{-1}$  可得  $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = -\frac{b\theta x^{\theta-1}}{y} - d < 0$ , 于是再由 Dulac 定理可知, 模型(2) 在  $G = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$  内不存在闭轨线, 故正平衡点  $B(x_1, y_1)$  是全局渐近稳定的, 证毕.

### 3 水资源-植被系统的生态意义

由上述对平衡点的分析可以得出以下结论:

1) 当  $\frac{a}{b} \leq \left(\frac{h}{e}\right)^\theta$  时, 由定理 1 中的 ① 可知平衡点  $A(x_0, 0)$  是渐近稳定的. 这说明当土壤渗透和水分蒸发作用过强或人为用水量过大时, 即水资源的非线性损失过大时, 将会造成植被系统因缺水而不断退化, 并最终形成荒漠. 因此, 此时可通过引调水工程或人工降雨等措施使植被系统保有充足水量, 以防止植被退化和促进绿洲生态系统的恢复.

2) 当  $\frac{a}{b} > \left(\frac{h}{e}\right)^\theta$  时, 由定理 1 中的 ③ 可知正平衡点  $B(x_1, y_1)$  是渐近稳定的. 这说明当土壤渗透和水分蒸发作用较弱或人为用水量较小时, 即水资源的非线性损失较小时, 植被系统可拥有充足的水资源, 植被生产旺盛, 有利于水资源与植被生长保持平衡.

### 4 数值模拟仿真

分别在  $\frac{a}{b} < \left(\frac{h}{e}\right)^\theta$  (例 1) 和  $\frac{a}{b} > \left(\frac{h}{e}\right)^\theta$  (例 2) 两种情形下, 仿真分析不同参数  $\theta$  下水资源-植被系统平衡点附近的轨线结构.

**例 1** 在模型(2) 中取参数  $a = 2, b = 4, c = 3, d = 5, e = 1, h = 7$ , 得如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2 - 4x^\theta - 3y - 5xy, \\ \frac{dy}{dt} = y(-7 + x). \end{cases} \quad (3)$$

1) 取  $\theta = \frac{1}{2}$ . 此时模型(3) 满足条件  $\frac{a}{b} < \left(\frac{h}{e}\right)^\theta$ , 且存在稳定的结点  $A(\frac{1}{4}, 0)$ . 图 1 是模型(3) 在初值为  $x(0) = 0.5, y(0) = 1$  时的轨线图. 由图 1 可以看出: 初始时, 植被数量因水资源数量的损失而快速减少; 随着时间的推移, 水资源数量递减至最低点后又逐步增加至稳定值  $\frac{1}{4}$ , 但植被数量仍继续减少, 直至为 0. 这说明, 在该条件下水资源在初期损失较大后, 即使后期水资源数量有所增加, 但仍无法满足植被的生长需求, 进而使得植被逐渐退化并形成荒漠.

2) 取  $\theta = \frac{1}{8}$ . 此时模型(3) 仍满足条件  $\frac{a}{b} < \left(\frac{h}{e}\right)^\theta$ , 且存在稳定的结点  $A(\frac{1}{256}, 0)$ . 图 2 为  $\theta = \frac{1}{8}$  时模型(3) 在初值为  $x(0) = 0.5, y(0) = 1$  时的轨线图. 由图 2 可以看出: 当  $\theta$  从  $\frac{1}{2}$  变成  $\frac{1}{8}$  时, 水资源数量快速减少并出现负值, 由此说明当  $\theta = \frac{1}{8}$  时植被退化和形成荒漠的速度大于  $\theta = \frac{1}{2}$  时.

3) 取  $\theta = 2$ . 此时模型(3) 仍满足条件  $\frac{a}{b} < \left(\frac{h}{e}\right)^\theta$ , 且存在稳定的结点  $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ . 图 3 为  $\theta = 2$  时模型(3) 在初值为  $x(0) = 0.5, y(0) = 1$  时的轨线图. 对比图 3 和图 1 可以看出: 此时水资源数量的损失比

$\theta = \frac{1}{2}$  时虽略少一些,但仍无法满足植被的生长需求,植被仍然会逐渐退化并形成荒漠。

**例2** 在模型(2)中取参数  $a = 6, b = 2, c = 2, d = 4, e = 5, h = 1$ , 得如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6 - 2x^\theta - 2y - 4xy, \\ \frac{dy}{dt} = y(-1 + 5x). \end{cases} \quad (4)$$

1) 取  $\theta = \frac{1}{2}$ . 此时模型(4)满足条件  $\frac{a}{b} > \left(\frac{h}{e}\right)^\theta$ , 且存在稳定结点  $B(\frac{1}{5}, \frac{15-\sqrt{5}}{7})$ . 图4是模型(4)在初值为  $x(0) = 0.5, y(0) = 1$  时的轨线图. 由图4可以看出:初始时,植被数量因水资源数量略有增加而快速增加;随着时间的推移,当水资源数量逐步减少至稳定值  $\frac{1}{5}$  时,植被数量仍不断增加,直至达到稳定值  $\frac{15-\sqrt{5}}{7}$ . 这说明,在该条件下水资源数量虽出现先增加后减少的现象,但减少后剩余的水资源总量仍然能够满足植被的生长需求,并最终可使水资源数量和植被数量达到平衡。

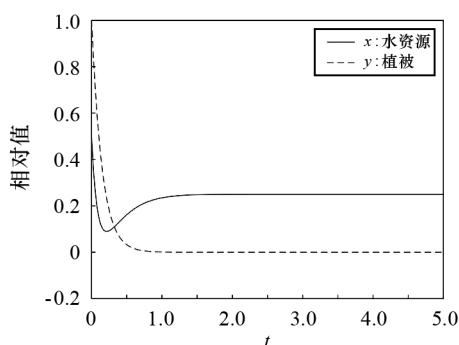


图1  $\theta = \frac{1}{2}$  时模型(3)的轨线图

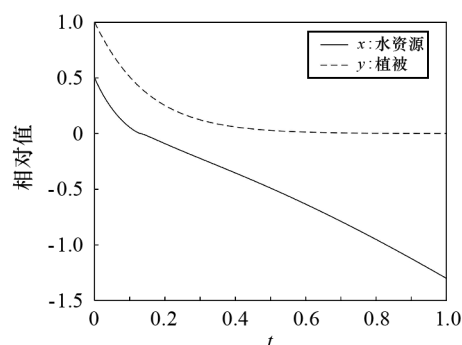


图2  $\theta = \frac{1}{8}$  时模型(3)的轨线图

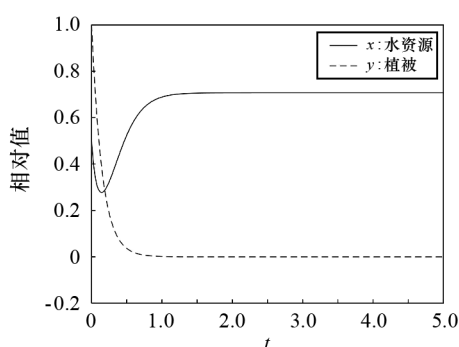


图3  $\theta = 2$  时模型(3)的轨线图

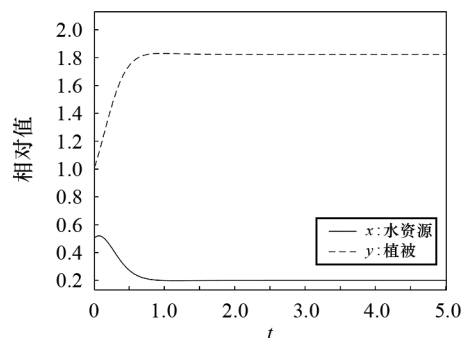


图4  $\theta = \frac{1}{2}$  时模型(4)的轨线图

2) 取  $\theta = \frac{1}{12}$ . 此时模型(4)仍满足条件  $\frac{a}{b} > \left(\frac{h}{e}\right)^\theta$ , 且存在稳定结点  $B(\frac{1}{5}, \frac{5(3-\sqrt[12]{0.2})}{7})$ . 图5为  $\theta = \frac{1}{12}$  时模型(4)在初值为  $x(0) = 0.5, y(0) = 1$  时的轨线图. 由图5可以看出:当  $\theta$  从  $\frac{1}{2}$  变成  $\frac{1}{12}$  时, 植被数量因水资源数量的损失速度比  $\theta = \frac{1}{2}$  时快而有所减少,但剩余的水资源总量仍能满足植被的生长需求,使植被数量最终达到稳定值  $\frac{5(3-\sqrt[12]{0.2})}{7}$ . 这说明,在初始水资源不充足的情况下,水资源损失

较大时其对植被数量的影响也相对较大,但只要剩余的水资源总量仍足以满足现有植被的生长需求,两者最终能达到平衡状态.

3) 取  $\theta = 6$ . 此时模型(4) 仍满足条件  $\frac{a}{b} > \left(\frac{h}{e}\right)^\theta$ , 且存在稳定的结点  $B\left(\frac{1}{5}, \frac{46874}{21875}\right)$ . 图 6 为  $\theta = 6$  时模型(4) 在初值为  $x(0) = 0.5, y(0) = 1$  时的轨线图. 对比图 6 和图 4 可以看出:此时水资源数量的损失比  $\theta = \frac{1}{2}$  时虽然略微少一些,但植被数量大于  $\theta = \frac{1}{2}$  时的情形,并最终达到稳定值  $\frac{46874}{21875}$ . 这说明,在初始水资源不充足的情况下,水资源的损失较小时其对植被数量的影响也相对较小,因此比  $\theta = \frac{1}{2}$  情形时其更易达到平衡状态.

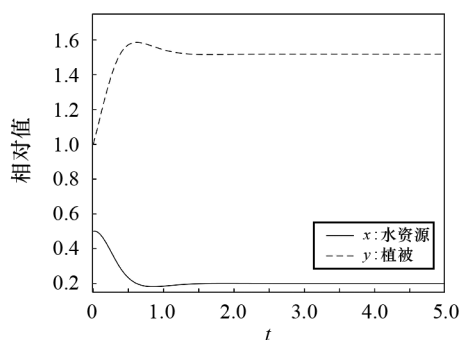


图 5  $\theta = \frac{1}{12}$  时模型(4) 的轨线图

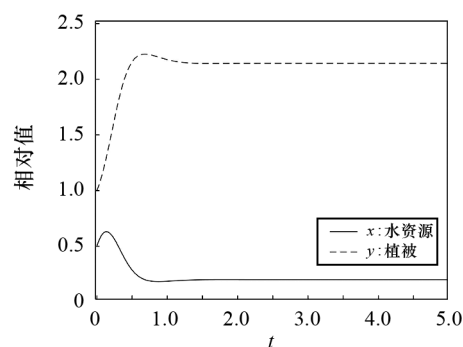


图 6  $\theta = 6$  时模型(4) 的轨线图

## 参考文献:

- [1] 季树新, 乔荣荣, 白雪莲, 等. 荒漠-绿洲过渡带不同生境植被生产力格局对降雨的响应[J]. 生态学杂志, 2020, 39(2): 376-383.
- [2] 杨锦. 石羊河流域荒漠绿洲区植被与地下水埋深的关系研究[J]. 甘肃水利水电技术, 2018, 54(12): 1-4.
- [3] 魏伟, 石培基, 周俊菊, 等. 近 20 年和田绿洲水资源变化及其驱动力分析[J]. 干旱区资源与环境, 2013, 27(2): 156-161.
- [4] 阿布都热合曼·哈力克. 基于生态环境保护的且末绿洲生态需水量研究[J]. 干旱区资源与环境, 2012, 6(7): 20-25.
- [5] 阿卜杜许库尔·热合曼, 阿布都热西提·阿布都外力. 植被根吸水对植被斑图的影响研究[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(5): 556-562.
- [6] 冯建刚, 阿布都热西提·阿布都外力. 干旱区绿洲植被退化模型的定性分析[J]. 山东理工大学学报(自然科学版), 2014, 28(1): 35-37.
- [7] YU S B. Extinction for a discrete competition system with feedback controls[J]. Advances in Difference Equations, 2017, 2017: 9-19.
- [8] CHEN S S. Nonexistence of nonconstant positive steady states of a diffusive predator-prey model[J]. Communications on Pure & Applied Analysis, 2018, 17(2): 477-485.
- [9] ZHOU J, KIM C G, SHI J P. Positive steady state solutions of a diffusive Leslie-Gower predator-prey model with Holling type II functional response and cross-diffusion[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems- A, 2014, 34(9): 3875-3899.
- [10] XIE Z F. Turing instability in a coupled predator-prey model with different Holling type functional responses[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems, 2011, 4(6): 1621-1628.
- [11] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.