

文章编号: 1004-4353(2023)02-0140-10

带形状参数的双三次 Bezier 三角曲面的光滑拼接

孙明灿, 师晶

(闽南理工学院 信息管理学院, 福建 石狮 362700)

摘要: 为提高 Bezier 曲线曲面在计算机辅助几何设计中的造型能力, 给出了一类带形状参数的双三次 Bezier 三角曲面的定义, 并利用基函数性质、曲线性质和曲面性质得到了曲面间不同方向的 G^1 拼接条件及拼接算法. 实例计算表明, 该算法可有效提高曲面形状的可控性.

关键词: 双三次 Bezier 三角曲面; 形状参数; 曲面拼接; 曲面造型

中图分类号: TP391

文献标识码: A

Smooth stitching of bicubic Bezier triangular surface with shape parameters

SUN Mingcan, SHI Jing

(College of Information Management, Minnan University of Science and Technology, Shishi 362700, China)

Abstract: In order to improve the modeling ability of Bezier surfaces in computer aided geometric design, the bicubic Bezier triangular surface with shape parameters was defined. The G^1 splicing conditions in different directions and the splicing algorithm between surfaces were obtained by using the properties of basis function, curve and surface. The examples show that the algorithm can effectively improve the controllability of surface shape.

Keywords: bicubic Bezier triangular surface; shape parameters; surface splicing; surface modeling

0 引言

在计算机辅助几何设计(CAGD)中, Bezier 曲线曲面由于具有图像直观、易于理解和计算高效等优点被广泛应用于动画制作、电子信息、生物技术及工业制造等领域中^[1]. 但 Bezier 曲线曲面在曲面造型中也存在一些不足, 如图形会随着控制顶点的改变而发生变化, 且它还无法精确表示一些二次曲线曲面的形状. 为解决 Bezier 曲线曲面在曲面造型中存在的这些问题, 一些学者对其性质进行了研究, 并取得了一些良好成果. 例如: 文献[2]的作者提出了一种能够保持参数连续性的多曲面变形技术, 该变形技术不仅误差可控, 而且还可使边界处的节点矢量在不必相同的条件下即可实现曲面的光滑拼接. 文献[3]的作者给出了一种利用曲面边界线构建拼接曲面的方法, 该方法不仅可用函数精确地表示三次规则曲面和自由曲面, 而且还具有独立的跨界导矢和约束条件. 文献[4]的作者在文献[3]的基础上, 利用 Coons 曲面的设计原理构造了一个可满足 C^1 连续的 CNSBS 曲面, 研究表明该曲面不仅具有独立的跨界导矢和约束条件, 而且还具有 B 样条曲面的性质. 文献[5]的作者基于最小二乘法 and 参数优化方法提

收稿日期: 2022-12-06

基金项目: 福建省中青年教育科研项目(JAT200761)

作者简介: 孙明灿(1983—), 男, 硕士, 讲师, 研究方向为计算机辅助几何设计.

出了一种样条曲面光滑拼接的方法,该方法不仅可有效避免曲面错位,而且还可最小化控制顶点的数量.文献[6]的作者讨论了一类广义Bezier曲线离散造型的细分算法,该算法构造的广义Bezier曲线具有直观性、可调性,因此可推广到相应的张量积曲面造型中.文献[7]的作者讨论了一种基于几何约束的代数曲线,研究表明该曲线不仅保留了样条曲线的几何性质,而且具有良好的逼近性和局部形状可调性.文献[8]的作者给出了一类四次三角Bezier曲线的性质和应用,研究显示该曲线不须改变控制多边形即可生成非对称的图形.基于上述研究,本文定义了一种带形状参数的双三次Bezier三角曲面,并给出了该曲面基函数和曲面的性质以及曲面间 G^1 光滑拼接的定理及拼接算法.实例计算表明,本文算法不仅在不同方向上可实现参数的连续性,而且还可有效提高曲面形状的可控性.

1 带形状参数的双三次Bezier三角曲面

定义1 设 $\alpha \in (0, 2]$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 称关于 t 的多项式

$$\begin{cases} X_0(t) = 1 - \alpha \sin t + (\alpha - 1) \sin^2 t, \\ X_1(t) = \alpha \sin t - \alpha \sin^2 t, \\ X_2(t) = -\alpha + \alpha \cos t + \alpha \sin^2 t, \\ X_3(t) = \alpha - \alpha \cos t + (1 - \alpha) \sin^2 t \end{cases} \quad (1)$$

为带形状参数 α 的三次Bezier三角基函数.式(1)中的4个基函数满足以下性质:①非负性,即 $X_i(t) \geq 0$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $i = 0, 1, 2, 3$;②规范性,即 $\sum_{i=0}^3 X_i(t) = 1$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

③端点性质,即 $X_0(0) = X_3(\frac{\pi}{2}) = 1$, $X_1(0) = X_2(0) = X_3(0) = 0$, $X_0(\frac{\pi}{2}) = X_1(\frac{\pi}{2}) = X_2(\frac{\pi}{2}) = 0$;④单峰性,

即 $X_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有一个最大值.

当 $\alpha = 1$ 时,式(1)中的4个基函数的图形如图1所示.

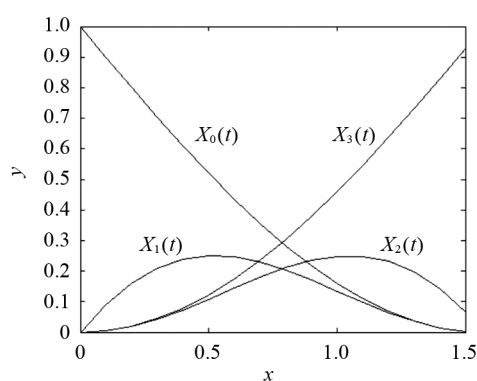


图1 基函数的图形

定义2 在 \mathbf{R}^3 空间中给定4个控制顶点 P_i ($i = 0, 1, 2, 3$), 定义带形状参数的三次Bezier三角曲线

为 $p(t) = \sum_{i=0}^3 X_i(t) P_i$, 其中 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

带形状参数的三次Bezier三角曲线 $p(t)$ 具有如下性质:

1) 端点性质, 即 $p(0) = P_0$, $p(\frac{\pi}{2}) = P_3$, $p'(0) = \alpha(P_1 - P_0)$, $p'(\frac{\pi}{2}) = \alpha(P_3 - P_2)$. 曲线 $p(t)$ 插值于首末两端点 P_0 和 P_3 , 且在 P_0 和 P_3 处的切线分别是直线 P_0P_1 和 P_2P_3 .

证明 由式(1)和定义2可得:

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{i=0}^3 X_i(t) P_i = P_0[1 - \alpha \sin t + (\alpha - 1) \sin^2 t] + P_1[\alpha \sin t - \alpha \sin^2 t] + \\ &\quad P_2[-\alpha + \alpha \cos t + \alpha \sin^2 t] + P_3[\alpha - \alpha \cos t + (1 - \alpha) \sin^2 t]. \end{aligned}$$

将 $t = 0$ 和 $t = \frac{\pi}{2}$ 分别代入上式可得 $p(0) = P_0$ 和 $p(\frac{\pi}{2}) = P_3$, 由此可知曲线 $p(t)$ 分别插值于首末两端点 P_0 和 P_3 . 又因为

$$p'(t) = P_0[-\alpha \cos t + 2(\alpha - 1)\sin t \cos t] + P_1[\alpha \cos t - 2\alpha \sin t \cos t] + \\ P_2[-\alpha \sin t + 2\alpha \sin t \cos t] + P_3[\alpha \sin t + 2(1 - \alpha)\sin t \cos t],$$

所以将 $t = 0$ 和 $t = \frac{\pi}{2}$ 分别代入上式后整理可得 $p'(0) = \alpha(P_1 - P_0)$ 和 $p'(\frac{\pi}{2}) = \alpha(P_3 - P_2)$. 由此可知, 曲线 $p(t)$ 与直线 P_0P_1 和 P_2P_3 相切, 且在首末端点的切矢模长分别等于控制多边形首末边边长的 α 倍.

2) 几何不变性, 即曲线 $p(t)$ 的形状仅与控制顶点 $P_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 有关, 而与坐标系的选取无关.

证明 对控制顶点为 $P_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 的曲线 $p_1(t)$ 进行线性变换和平移变换后, 得控制顶点为 $Q_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 的曲线 $p_2(t)$ 为:

$$p_2(t) = Mp_1(t) + Np_1(t) = \sum_{i=0}^3 (M + N)X_i(t)P_i = \sum_{i=0}^3 X_i(t)Q_i.$$

式中: M 为线性变换, N 为平移变换. 由上式可知, 曲线具有几何不变性.

3) 凸包性, 即曲线 $p(t)$ 落在由控制顶点 $P_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 构成的凸包内.

证明 因为基函数 $X_i(t) \geq 0$, 且 $\sum_{i=0}^3 X_i(t) = 1 (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; i = 0, 1, 2, 3)$, 所以当 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $p(t)$ 是特征多边形各顶点的加权平均, 且权因子为基函数, 即曲线 $p(t)$ 是控制顶点 $P_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 的凸线性组合; 因此, 曲线 $p(t)$ 落在由控制顶点 $P_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 构成的凸包内.

4) 变差缩减性, 即曲线 $p(t)$ 具有变差缩减性.

证明 首先证明基函数组 $\{X_0(t), X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上满足笛卡尔符号法则, 即对任一组常数序列 $\{C_0, C_1, C_2, C_3\}$ 有:

$$\text{Zeros}(0, \frac{\pi}{2})\{\sum_{i=0}^3 C_i X_i(t)\} \leq SA(C_0, C_1, C_2, C_3). \quad (2)$$

其中: $\text{Zeros}(0, \frac{\pi}{2})\{f(t)\}$ 表示函数 $f(t)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的根个数, $f(t) = \sum_{i=0}^3 C_i X_i(t)$; $SA(C_0, C_1, C_2, C_3)$ 表示序列的符号改变次数. 不妨设 $C_0 > 0$, 则 $SA(C_0, C_1, C_2, C_3)$ 可能的取值为 3, 2, 1, 0.

i) 当 $SA(C_0, C_1, C_2, C_3) = 3$ 时, 则 $C_3 < 0$. 证明: 若假设 $f(t)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有 4 个根, 则由 $f(t)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续和 $f(0) = C_0, f(\frac{\pi}{2}) = C_3$ 可得 $f(\frac{\pi}{2}) = C_3 > 0$. 该结果与 $C_3 < 0$ 矛盾, 故式(2)成立.

ii) 当 $SA(C_0, C_1, C_2, C_3) = 2, 1$ 时, 用类似 i) 的证明即可证明式(2)仍成立, 故本文在此省略.

iii) 当 $SA(C_0, C_1, C_2, C_3) = 0$ 时, 式(2)显然成立.

由以上可知, 基函数组 $\{X_0(t), X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上满足笛卡尔符号法则.

其次证明变差缩减性质成立. 设直线 L 与控制多边形 $P_0P_1P_2P_3$ 的边 P_iP_{i+1} 交于点 Q , 直线 L 与控制多边形 $P_0P_1P_2P_3$ 的交点个数为 m , 且边 P_iP_{i+1} 的法向量为 \mathbf{v} . 由于控制顶点 P_i 和 P_{i+1} 分别位于直线 L 的两侧, 所以 $\mathbf{v} \cdot (P_i - Q)$ 和 $\mathbf{v} \cdot (P_{i+1} - Q)$ 的符号相反, 进而有:

$$SA\{\mathbf{v} \cdot (P_0 - Q), \mathbf{v} \cdot (P_1 - Q), \mathbf{v} \cdot (P_2 - Q), \mathbf{v} \cdot (P_3 - Q)\} \leq m.$$

由于曲线 $p(t)$ 与直线 L 的交点个数为 $\text{Zeros}(0, \frac{\pi}{2})\{\sum_{i=0}^3 X_i(t)(P_i - Q) \cdot \mathbf{v}\}$, 所以由基函数组的笛卡尔

符号法则可得: $\text{Zeros}(0, \frac{\pi}{2})\{\sum_{i=0}^3 X_i(t)(P_i - Q) \cdot \mathbf{v}\} \leq SA\{\mathbf{v} \cdot (P_0 - Q), \mathbf{v} \cdot (P_1 - Q), \mathbf{v} \cdot (P_2 - Q), \mathbf{v} \cdot (P_3 - Q)\}$. 由该式可知, 曲线 $p(t)$ 具有变差缩减性. 曲线 $p(t)$ 具有变差缩减性表明, 曲线 $p(t)$ 的波动小于控制多边形的波动, 即曲线 $p(t)$ 的光滑性优于其控制多边形的光滑性.

5) 保凸性,即曲线 $p(t)$ 具有保凸性.

证明 由变差缩减性可知,当控制多边形为凸多边形时,平面内任一直线与控制多边形的交点数最多为2.由此可得曲线 $p(t)$ 与任一直线的交点数最多为2,故曲线 $p(t)$ 具有保凸性.

6) 逼近性,即:当形状参数 α 变大时,曲线 $p(t)$ 更加逼近控制多边形的边 P_1P_2 ;当形状参数 α 变小时,曲线 $p(t)$ 更加逼近控制多边形的边 P_0P_3 .当形状参数 α 取不同值时,带形状参数的三次Bezier三角曲线 $p(t)$ 的图形如图2所示.

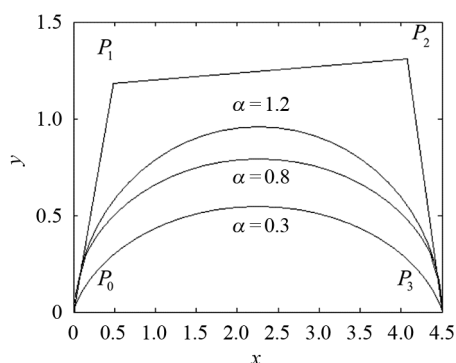


图2 带形状参数的三次Bezier三角曲线 $p(t)$ 的图形

定义3 在 R^3 空间中给定16个控制顶点 $P_{ij}(i, j = 0, 1, 2, 3)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 2]$, 定义带形状参数的双三次Bezier三角曲面为:

$$S(u, v; \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 X_i(u, \alpha_1) X_j(v, \alpha_2) P_{ij}, \quad (3)$$

其中 $X_i(u, \alpha_1)$ 和 $X_j(v, \alpha_2)$ 与式(1)定义的基函数相同, α_1 和 α_2 是曲面的两个形状参数.

带形状参数的双三次Bezier三角曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 具有以下性质:

1) 插值性,即曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 的4个角点为控制网格的4个顶点,分别为: $S(0, 0; \alpha_1, \alpha_2) = P_{00}$, $S(0, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2) = P_{03}$, $S(\frac{\pi}{2}, 0; \alpha_1, \alpha_2) = P_{30}$, $S(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2) = P_{33}$; 曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 在控制网格的4个顶点 $P_{00}, P_{03}, P_{30}, P_{33}$ 处的切平面分别是由 $P_{00}P_{01}P_{10}, P_{03}P_{02}P_{13}, P_{30}P_{20}P_{31}$ 和 $P_{33}P_{23}P_{32}$ 所形成的平面.

证明 由带形状参数的三次Bezier三角曲线 $p(t)$ 的端点性质和定义3可得:

$$\begin{aligned} S(0, 0; \alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^3 [X_i(0, \alpha_1) \sum_{j=0}^3 X_j(0, \alpha_2) P_{ij}] = \sum_{i=0}^3 [X_i(0, \alpha_1) P_{i0}] = P_{00}, \\ S(0, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^3 [X_i(0, \alpha_1) \sum_{j=0}^3 X_j(\frac{\pi}{2}, \alpha_2) P_{ij}] = \sum_{i=0}^3 [X_i(0, \alpha_1) P_{i3}] = P_{03}, \\ S(\frac{\pi}{2}, 0; \alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^3 [X_i(\frac{\pi}{2}, \alpha_1) \sum_{j=0}^3 X_j(0, \alpha_2) P_{ij}] = \sum_{i=0}^3 [X_i(\frac{\pi}{2}, \alpha_1) P_{i0}] = P_{30}, \\ S(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^3 [X_i(\frac{\pi}{2}, \alpha_1) \sum_{j=0}^3 X_j(\frac{\pi}{2}, \alpha_2) P_{ij}] = \sum_{i=0}^3 [X_i(\frac{\pi}{2}, \alpha_1) P_{i3}] = P_{33}. \end{aligned}$$

由上式可知插值性得证.

2) 边界性和凸包性,即曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 位于由控制顶点 $P_{ij}(i, j = 0, 1, 2, 3)$ 生成的凸包内,且4条边界曲线均为三次Bezier三角曲线.4条边界曲线分别为:

$$\begin{aligned} S(u, 0; \alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^3 X_i(u, \alpha_1) P_{i0}, \quad S(u, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=0}^3 X_i(u, \alpha_1) P_{i3}, \\ S(0, v; \alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{j=0}^3 X_j(v, \alpha_2) P_{0j}, \quad S(\frac{\pi}{2}, v; \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=0}^3 X_j(v, \alpha_2) P_{3j}. \end{aligned}$$

证明 由带形状参数的三次Bezier三角曲线 $p(t)$ 的端点性质和定义3可得:

$$\begin{aligned} S(u, 0; \alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^3 [X_i(u, \alpha_1) \sum_{j=0}^3 X_j(0, \alpha_2) P_{ij}] = \sum_{i=0}^3 X_i(u, \alpha_1) P_{i0}, \\ S(u, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^3 [X_i(u, \alpha_1) \sum_{j=0}^3 X_j(\frac{\pi}{2}, \alpha_2) P_{ij}] = \sum_{i=0}^3 X_i(u, \alpha_1) P_{i3}, \end{aligned}$$

$$S(0, v; \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=0}^3 [X_j(v, \alpha_2) \sum_{i=0}^3 X_i(0, \alpha_1) P_{ij}] = \sum_{j=0}^3 X_j(v, \alpha_2) P_{0j},$$

$$S(\frac{\pi}{2}, v; \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=0}^3 [X_j(v, \alpha_2) \sum_{i=0}^3 X_i(\frac{\pi}{2}, \alpha_1) P_{ij}] = \sum_{j=0}^3 X_j(v, \alpha_2) P_{3j}.$$

由上式可知边界性和凸包性得证.

3) 几何不变性, 即曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 的数学表示式及其形状不依赖于坐标系的选择.

证明 因证明过程与曲线 $p(t)$ 的几何不变性的证明过程类似, 故本文在此省略.

4) 表示唯一性, 即若有两张曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 相同, 则它们的控制顶点和形状参数相同; 反之, 它们的控制顶点和形状参数不同.

证明 由式(3)可知, 曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 的表示唯一性显然成立.

5) 形状可调性, 即曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 的形状参数对曲面的形状具有调节作用.

证明 由于曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 带有两个形状参数 α_1 和 α_2 , 因此根据曲线 $p(t)$ 的逼近性可知: 在控制顶点 $P_{ij} (i, j = 0, 1, 2, 3)$ 不变的情况下, 通过选取不同的 α_1 值和 α_2 值可调整曲面的形状. 当 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 时, 曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 是定义在三角域上的三次 Bezier 三角曲面, 由此可知定义在三角域上的三次 Bezier 三角曲面是曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 的一个特殊情况. 图 3 为形状参数 α_1 和 α_2 取不同值时的曲面图.

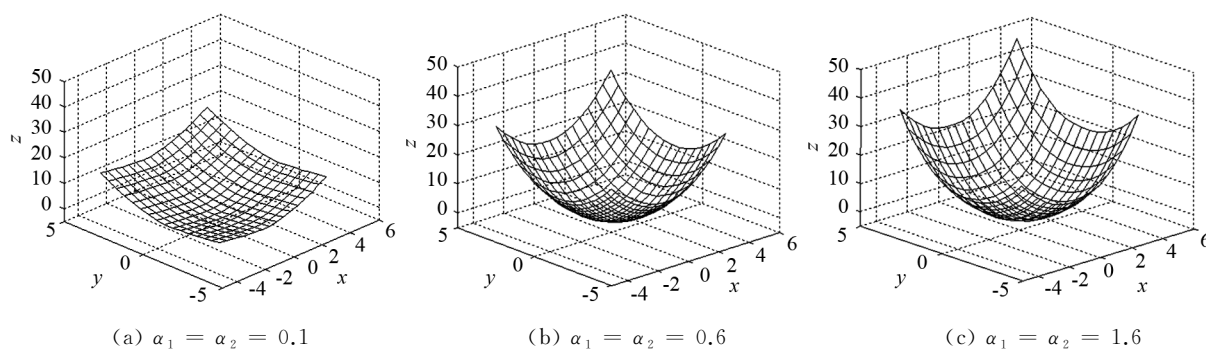


图 3 形状参数 α_1 和 α_2 取不同值时的曲面图

2 形状参数的几何意义

为方便设计者调整曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 的形状, 本文对两个形状参数 α_1 和 α_2 的几何意义进行分析, 即分析当其中一个形状参数发生改变或两个形状参数均发生改变时, 曲面形状所发生变化的规律.

定理 1 在带形状参数的双三次 Bezier 三角曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 中, 当控制顶点 $P_{ij} (i, j = 0, 1, 2, 3)$ 不变时, 有: ① 若保持其中一个形状参数不变, 而增大(或减小)另一个形状参数, 则曲面会逐渐靠近(或远离)控制网格; ② 若同时增大(或减小)两个形状参数, 则曲面会逐渐靠近(或远离)控制网格.

证明 本文采用文献[9]中的证明方法证明定理 1 中的 ①. 不失一般性, 假设形状参数 α_2 不变, 则曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 的基函数 $X_i(t) (i = 0, 1, 2, 3)$ 对形状参数 α_1 求导可得:

$$\frac{d}{d\alpha_1} X_0(t) = -\sin t + \sin^2 t \leq 0, \quad \frac{d}{d\alpha_1} X_1(t) = \sin t - \sin^2 t \geq 0,$$

$$\frac{d}{d\alpha_1} X_2(t) = -1 + \cos t + \sin^2 t \geq 0, \quad \frac{d}{d\alpha_1} X_3(t) = 1 - \cos t - \sin^2 t \leq 0.$$

由上式可知, 当形状参数 α_2 不变而 α_1 增大时, $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 均增大, 而 $X_0(t)$ 和 $X_3(t)$ 均减小. 再由式(3)可知, 当形状参数 α_2 不变而 α_1 增大时, 曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 图靠近控制顶点 P_{1j} 和 $P_{2j} (j = 0, 1, 2, 3)$, 同时远离控制顶点 P_{0j} 和 $P_{3j} (j = 0, 1, 2, 3)$. 另外, 由于 P_{1j} 和 $P_{2j} (j = 0, 1, 2, 3)$ 是位于曲面 $S(u,$

$v; \alpha_1, \alpha_2$) 中间位置的控制顶点,所以当曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 图靠近控制顶点 P_{1j} 和 P_{2j} ($j = 0, 1, 2, 3$) 时曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 图靠近控制网格. 同理,当形状参数 α_2 不变而 α_1 减小时,曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 图远离控制网格.

因证明定理 1 中的 ② 的过程与证明定理 1 中的 ① 的过程类似,故本文在此省略.

定理 2 在带形状参数的双三次 Bezier 三角曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 中,当控制顶点 P_{ij} ($i, j = 0, 1, 2, 3$) 不变时,有: ① 若仅改变形状参数 α_1 的值,则边界曲线 $S(u, 0; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S(u, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2)$ 发生变化; ② 若仅改变形状参数 α_2 的值,则边界曲线 $S(0, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S(\frac{\pi}{2}, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 发生变化.

证明 由曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 的边界性质可知,边界曲线 $S(u, 0; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S(u, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2)$ 仅与形状参数 α_1 有关,与 α_2 无关;所以,仅改变形状参数 α_1 的值,曲面 $S(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 的边界曲线 $S(u, 0; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S(u, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2)$ 即可发生变化. ① 证明完毕.

因证明定理 2 中的 ② 的过程与证明定理 2 中的 ① 的过程类似,故本文在此省略.

3 曲面的 G^1 拼接定理

设两张带形状参数的双三次 Bezier 三角曲面分别为:

$$S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 X_i(u, \alpha_1) X_j(v, \alpha_2) P_{ij},$$

$$S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 X_i(u, \lambda_1) X_j(v, \lambda_2) Q_{ij}.$$

其中:两曲面的控制顶点分别为 P_{ij} 和 Q_{ij} ($i, j = 0, 1, 2, 3$); 形状参数 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2 \in (0, 2]$; $X_i(u, \alpha_1)$ 、 $X_j(v, \alpha_2)$ 、 $X_i(u, \lambda_1)$ 和 $X_j(v, \lambda_2)$ 与式(1)定义的基函数相同.

定理 3 两张双三次 Bezier 三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 满足 u 向与 u 向 G^1 拼接的充要条件是:

- 1) $P_{i3} = Q_{i0}, \alpha_1 = \lambda_1 (i = 0, 1, 2, 3)$;
- 2) 存在实常数 $\mu > 0$, 使得 $\frac{P_{i3} - P_{i2}}{2 + \lambda_2} = \mu \frac{Q_{i1} - Q_{i0}}{2 + \alpha_2}$.

证明 若两张双三次 Bezier 三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 满足 u 向与 u 向 G^1 拼接, 则它们在 u 向首先需要满足 G^0 拼接, 即两曲面要有公共的边界: $S_1(u, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2) = S_2(u, 0; \lambda_1, \lambda_2)$. 利用曲线的边界性质对上式进行化简可得:

$$\sum_{i=0}^3 X_i(u; \alpha_1) P_{i3} = \sum_{i=0}^3 X_i(u; \lambda_1) Q_{i0}. \quad (4)$$

再由曲面的插值性和凸包性可知, 式(4)可化为 $P_{i3} = Q_{i0}, \alpha_1 = \lambda_1 (i = 0, 1, 2, 3)$. 由于当两张曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 满足 G^1 拼接时, 它们在公共边界处还应有相同的切平面, 即它们在边界处的法矢方向应是连续的, 故有:

$$\frac{\partial}{\partial v} S_1(u, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2) \times \frac{\partial}{\partial u} S_1(u, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2) = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial v} S_2(u, 0; \lambda_1, \lambda_2) \times \frac{\partial}{\partial u} S_2(u, 0; \lambda_1, \lambda_2). \quad (5)$$

式(5)中, μ 为曲面在公共边界处的法矢模比例因子 ($\mu > 0$). 根据 Faux 法可将式(5)化简为:

$$\frac{\partial}{\partial v} S_1(u, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2) = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial v} S_2(u, 0; \lambda_1, \lambda_2). \quad (6)$$

又因为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial v} S_1(u, \frac{\pi}{2}; \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=0}^3 (4 + 2\alpha_2) X_i(u; \alpha_1) (P_{i3} - P_{i2}), \\ \frac{\partial}{\partial v} S_2(u, 0; \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=0}^3 (4 + 2\lambda_2) X_i(u; \lambda_1) (Q_{i1} - Q_{i0}), \end{cases} \quad (7)$$

所以将式(7)代入式(6)进行化简可得 $\frac{P_{i3} - P_{i2}}{2 + \lambda_2} = \mu \frac{Q_{i1} - Q_{i0}}{2 + \alpha_2}$. 由上述可知, 条件 1) 和条件 2) 是两张双三次 Bezier 三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 满足 u 向与 u 向 G^1 拼接的充要条件. 证毕.

推论 1 1) 若两张双三次 Bezier 三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 在 u 向与 u 向上有公共的边界, 则仅改变形状参数 α_2 和 λ_2 的值仍能使两张曲面保持 G^0 拼接.

2) 若两张双三次 Bezier 三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 满足 u 向与 u 向 G^1 拼接, 则修改形状参数 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1$ 和 λ_2 可改变拼接曲面的整体形状, 修改法矢模比例因子 μ 可改变拼接曲面的局部形状.

证明 首先证明 1). 若两张双三次 Bezier 三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 在 u 向与 u 向上有公共的边界, 则由定理 3 中的条件 2) 可知两张曲面的 G^0 拼接条件仅与 α_1 和 λ_1 有关, 而与 α_2 和 λ_2 无关. 所以, 若仅改变形状参数 α_2 和 λ_2 的值仍能使两张曲面保持 G^0 拼接.

因 2) 的证明过程与 1) 的证明过程类似, 故本文在此省略.

定理 4 两张双三次 Bezier 三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 满足 v 向与 v 向 G^1 拼接的充要条件是:

1) $P_{3j} = Q_{0j}, \alpha_2 = \lambda_2 (j = 0, 1, 2, 3)$;

2) 存在实常数 $\mu > 0$, 使得 $\frac{P_{3j} - P_{2j}}{2 + \lambda_1} = \mu \frac{Q_{1j} - Q_{0j}}{2 + \alpha_1}$.

证明 若两张双三次 Bezier 三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 满足 v 向与 v 向 G^1 拼接, 则它们在 v 向需要先满足 G^0 拼接, 即两曲面要有公共的边界: $S_1(\frac{\pi}{2}, v; \alpha_1, \alpha_2) = S_2(0, v; \lambda_1, \lambda_2)$. 利用

曲线的边界性质对上式进行化简可得 $\sum_{j=0}^3 X_j(v; \alpha_2) P_{3j} = \sum_{j=0}^3 X_j(v; \lambda_2) Q_{0j}$. 再由曲面的插值性和凸包性可知, 上式可化简为 $P_{3j} = Q_{0j}, \alpha_2 = \lambda_2 (j = 0, 1, 2, 3)$. 由于当两曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 满足 G^1 拼接时, 它们在公共边界处还应有相同的切平面, 即它们在边界处的法矢方向应连续, 故有:

$$\frac{\partial}{\partial v} S_1(\frac{\pi}{2}, v; \alpha_1, \alpha_2) \times \frac{\partial}{\partial u} S_1(\frac{\pi}{2}, v; \alpha_1, \alpha_2) = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial v} S_2(0, v; \lambda_1, \lambda_2) \times \frac{\partial}{\partial u} S_2(0, v; \lambda_1, \lambda_2). \quad (8)$$

式(8)中, μ 为曲面在公共边界处的法矢模比例因子 ($\mu > 0$). 根据 Faux 法可将式(8)化简为:

$$\frac{\partial}{\partial u} S_1(\frac{\pi}{2}, v; \alpha_1, \alpha_2) = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial u} S_2(0, v; \lambda_1, \lambda_2). \quad (9)$$

又因为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} S_1(\frac{\pi}{2}, v; \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=0}^3 (4 + 2\alpha_1) X_j(v; \alpha_2) (P_{3j} - P_{2j}), \\ \frac{\partial}{\partial u} S_2(0, v; \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{j=0}^3 (4 + 2\lambda_1) X_j(v; \lambda_2) (Q_{1j} - Q_{0j}), \end{cases} \quad (10)$$

所以将式(9)代入式(10)进行化简可得 $\frac{P_{3j} - P_{2j}}{2 + \lambda_1} = \mu \frac{Q_{1j} - Q_{0j}}{2 + \alpha_1}$. 由上述可知, 条件 1) 和条件 2) 是两张双三次 Bezier 三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 满足 v 向与 v 向 G^1 拼接的充要条件. 证毕.

推论 2 1) 若两张双三次Bezier三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 在 v 向与 v 向上有公共的边界, 则仅改变形状参数 α_1 和 λ_1 的值仍能使两张曲面保持 G^0 拼接.

2) 若两张双三次Bezier三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 满足 v 向与 v 向 G^1 拼接, 则修改形状参数 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1$ 和 λ_2 可改变拼接曲面的整体形状, 修改法矢模比例因子 μ 可改变拼接曲面的局部形状.

证明 因证明过程与推论 1 的证明过程类似, 故本文在此省略.

定理 5 两张双三次Bezier三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 满足 u 向与 v 向 G^1 拼接的充要条件是:

$$1) P_{i3} = Q_{0j}, \alpha_1 = \lambda_2 (i, j = 0, 1, 2, 3);$$

$$2) \text{ 存在实常数 } \mu > 0, \text{ 使得 } \frac{P_{i3} - P_{i2}}{2 + \lambda_2} = \mu \frac{Q_{1j} - Q_{0j}}{2 + \alpha_1}.$$

证明 因证明过程与定理 1 和定理 2 的证明过程类似, 故本文在此省略.

推论 3 1) 若两张双三次Bezier三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 在 u 向与 v 向上有公共的边界, 则仅改变形状参数 α_2 和 λ_1 的值仍能使两张曲面保持 G^0 拼接.

2) 若两张双三次Bezier三角曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 满足 u 向与 v 向 G^1 拼接, 则修改形状参数 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1$ 和 λ_2 可改变拼接曲面的整体形状, 修改法矢模比例因子 μ 可改变拼接曲面的局部形状.

证明 因证明过程与推论 1 的证明过程类似, 故本文在此省略.

4 曲面拼接算法的实现

带形状参数的双三次Bezier三角曲面的拼接算法如下:

步骤 1 选定待拼接曲面的 16 个控制顶点 $P_{ij} (i, j = 0, 1, 2, 3)$ 及形状参数 α_1 和 α_2 , 并根据双三次Bezier三角曲面方程计算出第 1 张待拼接曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$;

步骤 2 计算出曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 公共边界线的 4 个控制顶点, 并根据 G^1 拼接定理确定相邻曲面的其余 12 个控制顶点 $Q_{ij} (i = 0, 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ 及形状参数 λ_1 和 λ_2 , 由此得到第 2 张待拼接曲面 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$;

步骤 3 如果待拼接曲面数大于 2, 则转至步骤 2, 直至生成所有待拼接曲面后再执行下一步; 否则, 直接执行下一步;

步骤 4 通过修改各拼接曲面片的形状参数及法矢模比例因子调整拼接曲面的形状, 以此获得满意的图形.

5 计算实例

构造碗曲面模型时, 因需要多个曲面才能拼接而成, 因此本文根据选定的 16 个控制顶点 $P_{ij} (i, j = 0, 1, 2, 3)$ 首先计算出第 1 张待拼接曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$. 16 个控制顶点分别为:

$$P_{00}(-2.18, 2.52, 0.85), P_{01}(-4.50, -1.03, 0.98), P_{02}(-3.98, -1.92, 0.95), P_{03}(-1.47, -3.27, 0.89),$$

$$P_{10}(-3.98, 0.87, 0.75), P_{11}(-2.82, 0.79, 0.41), P_{12}(-3.40, -1.54, 0.65), P_{13}(-0.79, -3.82, 0.75),$$

$$P_{20}(-2.88, 0.55, 0.40), P_{21}(-1.65, 0.06, 0.36), P_{22}(-2.01, -1.29, 0.50), P_{23}(0.34, -2.36, 0.31),$$

$$P_{30}(-0.19, 0.22, 0.26), P_{31}(-0.03, 0.24, 0.02), P_{32}(-0.88, -0.25, 0.13), P_{33}(0.37, 0.80, 0.02).$$

然后再根据曲面 $S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2)$ 与第 2 张待拼接曲面 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 的公共边界线的 4 个控制顶点 $P_{i3} (i = 0, 1, 2, 3)$ 和曲面 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 的其余 12 个控制顶点 $Q_{ij} (i = 0, 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ 计算出第

2 张待拼接曲面 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$. 曲面 $S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2)$ 的其余 12 个控制顶点分别为:

$$\begin{aligned} & Q_{01}(-1.51, -3.01, 0.95), Q_{02}(-0.52, -4.11, 0.90), Q_{03}(-1.51, -3.82, 0.88), \\ & Q_{11}(-1.46, -3.68, 0.83), Q_{12}(-0.62, -3.45, 0.71), Q_{13}(0.18, -3.09, 0.65), \\ & Q_{21}(-0.74, -1.86, 0.45), Q_{22}(-1.34, -2.86, 0.36), Q_{23}(0.91, -2.50, 0.45), \\ & Q_{31}(-1.13, -1.37, 0.12), Q_{32}(-0.93, -1.37, 0.02), Q_{33}(1.15, -0.34, 0.15). \end{aligned}$$

重复以上步骤,最终可生成如下 4 张待拼接曲面:

$$\begin{aligned} & S_1(u, v; \alpha_1, \alpha_2), S_2(u, v; \lambda_1, \lambda_2), \\ & S_3(u, v; \beta_1, \beta_2), S_4(u, v; \gamma_1, \gamma_2). \end{aligned}$$

由于上述 4 张曲面的任意 2 个相邻曲面在 u 向具有公共的边界线,所以上述 4 张曲面的任意 2 个相邻曲面均满足 u 向与 u 向的 G^0 拼接条件,且这 4 张曲面的形状参数满足 $\alpha_1 = \lambda_1 = \beta_1 = \gamma_1$, 如图 4 所示.

当相邻曲面满足 u 向与 u 向的 G^1 拼接时,由定理 3

可知 $\frac{P_{i3} - P_{i2}}{2 + \lambda_2} = \mu \frac{Q_{i1} - Q_{i0}}{2 + \alpha_2}$. 所以,通过修改法矢模比

例因子 μ 可改变拼接曲面的局部形状. 不同法矢模比例因子下的碗曲面 G^1 拼接的网格模型如图 5 所示. 由定理 3 和图 5 可得:法矢模比例因子越大,相邻公共边界线的两排控制顶点越靠近边界线处的控制顶点;法矢模比例因子越小,相邻公共边界线的两排控制顶点越远离边界线处的控制顶点.

另外,由曲面的形状可调性和定理 1 可知,修改形状参数可改变曲面的整体形状,即:当形状参数增大或减小时,曲面从整体上逐渐靠近或远离控制网格. 不同形状参数下的碗曲面 G^1 拼接的网格模型如图 6 所示.

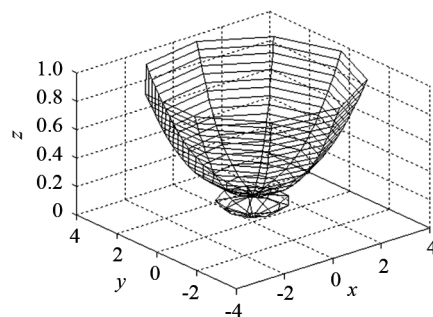
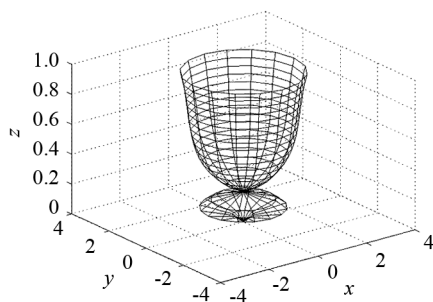
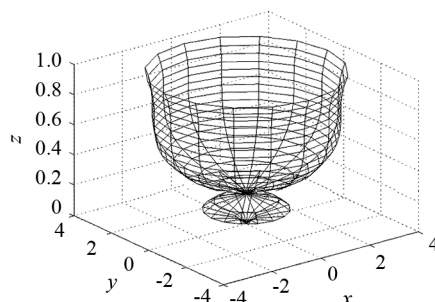


图 4 碗曲面 G^0 拼接的网格模型

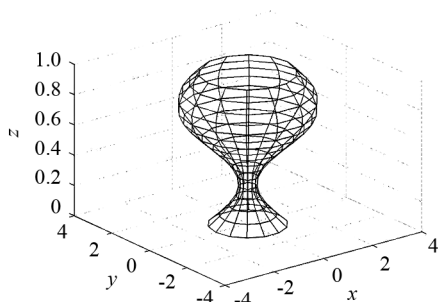


(a) $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0.8, \mu_3 = 0.8, \mu_4 = 0.7$

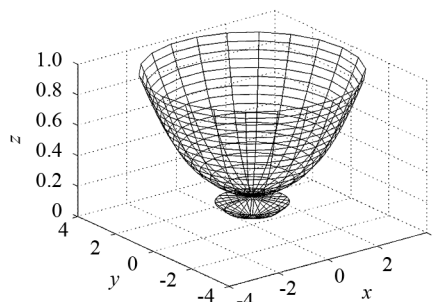


(b) $\mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.2, \mu_3 = 0.2, \mu_4 = 0.1$

图 5 不同法矢模比例因子下的碗曲面 G^1 拼接的网格模型



(a) $\alpha_2 = \gamma_2 = 1.3, \lambda_2 = \beta_2 = 1.1,$
 $\alpha_1 = \lambda_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1.2$



(b) $\alpha_2 = \beta_2 = 0.1, \lambda_2 = \gamma_2 = 0.2,$
 $\alpha_1 = \lambda_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0.15$

图 6 不同形状参数下的碗曲面 G^1 拼接的网格模型

(下转第 188 页)

- [6] CARON M, BOJANOWSKI P, JOULIN A, et al. Deep clustering for unsupervised learning of visual features[C]//Proceedings of the European Conference on Computer Vision. Munich: ECCV, 2018:132-149.
- [7] COATES A, NG A Y. Learning feature representations with K-means[J]. Neural Networks: Tricks of the Trade, 2012:561-580.
- [8] SHARIF RAZAVIAN A, AZIZPOUR H, SULLIVAN J, et al. CNN features off-the-shelf: An astounding baseline for recognition[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops. Columbus: ICCV, 2014:806-813.
- [9] BOJANOWSKI P, JOULIN A. Unsupervised learning by predicting noise [C]//International Conference on Machine Learning. Sydney: PMLR, 2017:517-526.
- [10] WENG Y, ZHANG N, YANG X. Improved density peak clustering based on information entropy for ancient character images[J]. IEEE Access, 2019,7:81691-81700.
- [11] 陈扬,王金亮,夏炜,等. 基于特征自动提取的足迹图像聚类方法[J]. 计算机科学, 2021,48(S1):255-259.
- [12] ZHAO H, CHU H, ZHANG Y, et al. Improvement of ancient shui character recognition model based on convolutional neural network[J]. IEEE Access, 2020,8:33080-33087.
- [13] WANG X, GUPTA A. Unsupervised learning of visual representations using videos[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. Santiago: ICCV, 2015:2794-2802.
- [14] 魏银华. 基于 Python 的古汉语文本聚类应用研究[D]. 大连:大连理工大学, 2018.
- [15] 李丁园,李晓杰. 基于多尺度残差卷积自编码器的图像聚类方法[J]. 吉林大学学报(信息科学版), 2022,40(4):684-687.

(上接第 148 页)

6 结束语

本文研究了带形状参数的双三次 Bezier 三角曲面的光滑拼接,该曲面不仅保留了传统 Bezier 曲面的一些优良性质(插值性、边界性质、凸包性、几何不变性等),而且在不改变控制顶点的条件下可通过形状参数调节曲面形状. 为提高 Bezier 曲面在复杂曲面造型中的构图能力,本文给出了带形状参数的双三次 Bezier 三角曲面的 u 向与 u 向、 v 向与 v 向、 u 向与 v 向间的 G^1 拼接定理及其算法. 实例计算显示,曲面的形状参数和法矢模比例因子可分别调整曲面的整体形状和局部形状,并且其几何意义明显. 即:在给定范围内,形状参数越大,曲面在整体上越靠近控制网格;法矢模比例因子越大,相邻公共边界线的两排控制顶点越靠近边界线处的控制顶点. 本文研究结果有效解决了 Bezier 曲面难以进行局部调节的缺点. 在今后的工作中,我们将对高次曲线曲面的光滑拼接进行研究.

参考文献:

- [1] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京:高等教育出版社, 2001:306-454.
- [2] 黄昊戟,王志国. B 样条曲面光滑拼接方法[J]. 机械制造与自动化, 2020,49(3):71-74.
- [3] 吴丽娟,李博, ABEYSINGHE ARACHCHIGE S S, 等. B 样条曲面拼接算法的设计与实现[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版), 2019,37(6):549-553.
- [4] 吴丽娟,张心慈,任海清,等. CNSBS 曲面拼接方法的设计与实现[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版), 2021,39(2):178-181.
- [5] 王崇. 基于近似光滑的样条曲面拼接方法研究[D]. 长春:吉林大学, 2022.
- [6] 杨军,黄倩颖. 一类广义 Bezier 曲线及其性质研究[J]. 南昌航空大学学报(自然科学版), 2020,34(4):19-24.
- [7] 师晶. 一种基于几何约束的插值曲线的参数连续性[J]. 沈阳大学学报(自然科学版), 2019,31(1):78-83.
- [8] 喻德生,徐迎博,曾接贤. 一类双参数类四次三角 Bézier 曲线及其扩展[J]. 计算机工程与应用, 2013,49(18):180-186.
- [9] 胡钢,吉晓民,白晓波. 广义带多参 Bézier-like 曲面及其拼接条件[J]. 计算机集成制造系统, 2016,22(2):501-515.