文章编号: 1004-4353(2023)02-0126-03

群作用的测度可扩性和强测度可扩性

金秋实，　董美花
（延边大学 理学院，吉林 延吉 133002）

摘要: 利用类比的方法将测度可扩和强测度可扩的概念从同胚推广到了紧致度量空间上的群作用，并证明了群作用下的测度可扩是动力性质. 另外，还证明了没有周期点的群作用 T 是测度可扩当且仅当其是强测度可扩，以及如果群作用 T 是强测度可扩的，则 $T|Per(T)$ 是可扩的.

关键词: 测度可扩；强测度可扩；不变测度；Borel 概率测度；群作用；周期点

中图分类号: O192　　　　**文献标识码:** A

Measure expansivity and strong measure expansivity for group actions

JIN Qiushi，　DONG Meihua
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: The concepts of measure expansive and strong measure expansive were extended from homeomorphism to group action on compact metric space by analogy. And it was proved that measure expansive under group action was a dynamic property. In addition, it was also proved that group action T without periodic points was measure expansive if and only if it was strong measure expansive and if group action T was strong measure expansive, then $T|Per(T)$ was expansive.

Keywords: measure expansive; strong measure expansive; invariant measure; Borel probability measure; group action; periodic point

0　引言

拓扑动力系统的可扩性是动力系统研究的核心问题之一. 可扩同胚作为动力系统中的一个重要概念，因其在遍历理论和连续统理论中有着广泛的应用，因此近年来学者们对其进行了较多研究[1-4]. 2017 年，Cordeiro 等[1]研究了强测度可扩同胚和测度可扩同胚之间的关系，并给出了若干关于测度可扩和强测度可扩的定理. 基于上述研究，本文利用类比的方法讨论了文献[1]中的部分定理在群作用背景下的扩展，并证明了其在群作用背景下仍然成立.

1　预备知识

设 G 为一个有限生成群，X 为一个度量为 d 的紧致度量空间，N 为一个正整数. 用 $Act(G,X)$ 表示

收稿日期: 2023－04－13
基金项目: 国家自然科学基金(12201541)；吉林省教育厅科学技术研究规划项目(612021001)
第一作者: 金秋实(1999—)，女，硕士研究生，研究方向为拓扑动力系统.
通信作者: 董美花(1982—)，女，博士，副教授，研究方向为拓扑动力系统.

G 在 X 上连续作用 T 的集合，即 $T:G\times X\to X$ 是一个连续映射，使得对于所有的$x\in X$ 和$g,h\in G$ 都有 $T(e,x)=x$ 和 $T(g,T(h,x))=T(gh,x)$ 成立，其中 e 是G 的单位元. 记$T(g,x)$ 为 $T_g x$，用$\beta(X)$ 表示由 X 的所有开子集生成的Borel-σ 代数[5]，并称 $\beta(X)$ 中的每一个元素为一个 Borel 集. 称在$\beta(X)$ 上的每一个 σ-可加测度为 X 上的一个 Borel 测度，并且设每一个 Borel 测度 μ 为概率测度，即 $\mu(X)=1$.

称 $T\in Act(G,X)$ 是可扩的，是指如果存在常数 $c>0$，使得对于所有的 $x\in X$，$g\in G$ 都有$\Gamma_c^T(x)=\{x\}$ 成立，其中 $\Gamma_c^T(x)=\{y\in X:d(T_g x,T_g y)\leqslant c,\forall g\in G\}$，$c$ 为 T 的可扩性常数. 称一个 Borel 概率测度 μ 是满支撑的[5]，是指对任意 $x\in X$ 和 x 的任意邻域 U_x 都有$\mu(U_x)>0$；称 μ 是非原子的，是指对任意点 $x\in X$ 都有 $\mu(\{x\})=0$ 成立；称 μ 是原子的，是指存在点 $x\in X$ 使得 $\mu(\{x\})>0$ 成立；称 μ 是不变 Borel 概率测度[6]，是指对所有的 Borel 集 B 和 $g\in G$ 都有$\mu(B)=\mu(T_g B)$ 成立；称点 $x\in X$ 是周期点[7]，是指集合$\{T_g x\mid g\in G\}$ 是有限的；记 $Per(T)$ 为所有周期点的集合；称轨道$\{T_g x\mid g\in G\}$ 是周期轨道，是指轨道上的点都是周期点 x. 设 $M(X)$ 为紧致度量空间 X 上的所有 Borel 概率测度的集合，并且记 $M^*(X)=\{\mu\in M(X)\mid\mu$ 是非原子的$\}$.

定义 1[7]　如果存在常数 $c>0$，使得对于所有的 $x\in X$，始终有 $\mu(\Gamma_c^T(x))=0$ 成立，则称测度$\mu\in M(X)$ 相对于 $T\in Act(G,X)$ 是可扩的(或者 T 是μ-可扩的). 如果任何的非原子 Borel 概率测度 $\mu\in M^*(X)$ 相对于 T 都是可扩的，则称 $T\in Act(G,X)$ 是测度可扩的. 由上述可得：对于任何 $T\in Act(G,X)$ 的可扩测度 $\mu\in M(X)$ 都是非原子的. 此外，任何非原子 Borel 概率测度 $\mu\in M^*(X)$ 相对于可扩作用 $T\in Act(G,X)$ 都是可扩的.

定义 2　设 $N\in\mathbf{N}$. 如果存在 $c>0$，使得对于所有的 $x\in X$，始终有不超过 N 个元素的集合 $\Gamma_c^T(x)$ 存在，则称 $T\in Act(G,X)$ 是 N-可扩的. 如果存在 $c>0$，使得对于所有的 $x\in X$，始终有可数集合 $\Gamma_c^T(x)$ 存在，则称 $T\in Act(G,X)$ 是可数可扩的.

定义 3　如果存在常数 $c>0$，使得对于所有的不变 Borel 概率测度 $\mu\in M(X)$ 和 $x\in X$，始终有 $\mu(\Gamma_c^T(x))=\mu(x)$ 成立，则称 $T\in Act(G,X)$ 是强测度可扩的.

定义 4　设 X 和 Y 是紧致度量空间，且 $T\in Act(G,X)$，$S\in Act(G,Y)$，则称一个有序偶对(X,T) 为一个动力系统. 如果存在一个同胚 $\Phi:X\to Y$，使得 $\Phi T_g=S_g\Phi$ 成立，则称两个动力系统(X,T) 和(Y,S) 是拓扑共轭的. 如果一个动力系统(X,T) 具有 P 性质，则任何与(X,T) 共轭的动力系统(Y,S) 也具有 P 性质，并称 P 为动力性质. 称同胚 Φ 是 T 与 S 间的共轭.

2　主要结论及其证明

定理 1　测度可扩是动力性质.

证明　设 X 和 Y 为度量d 和d' 的紧致度量空间，(X,T) 和(Y,S) 是拓扑共轭的，由此知存在一个同胚 $\Phi:X\to Y$，使得 $\Phi T_g=S_g\Phi$ 成立. 若 T 是测度可扩的，则由定义 1 可知：存在可扩常数 $c>0$，使得对于所有的 $x\in X$ 和$\mu\in M^*(X)$，始终有 $\mu(\Gamma_c^T(x))=0$ 成立，即 $x=y$. 由于 X 和 Y 是紧致的，Φ^{-1} 是连续的，所以 Φ^{-1} 是一致连续的. 由一致连续的定义可知：对于任意的 $c>0$，存在常数 $c'>0$，使得对任意的 $x,y\in Y$，只要 $d'(x,y)<c'$，即有 $d(\Phi^{-1}(x),\Phi^{-1}(y))<c$ 成立. 上述 $x,y\in Y$ 可使得对于所有的 $g\in G$，始终有 $d'(S_g x,S_g y)<c'$ 成立，即始终有 $d'(\Phi\circ T_g\circ\Phi^{-1}(x),\Phi\circ T_g\circ\Phi^{-1}(y))<c'$ 成立. 于是再根据 Φ^{-1} 是一致连续的可得 $d(T_g\circ\Phi^{-1}(x),T_g\circ\Phi^{-1}(y))<c$. 由于 T 是测度可扩的，所以 $\Phi^{-1}(x)=\Phi^{-1}(y)$，即 $x=y$. 由此表明 S 是可扩的，且对于所有的 $x\in Y$ 和 $\mu\in M^*(X)$ 始终有 $\mu(\Gamma_{c'}^S(x))=0$ 成立，故 S 是测度可扩的. 定理 1 证毕.

由于当定义 1 中的非原子 Borel 概率测度 μ 是不变非原子 Borel 概率测度时，$T\in Act(G,X)$ 仍是测度可扩的[1]，因此可得如下定理 2.

定理 2 设 $T:G\times X\rightarrow X$ 是没有周期点的连续映射,T 是测度可扩当且仅当 T 是强测度可扩.

证明 由测度可扩和强测度可扩的定义可知:如果 T 是强测度可扩的,则 T 是测度可扩;如果 T 是测度可扩的,则存在可扩常数 $c>0$,使得对于所有的 $x\in X$ 和 $\mu\in M^{*}(X)$,始终有 $\mu(\Gamma_c^T(x))=0$ 成立.如果 μ 是不变原子的 Borel 概率测度,则 μ 在周期轨道下是满支撑的.由于 T 没有周期点,故由周期点的定义可知 μ 不是在周期轨道下,这与假设矛盾.如果 μ 是不变非原子的 Borel 概率测度,则对于所有的 $x\in X$,始终有 $\mu(\Gamma_c^T(x))=0=\mu(x)$ 成立;因此,T 是强测度可扩,定理 2 证毕.

定理 3 设 $T:G\times X\rightarrow X$ 是一个连续映射,如果 T 是强测度可扩的,则 $T|Per(T)$ 是可扩的.

证明 设 T 是强测度可扩的,则存在可扩常数 $c>0$,使得对于所有的不变 Borel 概率测度 $\mu\in M(X)$ 和 $x\in X$,始终有 $\mu(\Gamma_c^T(x))=\mu(x)$ 成立.令:$x\neq y\in Per(T)$,且 $y\in\Gamma_c^T(x)$;m 为 x 的周期;n 为 y 的周期;μ 是不变 Borel 概率测度,使得对任意的 $p\in O(x)\cup O(y)$ 有 $\mu(p)=\dfrac{1}{m+n}$ 成立,其中 $O(x)$,$O(y)$ 表示周期轨道 $\{T_m x\mid m\in G\}$,$\{T_n y\mid n\in G\}$ 的集合.则由此可得:$\mu(\Gamma_c^T(x))\geqslant\mu(x)+\mu(y)=\dfrac{2}{m+n}>\dfrac{1}{m+n}=\mu(x)$.该结果与式 $\mu(\Gamma_c^T(x))=\mu(x)$ 矛盾,故 $T|Per(T)$ 是可扩的.定理 3 证毕.

基于上述研究,本文将有限生成群作用下的有关可扩的诸多性质间的关系总结如下:

$$
\begin{array}{lll}
1\text{-可扩} & \Leftrightarrow & \text{可扩} \\
\Downarrow & & \Downarrow\Uparrow(\text{当群作用 } T \text{ 没有周期点时,此方向成立}) \\
N\text{-可扩} & & \text{强测度可扩} \\
\Downarrow & & \Downarrow\Uparrow(\text{当群作用 } T \text{ 没有周期点时,此方向成立}) \\
\text{可数可扩} & & \text{测度可扩}
\end{array}
$$

注 1 由可扩定义和强测度可扩的定义可知,可扩等价于 1-可扩,且由该可扩能推出强测度可扩;由 N-可扩的定义可知,由 1-可扩能推出 N-可扩;由可数可扩的定义可知,由 N-可扩能推出可数可扩.

参考文献:

[1] CORDEIRO W, DENKER M, ZHANG X. On specification and measure expansiveness[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, 2017,37(4):1941-1957.

[2] LEE K, MORALES C A, SHIN B. On the set of expansive measures[J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2018,20(7):1750086.

[3] LEE K, MORALES C A, SAN MARTIN B. Measure N-expansive systems[J]. Journal of Differential Equations, 2019,267(4):2053-2082.

[4] MORALES C A, SIRVENT V F. Expansive Measures[M]. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[5] 井凯,尹建东.具有拓扑稳定测度的非自治动力系统的复杂性[J].南昌大学学报(理科版),2020,44(6):511-514.

[6] DONG M, KIM S, YIN J. Group actions with topologically stable measures[J]. Dynamic Systems and Applications, 2018,27(1):185-199.

[7] OPROCHA P. Chain recurrence in multidimensional time discrete dynamical systems[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, 2012,20(4):1039-1056.

[8] LEE K, NGUYEN N T, YANG Y. Topological stability and spectral decomposition for homeomorphisms on non-compact spaces[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2018,38(5):2487-2503.

[9] UTZ W R. Unstable homeomorphisms[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1950,1(6):769-774.