

文章编号: 1004-4353(2023)02-0122-04

一类广义 Kadomtsev-Petviashvili 方程 在多维空间中的基态解

安令, 陈建清, 陈佼苹
(福建师范大学 数学与统计学院, 福州 350117)

摘要: 在多维空间中研究了一类不满足 PS 条件的广义 Kadomtsev-Petviashvili 方程, 并利用无 PS 条件的山路定理证明了此类方程存在基态解. 该结果拓展了 Kadomtsev-Petviashvili 方程存在基态解的相关研究结果.

关键词: Kadomtsev-Petviashvili 方程; 基态解; 次临界增长; 山路定理

中图分类号: O175.25

文献标识码: A

Ground state solution for a class of generalized Kadomtsev-Petviashvili equation in multi-dimensional spaces

AN Ling, CHEN Jianqing, CHEN Jiaoping
(School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, China)

Abstract: A class of generalized Kadomtsev-Petviashvili equation that does not satisfy the PS condition in multi-dimensional space was studied, and the existence of the ground state solution for such equations was proved by using the Mountain-pass theorem without the PS condition. This result extends the existence of ground state solutions for the Kadomtsev-Petviashvili equation.

Keywords: Kadomtsev-Petviashvili equation; ground state solution; subcritical growth; Mountain-pass theorem

0 引言

广义 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程的一般形式为:

$$w_t + w_{xxx} + (h(w))_x = D_x^{-1} \Delta_y w, \quad (1)$$

其中 $(t, x, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{N-1}$, $N \geq 2$, $D_x^{-1} f(x, y) = \int_{-\infty}^x f(s, y) ds$, $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$, $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\Delta_y = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$,

$N^* = \frac{2(2N-1)}{2N-3}$. 由于方程(1)的一个孤立波解 w 的形式为:

$$w(t, x, y) = u(x - \tau t, y), \quad \tau > 0, \quad (2)$$

因此将式(2)代入方程(1)可得:

$$(-u_{xxx} + \tau u + D_x^{-2} \Delta_y u - h(u))_x = 0. \quad (3)$$

广义 KP 方程的孤立波因在物理学中有着广泛的应用, 因此学者们对其进行了较多研究. 例如: 文献[1]的作者证明了当 $N \geq 2$ 和自治连续函数 $f(u)$ 满足一些超线性条件时广义 KP 方程存在孤立波.

收稿日期: 2023-04-21

第一作者: 安令(1995—), 男, 硕士研究生, 研究方向为非线性泛函分析.

通信作者: 陈建清(1974—), 男, 博士, 教授, 研究方向为非线性分析及应用.

文献[2]的作者在正质量和零质量两种情况下证明了广义 KP 方程存在孤立波. 文献[3]的作者证明了一类带有非自治连续函数 $f(x, y, u) = Q(x, y) |u|^{p-2}u$ 的广义 KP 方程存在孤立波. 文献[4]的作者在多维空间中应用环绕定理证明了当广义 KP 方程中的非线性项不满足 Ambrosetti-Rabinowitz 增长条件时, 该方程存在孤立波. 文献[5]的作者证明了当 $N = 3 (1 \leq p < 4)$ 或 $N = 2 (1 \leq p < \frac{3}{4})$, $f(u) = u^p$, $p = \frac{m}{n}$ (m 和 n 互素, n 是奇数) 时, KP 方程存在局部孤立波. 受上述文献的启发, 本文在多维空间中研究一类非线性项为次临界增长的广义 KP 方程非平凡基态解的存在性. 由于该类方程中的非线性项为 $h(u) = |u|^{p-2}u + |u|^{q-2}u$ ($2 < q < p < N^*$), $\tau = 1$, 因此将其代入式(3) 可得如下方程:

$$(-u_{xx} + u + D_x^{-2} \Delta_y u - |u|^{p-2}u - |u|^{q-2}u)_x = 0. \quad (4)$$

1 主要引理和性质

在本文中, C 表示一个正常数, 符号“ \rightarrow ”和“ \rightharpoonup ”分别表示强收敛和弱收敛, $L^s(\mathbf{R}^N)$ 中的范数为 $|\cdot|_s$ ($s \in [1, \infty)$), $B_r(x, y)$ 表示以 (x, y) 为球心、 r 为半径的球 ($r > 0$), $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{N-1}$ (简记为 \mathbf{R}^N).

定义 1 在 $Y = \{g_x : g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)\}$ 中定义 u 和 v 的内积为:

$$(u, v) = \int_{\mathbf{R}^N} (u_x v_x + D_x^{-1} \nabla_y u \cdot D_x^{-1} \nabla_y v + uv) dx dy, \quad (5)$$

且定义 u 的范数为:

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbf{R}^N} (|u_x|^2 + |D_x^{-1} \nabla_y u|^2 + u^2) dx dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

其中 $\nabla_y = (\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{N-1}})$.

定义 2 映射 $u : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$, 如果存在序列 $\{u_n\} \subset Y$ 满足下列性质:

(i) 在 \mathbf{R}^N 中, u_n 几乎处处收敛到 u ;

(ii) 当 $j, k \rightarrow \infty$ 时, $\|u_j - u_k\| \rightarrow 0$,

则称由映射 u 构成的空间为 X . 若对空间 X 赋予内积(式(5)) 和范数(式(6)), 则 X 是 Hilbert 空间.

引理 1^[1] 当 $2 \leq s \leq N^*$ 时, $X \hookrightarrow L^s(\mathbf{R}^N)$ 是连续嵌入.

引理 2^[1] 当 $2 \leq s < N^*$ 时, $X \hookrightarrow L_{loc}^s(\mathbf{R}^N)$ 是紧嵌入.

为叙述方便, 对 $u \in X$, 定义泛函 $I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathbf{R}^N} |u|^p dx dy - \frac{1}{q} \int_{\mathbf{R}^N} |u|^q dx dy$, 于是由泛函的定义可知 $I \in C^1(X, \mathbf{R})$, 方程(4) 的解与泛函 $I : X \rightarrow \mathbf{R}$ 的临界点一一对应.

引理 3 泛函 $I : X \rightarrow \mathbf{R}$ 满足下述山路几何条件: (i) 存在 $\alpha, \rho > 0$, 使得当 $\|u\| = \rho$ 时, $I(u) \geq \alpha$; (ii) 存在 $e \in X$, $e \neq 0$, 使得当 $\|e\| > \rho$ 时, $I(e) < 0$.

证明 (i) 的证明. 根据引理 1 知 $I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathbf{R}^N} |u|^p dx dy - \frac{1}{q} \int_{\mathbf{R}^N} |u|^q dx dy \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - C(\frac{1}{p} \|u\|^p + \frac{1}{q} \|u\|^q)$, 因此由 $q, p > 2$ 可知, 存在 $\alpha, \rho > 0$, 使得当 $\|u\| = \rho$ 时, $I(u) \geq \alpha > 0$. 证毕.

(ii) 的证明. 由于 $2 < q < p < N^*$, 且 $I(tu) = \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \frac{t^p}{p} \int_{\mathbf{R}^N} |u|^p dx dy - \frac{t^q}{q} \int_{\mathbf{R}^N} |u|^q dx dy$, 因此有 $I(tu) \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$), 且存在 $t > 0$ 使得 $\|tu\| > \rho$, 故取 $e = tu$ 即可满足条件(ii). 证毕.

定义泛函 I 的山路水平值为 d , 并令 $d = \inf_{\eta \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I(\eta(t))$, 其中路径的集合 $\Gamma = \{\eta \in C([0, 1], X) : \eta(0) = 0, \eta(1) = e\}$. 由此根据引理 3 可知, $d \geq \alpha > 0$. 再根据山路定理可知, 泛函 I 存在 $(PS)_d$ 序列 $\{u_n\}$, 即 $I(u_n) \rightarrow d, I'(u_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

引理 4^[1] 设 $\{u_n\}$ 是 X 中的有界序列, $\sup_{(x,y) \in \mathbf{R}^N} \int_{B_r(x,y)} |u_n|^2 dx dy \rightarrow 0$, 则对任意的 $s \in (2, N^*)$, 在 $L^s(\mathbf{R}^N)$ 中有 $u_n \rightarrow 0$.

引理 5 设 $\{u_n\}$ 是泛函 $I: X \rightarrow \mathbf{R}$ 的 $(PS)_d$ 序列, 则 $\{u_n\}$ 在空间 X 中有界.

证明 因为 $\{u_n\}$ 是 $(PS)_d$ 序列, 所以有 $I(u_n) \rightarrow d, I'(u_n) \rightarrow 0$. 又因为 $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} > 0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$, 所以有 $d + 1 + o(1) \|u_n\| \geq I(u_n) - \frac{1}{q} I'(u_n) u_n = (\frac{1}{2} - \frac{1}{q}) \|u_n\|^2 + (\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) \int_{\mathbf{R}^N} |u|^p dx dy \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{q}) \|u_n\|^2$. 由上式可知, $\{u_n\}$ 在 X 中有界. 证毕.

性质 1 设 $\{u_n\}$ 是泛函 I 的 $(PS)_d$ 序列, 并且在 X 中 $u_n \rightarrow 0$, 则下列情形之一必发生:

(i) 在 X 中 $u_n \rightarrow 0$;

(ii) 存在 $r, \beta > 0$ 和序列 $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathbf{R}^N$, 使得 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_n, y_n)} |u_n|^2 dx dy \geq \beta > 0$.

证明 假设(ii)不成立, 则必有 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{(x,y) \in \mathbf{R}^N} \int_{B_r(x,y)} |u_n|^2 dx dy = 0$, 于是由引理 4 知在 $L^s(\mathbf{R}^N)$ 中 $u_n \rightarrow 0$ ($2 < s < N^*$). 又因为 $I'(u_n)u_n = \|u_n^2\| - \int_{\mathbf{R}^N} |u_n|^p dx dy - \int_{\mathbf{R}^N} |u_n|^q dx dy \rightarrow 0$, 所以 $\|u_n\|^2 \rightarrow 0$. 因此, 在 X 中 $u_n \rightarrow 0$. 证毕.

为了证明基态解的存在, 本文定义泛函 I 所对应的 Nehair 流形为 $M = \{u \in X, u \neq 0; I'(u)u = 0\}$, 其中 $I'(u)\phi = (u, \phi) + \int_{\mathbf{R}^N} h(u)\phi dx dy$, $h(u) = |u|^{p-2}u + |u|^{q-2}u$.

引理 6 对于每个 $u \in X \setminus \{0\}$, 存在唯一的 t_0 使得 $t_0 u \in M$, 并且 $I(t_0 u) = \max_{t \geq 0} I(tu)$.

证明 已知 $I(tu) = \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \frac{t^p}{p} \int_{\mathbf{R}^N} |u|^p dx dy - \frac{t^q}{q} \int_{\mathbf{R}^N} |u|^q dx dy$. 令 $g(t) = I(tu)$ ($t \geq 0, u$ 是固定的), 则对 $g(t)$ 关于 t 求导可得 $g'(t) = t \|u\|^2 - \int_{\mathbf{R}^N} (t^{p-1} |u|^p + t^{q-1} |u|^q) dx dy$. 再由 $2 < q < p < N^*$ 可知, 存在唯一的 t_0 使得 $g'(t_0) = 0$ ($t_0 > 0$). 若 t_0 不唯一, 则存在 t_{01} 和 t_{02} , 使得 $g'(t_{01}) = 0, g'(t_{02}) = 0$. 于是根据 $g'(t) = 0$ 有 $\|u\|^2 = \int_{\mathbf{R}^N} (t^{p-2} |u|^p + t^{q-2} |u|^q) dx dy$ ($t = t_{01}, t_{02}$). 令 $k(t) = \int_{\mathbf{R}^N} (t^{p-2} |u|^p + t^{q-2} |u|^q) dx dy - \|u\|^2, t \geq 0$, 则根据 $p-2 > 0$ 和 $q-2 > 0$ 知 $k(t)$ 是关于 t 的增函数; 因此 $t_{01} = t_{02}$, 故 t_0 是唯一的. 另外, 因为 $g(t)$ 在 $(0, t_0)$ 上是增函数, 在 (t_0, ∞) 上是减函数, 所以 $I(t_0 u) = \max_{t \geq 0} I(tu)$. 再由流形 M 的定义知, $t_0 u \in M$. 证毕.

引理 7 在定理 1 的假设下, 令 $d_1 = \inf_M I(u), d_2 = \inf_{u \in X, u \neq 0} \max_{t \geq 0} I(tu)$, 则 $d_1 = d_2 = d$.

由类似于文献[5]中引理 4.2 的证明即可得到引理 7 的证明(其中引理 6 的结论对于该证明是不可缺少的), 故本文在此省略引理 7 的证明.

2 主要结果及其证明

定理 1 当 $N \geq 2, 2 < q < p < N^*$ 时, 方程(4)至少有一个非平凡基态解.

证明 因为 $\{u_n\}$ 是 $(PS)_d$ 序列, 所以由引理 5 知 $\{u_n\}$ 在 X 中是有界的. 取 $\{u_n\}$ 的一个子列(仍记为 $\{u_n\}$), 则根据序列 $\{u_n\}$ 的有界性和引理 2 有: 在 X 中 $u_n \rightharpoonup u$; 在 $L^s_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N)$ 中 $u_n \rightarrow u, 2 < s < N^*$; 在 \mathbf{R}^N 中 u_n 几乎处处收敛到 u .

假设 $u = 0$, 即 $u_n \rightarrow 0$. 根据性质 1 可知, 若在 X 中 $u \rightarrow 0$, 则有 $d = 0$ (矛盾), 因此 $u \rightarrow 0$ 不成立. 故

存在 $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathbf{R}^N$ 及 $r, \beta > 0$, 使得 $\int_{B_r(x_n, y_n)} |u_n|^2 dx dy \geq \beta > 0$. 令 $v_n(x, y) = u_n(x + x_n, y + y_n)$, 则由 $\{u_n\}$ 在 X 中有界知 $\{v_n\}$ 在 X 中也是有界的, 且有 $\int_{B_r(0,0)} |v_n(x, y)|^2 dx dy \geq \beta > 0$. 对于 $\{v_n\}$ (如有必要则取其子列), 由 $\{v_n\}$ 的有界性可知存在 $v \in X$ 使得 $v_n \rightharpoonup v$. 再根据引理 2 知, 在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N)$ 中有 $v_n \rightarrow v$, 并且 $\int_{B_r(0,0)} |v(x, y)|^2 dx dy \geq \beta > 0$, 因此 $v \neq 0$. 同理, 假设 $u \neq 0$ 时, 显然有 $v \neq 0$.

另外, 因为 $h(v_n) = |v_n|^{p-2}v_n + |v_n|^{q-2}v_n$, 所以对任意的 $\phi \in X$ 有

$$\int_{\mathbf{R}^N} (h(v_n) - h(v))\phi dx dy = \int_{B_r(x, y)} (h(v_n) - h(v))\phi dx dy + \int_{\mathbf{R}^N \setminus B_r(x, y)} (h(v_n) - h(v))\phi dx dy.$$

于是根据 $\{v_n\}$ 在 X 中有界以及引理 1 知, 存在 $m > 0$ 使得 $\int_{\mathbf{R}^N} (h(v_n) - h(v))\phi dx dy \leq m$, 因此

$\forall \epsilon > 0$, 且存在 $r = r(\epsilon) > 0$, 使得 $\int_{\mathbf{R}^N \setminus B_r(x, y)} (h(v_n) - h(v))\phi dx dy < \epsilon$. 此外, 对于

$$\int_{B_r(x, y)} (h(v_n) - h(v))\phi dx dy = \int_{B_r(x, y)} (|v_n|^{p-2}v_n + |v_n|^{q-2}v_n - |v|^{p-2}v - |v|^{q-2}v)\phi dx dy,$$

由引理 2 以及在 $L^s_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N)$ 中的 $v_n \rightarrow v$ 可得:

$$\int_{B_r(x, y)} (|v_n|^{p-2}v_n - |v|^{p-2}v)\phi dx dy < \epsilon, \quad \int_{B_r(x, y)} (|v_n|^{q-2}v_n - |v|^{q-2}v)\phi dx dy < \epsilon.$$

由上式可得 $\int_{B_r(x, y)} (h(v_n) - h(v))\phi dx dy \rightarrow 0$, 进而有:

$$\int_{\mathbf{R}^N} h(v_n)\phi dx dy \rightarrow \int_{\mathbf{R}^N} h(v)\phi dx dy, \quad \int_{\mathbf{R}^N} (|v_n|^p + |v_n|^q) dx dy \rightarrow \int_{\mathbf{R}^N} (|v|^p + |v|^q) dx dy.$$

综上可得 $(I'(v), \phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I'(v_n), \phi) = 0$, 即 $I'(v) = 0$. 再根据 $d_1 = d_2 = d$ 以及基态解的定义可知, v 是方程(4)的非平凡基态解. 证毕.

参考文献:

- [1] XUAN B J. Nontrivial solitary waves of GKP equation in multi-dimensional spaces[J]. Revista Colombiana de Matematicas, 2003, 37(1): 11-23.
- [2] ALVES C O, MIYAGAKI O H, POMPONIO A. Solitary waves for a class of generalized Kadomtsev-Petviashvili equation in \mathbf{R}^N with positive and zero mass[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 477(1): 523-535.
- [3] LIANG Z P, SU J B. Existence of solitary waves to a generalized Kadomtsev Petviashvili equation[J]. Acta Mathematica Scientia, 2012, 32(3): 1149-1156.
- [4] HE X M, ZOU W M. Nontrivial solitary waves to the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 197(2): 858-863.
- [5] De BOUARD A, SAUT J C. Solitary waves of generalized Kadomtsev-Petviashvili equations[J]. Annales de L'Institut Henri Poincaré C: Analyse Non Linéaire, 1997, 14(2): 211-236.
- [6] ALVES C O, SOUTO M A, MONTENEGRO M. Existence of a ground state solution for a nonlinear scalar field equation with critical growth[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2012, 43(3): 537-554.
- [7] WILLEM M. Minimax Theorems[M]. Boston: Birkhäuser, 1996: 71-73.
- [8] ALVES C O, MIYAGAKI O H. Existence, regularity, and concentration phenomenon of nontrivial solitary waves for a class of generalized variable coefficient Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 2017, 58(8): 081503.
- [9] ZOU W M. Solitary waves of the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15(1): 35-39.
- [10] AMBROSETTI A, RABINOWITZ P H. Dual variational methods in critical point theory and applications[J]. Journal of Functional Analysis, 1973, 14(4): 349-381.