**文章编号**: 1004-4353(2023)02-0116-07

# 具有常数避难所和恐惧效应的 Holling Ⅱ 类功能性反应捕食-食饵系统的定性分析

王逸勤[1], 施春玲[2]

(1. 福建教育学院 数学教育研究所, 福州 350001; 2. 福州大学 至诚学院, 福州 350001)

**摘要**: 为了研究恐惧效应对具有避难所的功能性反应捕食-食饵系统的影响,建立了一类具有常数避难所和恐惧效应的Ⅱ类功能性反应捕食-食饵系统. 首先,利用 Lyapunov 稳定性判别法研究了系统平衡点的局部稳定性,并利用 Bendixson-Dulac 定理得到了系统正解的全局稳定性;其次,利用 Poincare-Bendixson 定理获得了系统极限环的存在性;最后,对恐惧效应对系统稳定性的影响以及恐惧效应和避难所对种群密度的影响进行了分析,结果显示适当的恐惧水平和避难所有利于食饵和捕食者共存.

**关键词**: 捕食-食饵系统; 避难所; 恐惧效应; 极限环; 全局稳定性; 平衡点

**中图分类号**: O175 **文献标识码**: A

# Qualitative analysis of a predator-prey system with Holling type Ⅱ functional response incorporating fear effct and a constant prey refuge

WANG Yiqin[1], SHI Chunling[2]

(1. *Institute of Mathematics Education*, *Fujian Institute of Education*, *Fuzhou* 350001, *China*; 2. *Zhicheng College*, *Fuzhou University*, *Fuzhou* 350001, *China*)

**Abstract**: In order to study the effect of fear on the predator-prey system with functional incorporating refuge, a new predator-prey system with Holling type Ⅱ functional response incorporating fear effct and a constant prey refuge was established. Firstly, by using Lyapunov stability discriminance, the conditions of the instability and stability properties to the equilibrias were obtained, and the global stability of the positive solution of the system were given with Bendixson-Dulac theorem. Secondly, the existence to limit cycles for the system was found with Poincare-Bendixson theorem. Finally, the influence of fear effect on the stability of the system and the influence of fear effect and prey refuge on the pupulation density were analyzed, it showed that a certain level of fear and shelter were beneficial to the coexistence of prey and predator.

**Keywords**: predator-prey system; refuge; fear effect; limit cycle; global stability; equilibrium point

## 0 引言

近年来,具有避难所的功能性反应捕食-食饵系统受到学者们的关注. 例如: Chen 等[1]提出了如下

**收稿日期**: 2023-03-27

**基金项目**: 福建省自然科学基金(2019J01783);福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JAT191174);福建省高校新世纪优秀人才支持计划(ZJ1891)

**第一作者**: 王逸勤(1978—),女,硕士,副教授,研究方向为微分方程及其应用.

**通信作者**: 施春玲(1979—),女,硕士,副教授,研究方向为微分方程及其应用.

具有常数避难所的 HollingⅡ类功能性反应捕食-食饵系统（式(1)），并研究了该系统的平衡点稳定性和极限环的存在性，以及避难所对系统种群密度的影响.

$$\begin{cases}\dot{x}=\alpha x\left(1-\dfrac{x}{k}\right)-\dfrac{\beta(x-m)y}{1+a(x-m)},\\ \dot{y}=-dy+\dfrac{c\beta(x-m)y}{1+a(x-m)}.\end{cases}\tag{1}$$

2016 年，Wang 等[2] 首次将恐惧效应加入到如下捕食-食饵系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=ur_0 f(k,v)-du-au^2-g(u)v,\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v(-m+cg(u)).\end{cases}\tag{2}$$

其中 $f(k,v)=1/(1+kv)$ 为恐惧因子. Wang 等研究表明，适当的恐惧可以提高系统的稳定性. 在 Wang 等工作的基础上，许多学者又进一步研究了具有恐惧效应的捕食-食饵系统，如文献[3-8]. 基于上述研究，本文在系统(1) 中加入文献[2] 提出的恐惧因子 $f(K,y)=1/(1+Ky)$，并由此提出了如下具有常数避难所和恐惧效应的 HollingⅡ 类功能性反应捕食-食饵系统：

$$\begin{cases}\dot{x}=x(1-x)\dfrac{1}{1+Ky}-\dfrac{\beta(x-m)y}{1+a(x-m)}\triangleq F_1(x,y),\\ \dot{y}=-dy+\dfrac{c\beta(x-m)y}{1+a(x-m)}\triangleq F_2(x,y).\end{cases}\tag{3}$$

其中：$x$ 为食饵，$y$ 为捕食者，$\beta$ 为食饵捕捉率，$c$ 为食饵转化率，$a$ 为食饵的内在生长率，$d$ 为捕食者的自然死亡率，$m$ 为食饵避难所，$\beta x/(1+ax)$ 为捕食者的功能反应(即功能 Ⅱ 类反应).

## 1　平衡点的存在性及有界性

基于现实的生物意义，本文在 $\Omega=\{(x,y)\mid x>m,y>0\}$ 及 $\overline{\Omega}$ 上研究系统(3).

**引理 1**　对所有的 $t\geqslant 0$，具有初值 $x(0)>m$ 和 $y(0)>0$ 的系统(3) 的解是正的，且是有界的.

**证明**　对系统(3) 两边进行积分可得：

$$\begin{cases}x(t)=x(0)\exp\left(\displaystyle\int_0^t\left[(1-x)\frac{1}{1+Ky}-\frac{\beta(x-m)y}{x(1+a(x-m))}\right]\mathrm{d}s\right),\\ y(t)=y(0)\exp\left(\displaystyle\int_0^t\left(-d+\frac{c\beta(x-m)}{1+a(x-m)}\right)\mathrm{d}s\right).\end{cases}\tag{4}$$

由此可知 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $\Omega=\{(x,y)\mid x>m,y>0\}$ 内是正的. 下面证明系统(3) 解的有界性. 由系统(3) 的第 1 个式子可得 $\dot{x}=x(1-x)\dfrac{1}{1+Ky}-\dfrac{\beta(x-m)y}{1+a(x-m)}\leqslant x(1-x)$，故 $\limsup\limits_{t\to\infty}x(t)=1$. 由此知存在一个正数 $N$ 且满足：对于任意的 $t\geqslant 0$，有 $x(t)\leqslant N$. 由此及系统(3) 的第 2 个式子可得 $\dot{y}=-dy+\dfrac{c\beta(x-m)y}{1+a(x-m)}\leqslant c\beta(N-m)y$，即 $\dot{y}/y\leqslant c\beta(N-m)$. 对上式两边进行定积分可得 $y(t)\leqslant y(0)\exp(c\beta(N-m)t)$，证毕.

由微分方程组平衡点的定义可知，系统(3) 的平衡点可由

$$\begin{cases}x(1-x)\dfrac{1}{1+Ky}-\dfrac{\beta(x-m)y}{1+a(x-m)}=0,\\ -dy+\dfrac{c\beta(x-m)y}{1+a(x-m)}=0\end{cases}\tag{5}$$

给出. 求解方程组(5) 可得，系统(3) 有 2 个边界平衡点 $E_0(0,0)$ 和 $E_1(1,0)$. 由式(5) 的第 2 个方程可知，若 $c\beta-ad>0$，则有 $x^*=d/(c\beta-ad)+m$. 若 $c\beta-ad<0$，则由系统(3) 的第 2 个方程知 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$.

由上述可知,证明系统(3)的正平衡点的稳定性只考虑 $c\beta-ad>0$ 的情况即可.由式(5)的第 1 个方程可知,$y^*$ 满足如下方程:

$$K\beta(x^*-m)y^2+\beta(x^*-m)y-(1+a(x^*-m))x^*(1-x^*)=0. \tag{6}$$

若 $x^*<1$,即 $0<m<1-\dfrac{1}{c\beta-ad}$,则由式(6)的判别式 $\Delta_1=\beta^2(x^*-m)^2+4K\beta(x^*-m)x^*(1-x^*)\cdot(1+a(x^*-m))\geqslant 0$ 可知,式(6)存在唯一的正解:$y^*=-\dfrac{1}{2K}+\dfrac{\sqrt{\Delta_1}}{2K\beta(x^*-m)}$.因此当 $0<m<1-\dfrac{1}{c\beta-ad}$ 时,系统(3)有唯一正平衡点 $E^*(x^*,y^*)$.

## 2 平衡点的稳定性

**定理 1** 当 $0<m<\dfrac{1}{a}$ 时,$E_0(0,0)$ 是一个鞍点.

**证明** 系统(3)的雅可比矩阵为:

$$\boldsymbol{J}(x,y)=\begin{pmatrix}J_{11}(x,y) & J_{12}(x,y)\\ J_{21}(x,y) & J_{22}(x,y)\end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中 $J_{11}(x,y)=\dfrac{1}{1+Ky}(1-2x)-\dfrac{\beta y}{(1+a(x-m))^2}$, $J_{21}(x,y)=\dfrac{c\beta y}{(1+a(x-m))^2}$, $J_{12}(x,y)=-\dfrac{1}{(1+Ky)^2}x(1-x)-\dfrac{\beta(x-m)}{1+a(x-m)}$, $J_{22}(x,y)=-d+\dfrac{c\beta(x-m)}{1+a(x-m)}$.由式(7)可知,系统(3)在 $E_0(0,0)$ 处的雅可比矩阵为 $\boldsymbol{J}(E_0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{m\beta}{1-am} & -d-\dfrac{c\beta m}{1-am}\end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{J}(E_0)$ 的 2 个特征值分别为 $\lambda_1=1>0$, $\lambda_2=-d-\dfrac{c\beta m}{1-am}$.当 $\lambda_2<0$,即 $0<m<\dfrac{1}{a}$ 时,由 Lyapunov 稳定性判别法知 $E_0(0,0)$ 是一个鞍点.

**定理 2** 当 $0<m<1-\dfrac{1}{c\beta-ad}$ 时,$E_1(1,0)$ 是鞍点;当 $m>1-\dfrac{1}{c\beta-ad}$ 时,$E_1(1,0)$ 是稳定结点.

**证明** 由式(7)知,系统(3)在 $E_1(1,0)$ 处的雅可比矩阵为:

$$\boldsymbol{J}(E_1)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -\dfrac{\beta(1-m)}{1+a(1-m)} & -d+\dfrac{c\beta(1-m)}{1+a(1-m)}\end{bmatrix},$$

且 $\boldsymbol{J}(E_1)$ 的 2 个特征值分别为 $\lambda_3=-1<0$, $\lambda_4=-d+\dfrac{c\beta(1-m)}{1+a(1-m)}$.当 $\lambda_4>0$,即 $0<m<1-\dfrac{1}{c\beta-ad}$ 时,由 Lyapunov 稳定性判别法可知 $E_1(1,0)$ 是鞍点;当 $\lambda_4<0$,即 $m>1-\dfrac{1}{c\beta-ad}$ 时,由 Lyapunov 稳定性判别法可知 $E_1(1,0)$ 是稳定的结点.

**定理 3** 记 $m_1=\dfrac{(c\beta-ad)^2+2ad^2-\sqrt{(c\beta-ad)^4+4d^2}}{2(c\beta-ad)^2}$,则:

① 当 $a(c\beta-ad)^2+a^2\leqslant 1$ 且 $0<m<1-\dfrac{1}{c\beta-ad}$ 时,$E^*(x^*,y^*)$ 是局部渐近稳定的;

② 当 $a(c\beta-ad)^2+a^2\geqslant 1$ 且 $0<m<m_1$ 时,$E^*$ 是不稳定的;当 $m_1<m<1-\dfrac{1}{c\beta-ad}$ 时,$E^*$ 是局部渐近稳定的.

**证明**　由式(7)知,系统(3)在 $E^*(x^*,y^*)$ 处的雅可比矩阵为:

$$\boldsymbol{J}(E^*)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1+Ky^*}(1-2x^*)-\dfrac{\beta y^*}{(1+a(x^*-m))^2} & -\dfrac{1}{(1+Ky^*)^2}x^*(1-x^*)-\dfrac{\beta(x^*-m)}{1+a(x^*-m)}\\ \dfrac{c\beta y^*}{(1+a(x^*-m))^2} & -d+\dfrac{c\beta(x^*-m)}{1+a(x^*-m)}\end{bmatrix},$$

其中 $J_{22}(x^*,y^*)=0$,$J_{12}(x^*,y^*)<0$,$J_{21}(x^*,y^*)>0$,$\det\boldsymbol{J}(E^*)=-J_{12}(x^*,y^*)J_{21}(x^*,y^*)>0$. 于是再由矩阵迹的性质可知 $\mathrm{tr}\boldsymbol{J}(E^*)=J_{11}(x^*,y^*)$,$J_{11}(x^*,y^*)<0$ 相当于$(c\beta-ad)^2x^{*2}-(2dc\beta+(c\beta-ad)^2)x^*+dc\beta<0$,即:

$$(c\beta-ad)^3m^2-((c\beta-ad)^3+2ad^2(c\beta-ad))m-2c\beta d^2+(ad^2+d^2)(c\beta-ad)<0.$$

为了研究上式成立所需满足的条件,设函数 $R(m)=(c\beta-ad)^3m^2-((c\beta-ad)^3+2ad^2(c\beta-ad))m-2c\beta d^2+(ad^2+d^2)(c\beta-ad)$,于是由方程 $R(m)=0$ 的判别式 $\Delta_2=(c\beta-ad)^6+4ad^2(c\beta-ad)^4+4a^2d^4(c\beta-ad)^2-4(c\beta-ad)^3[-2c\beta d^2+(ad^2+d^2)(c\beta-ad)]=(c\beta-ad)^2((c\beta-ad)^4+4d^2)>0$ 可知,方程 $R(m)=0$ 有 2 个根($m_1$ 和 $m_2$),其中

$$m_2=\frac{(c\beta-ad)^3+2ad^2(c\beta-ad)+\sqrt{\Delta_2}}{2(c\beta-ad)^3}\geqslant 1+\frac{ad^2}{(c\beta-ad)^2}>1-\frac{d}{c\beta-ad}.$$

下面讨论 $E^*$ 的稳定性.

当 $m_1\leqslant 0$ 时,即 $a(c\beta-ad)^2+a^2\leqslant 1$ 时,则由函数 $R(m)$ 图象可知对所有的 $m_1<m<m_2$ 有 $R(m)<0$. 因此,当 $0<m<1-\dfrac{d}{c\beta-ad}$ 时有 $\mathrm{tr}(E^*)<0$,由此可知此时 $E^*$ 是局部渐近稳定的.

当 $m_1>0$ 时,即 $a(c\beta-ad)^2+a^2\geqslant 1$ 时,则由函数 $R(m)$ 图象可知对所有的 $0<m<m_1$ 有 $R(m)>0$. 因此,当 $0<m<m_1$ 时有 $\mathrm{tr}(E^*)>0$,由此可知此时 $E^*$ 是不稳定的. 由于对所有的 $m_1<m<m_2$ 有 $R(m)<0$,因此当 $m_1<m<1-\dfrac{d}{c\beta-ad}$ 时有 $\mathrm{tr}(E^*)<0$,由此可知此时 $E^*$ 是局部渐近稳定的.

**引理 2**(Bendixson-Dulac 定理[9])　设 $F$、$G$、$\varphi$ 为单连通区域 $U$ 上的二元函数,且函数 $\dfrac{\partial(\varphi F)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\varphi G)}{\partial y}$ 在 $U$ 中的零点集测度为 0,则微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x,y)$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=G(x,y)$ 没有周期解,其中$(x,y)\in U$.

**定理 4**　当 $1-\dfrac{d}{c\beta-ad}>\dfrac{1}{a}$ 且 $m>1-\dfrac{d}{c\beta-ad}$ 时,$E_1(1,0)$ 是全局渐近稳定的.

**证明**　由定理 1—3 可知:当 $1-\dfrac{d}{c\beta-ad}>\dfrac{1}{a}$ 且 $m>1-\dfrac{d}{c\beta-ad}$ 时,$E_1(1,0)$ 是系统(3)的唯一平衡点,且该平衡点是局部渐近稳定的. 如果系统(3)在 $\Omega$ 内存在 1 个闭轨,则由闭轨性质可知,在闭轨内无法总存在 1 个平衡点. 因此,当 $1-\dfrac{d}{c\beta-ad}>\dfrac{1}{a}$ 且 $m>1-\dfrac{d}{c\beta-ad}$ 时,系统(3)在 $\Omega$ 内不存在闭轨. 于是再由系统(3)的有界性可知,稳定结点 $E_1(1,0)$ 是全局渐近稳定的.

**定理 5**　记 $m_3=\dfrac{-2-7a-\sqrt{(2+7a)^2+48(1-a)^2}}{16a}$,$m_4=\dfrac{-2-7a+\sqrt{(2+7a)^2+48(1-a)^2}}{16a}$,并假设:

① $a(c\beta-ad)^2+a^2\leqslant 1$,$0<m<\min\{1-\dfrac{d}{c\beta-ad},\dfrac{1}{a}-1\}$;

② $a(c\beta-ad)^2+a^2\leqslant 1$,$\max\{\dfrac{1}{a}-1,m_3\}<m<\min\{1-\dfrac{d}{c\beta-ad},m_4\}$;

③ $a(c\beta-ad)^2+a^2\geqslant 1$，$m_1<m<\min\{1-\dfrac{d}{c\beta-ad},\dfrac{1}{a}-1\}$；

④ $a(c\beta-ad)^2+a^2\geqslant 1$，$\max\{\dfrac{1}{a}-1,m_1,m_3\}<m<\min\{1-\dfrac{d}{c\beta-ad},m_4\}$.

则当满足条件 ①—④ 中的任一条件时，$E^*(x^*,y^*)$ 是全局渐近稳定的.

**证明** 由定理3知，系统(3)的唯一正平衡点 $E^*$ 是局部渐近稳定的.由此可知要证明 $E^*$ 是全局渐近稳定的，只需证明系统(3)在第一象限内没有周期解即可.为此，本文取 Dulac 函数 $R(x,y)=(1+a(x-m))(x-m)^{-1}y^{-1}$.由此对 $\dfrac{\partial(RF_1)}{\partial x}+\dfrac{\partial(RF_2)}{\partial y}$ 进行计算可得：

$$\frac{\partial(RF_1)}{\partial x}+\frac{\partial(RF_2)}{\partial y}=-y^{-1}(1+Ky)^{-1}(x-m)^{-2}[2ax^3-(-1+a+4am)x^2-(1-a-am)2mx+m-am^2]\triangleq-y^{-1}(1+Ky)^{-1}(x-m)^{-2}\varphi(x).\tag{8}$$

由上式可知 $\varphi'(x)=(2x-2m)(3ax+1-a-am)=0$ 有2个根，分别为 $x_1=m>0$，$x_2=-(1-a-am)/(3a)$.下面对 $x_2$ 进行讨论.

1) 当 $x_2\leqslant 0$(即 $m\leqslant 1/a-1$)时，$\varphi'(x)\geqslant 0\ (x\geqslant m)$，因此 $\varphi(x)$ 在 $x\geqslant m$ 上是单调递增的.因为 $0<m<1-\dfrac{d}{c\beta-ad}<1$，所以 $\varphi(m)=-m^2+m>0$，故 $\varphi(x)\geqslant\varphi(m)>0$，$\dfrac{\partial(RF_1)}{\partial x}+\dfrac{\partial(RF_2)}{\partial y}<0$.于是再由引理2可知，系统(3)在 $\Omega$ 内不存在周期解.

2) 当 $x_2\geqslant 0$(即 $m>1/a-1$)时，由 $\varphi'(1-am)=(2-2m)(a+1)>0$ 可得 $m<x_2<1-am$.当 $m<x<x_2$ 时，$\varphi'(x)<0$，故 $\varphi(x)$ 在 $m<x<x_2$ 上单调递减.当 $x\geqslant x_2$ 时，$\varphi'(x)>0$，故 $\varphi(x)$ 在 $x\geqslant x_2$ 上是单调递增的；因此 $\varphi(x_2)$ 是 $\Omega$ 内最小值.由此可知，要证明 $\varphi(x)>0$，只需证明 $\varphi(x_2)>0$ 即可.下面证明 $\varphi(x_2)>0$.由式(8)可知：

$$\varphi(x_2)=2ax_2^3-(-1+a+4ma)x_2^2-(1-a-ma)2mx_2+m-am^2>\frac{1-a-am}{3a}(8a^2m^2+(2a+7a^2)m-(1-a)^2).$$

设函数 $\omega(m)=8a^2m^2+(2a+7a^2)m-(1-a)^2$，于是由方程 $\omega(m)=0$ 的判别式 $\Delta_3=(2a+7a^2)^2+48a^2(1-a^2)>0$ 可知，方程 $\omega(m)=0$ 有2个正根($m_3$ 和 $m_4$).当 $m_3<m<m_4$ 时，由函数的 $\omega(m)$ 图象可知，$\omega(m)<0$；又因为 $1-a<am$，所以 $1-a-am/(3a)<0$，故 $\varphi(x)\geqslant\varphi(x_2)>0$.进而可得对所有的 $m_3<m<m_4$，有 $\dfrac{\partial(RF_1)}{\partial x}+\dfrac{\partial(RF_2)}{\partial y}<0$.于是再由引理2可知，系统(3)在 $\Omega$ 内不存在周期解.

综上可知，当满足定理5中的任一条件时，$E^*$ 是局部渐近稳定的，且系统(3)在 $\Omega$ 内不存在周期解，即系统(3)在第一象限内没有闭轨.由此再由系统(3)的有界性可知，$E^*$ 是全局渐近稳定的.证毕.

## 3 系统(3)极限环的存在性

**定理6** 当 $a(c\beta-ad)^2+a^2\geqslant 1$ 且 $0<m<m_1$ 时，系统(3)存在一个极限环.

**证明** 由定理3知，当 $a(c\beta-ad)^2+a^2\geqslant 1$ 且 $0<m<m_1$ 时，$E^*$ 不稳定.由 $0<m<1-\dfrac{d}{c\beta-ad}$ 可得 $x_1=1>\dfrac{d}{c\beta-ad}+m=x^*$.设 $L_1:x-x_1=0$，则由该式及系统(3)可知，对 $y>0$，有 $\left.\dfrac{\mathrm{d}L_1}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}=\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{x=x_1}=-\dfrac{\beta(1-m)y}{1+a(1-m)}<0$.设 $L_2:y=\tilde{y}$，则由该式及系统(3)可知，对 $0<x<x^*$，有 $\left.\dfrac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}=$

$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{y=\tilde{y}}=-d\tilde{y}+\frac{c\beta(x-m)\tilde{y}}{1+a(1-m)}<0$. 设 $L_3$：$2(x_1-x^*)(y-\tilde{y})+\tilde{y}(x-x^*)=0$，则由该式及系统(3)可知，对 $0<x<x^*$，$y>0$，有 $\left.\frac{\mathrm{d}L_3}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}=2(x_1-x^*)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\tilde{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<\frac{f(\tilde{y})}{(1+a(x-m))(1+Ky)}$，其中 $f(\tilde{y})=-\frac{K\beta}{4}(x-m)\tilde{y}^4-\frac{\beta}{4}(x-m)\tilde{y}^4-\frac{\beta}{4}(x-m)\tilde{y}^3+(2K(x_1-x^*)(\beta-ad)(x-m)-2dk(x_1-x^*)+x(1-x)(1+a(x-m)))\tilde{y}^2+2(x_1-x^*)(c\beta-ad)(x-m)-2d(x-x^*)$. 因为 $-\frac{K\beta}{4}(x-m)<0$，所以对充分大的 $\tilde{y}$ 有 $\frac{\mathrm{d}L_3}{\mathrm{d}t}<0$. 由此根据 Poincare-Bendixson 定理[10] 可知，系统(3)存在一个极限环.

## 4　恐惧效应和避难所对种群密度的影响

### 4.1　恐惧效应对系统(3)稳定性的影响

由定理 5 可知，系统(3)的稳定性与恐惧程度 $K$ 无关，即恐惧效应不影响系统(3)的稳定性.

### 4.2　恐惧效应对捕食者种群密度的影响

将 $y^*$ 对 $K$ 求导数可得：

$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}K}=\frac{4\beta K(x^*-m)^2x^*(1-x^*)(1+a(x^*-m))+2\beta(x^*-m)^2\sqrt{\Delta_1}-2(x^*-m)\Delta_1}{4K^2\beta(x^*-m)^2\sqrt{\Delta_1}}<0,$$

$\lim\limits_{K\to\infty}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}K}=0$，这表明增加恐惧效应可以减少捕食者的种群密度.

### 4.3　恐惧效应和避难所同时对捕食者种群密度的影响

当 $K=0$ 时(无恐惧效应时)，由式(5)可解得系统(3)有 1 个正平衡点 $\hat{E}(\hat{x},\hat{y})$，其中 $\hat{x}=\frac{d}{c\beta-ad}+m$，$\hat{y}=\frac{c\gamma(d+m(c\gamma-ad))((c\gamma-ad)(1-m)-d)}{\beta d(c\beta-ad)^2}$. 将 $\hat{x}$、$\hat{y}$ 对 $m$ 求导数可得：$\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}m}=1>0$，$\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}m}=\frac{-2c\gamma(c\gamma-ad)m+c\gamma(c\gamma-ad)-2dc\gamma}{\beta d(c\gamma-ad)}$. 由 $\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}m}>0$ 可知，$\hat{x}$ 是关于 $m$ 的递增函数，这表明此时食饵避难所有利于食饵种群密度的增加. 当 $0<m<\frac{1}{2}-\frac{d}{c\beta-ad}$ 时，由 $\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}m}>0$ 可知 $\hat{y}$ 是关于 $m$ 的递增函数，这表明此时食饵避难所有利于捕食者种群密度的增加；当 $\frac{1}{2}-\frac{d}{c\gamma-ad}<m<1-\frac{d}{c\beta-ad}$ 时，由 $\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}m}<0$ 可知 $\hat{y}$ 是关于 $m$ 的递减函数，这表明此时食饵避难所不利于捕食者种群密度的增加. 当 $m=\frac{1}{2}-\frac{d}{c\gamma-ad}$ 时，由上述和 $\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}m}=0$ 可知，此时捕食者种群密度达到最大. 由于正平衡点是全局稳定的，所以可知当 $m=\frac{1}{2}-\frac{d}{c\gamma-ad}$ 时，食饵种群密度不会无限增大，而捕食者种群密度也不会绝灭.

当 $K\neq 0$ 时(具有恐惧效应时)，求 $x^*$、$y^*$ 对 $m$ 的导数可得：$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}m}=1>0$，$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}m}=\sqrt{\Delta_1}\cdot\frac{(c\beta-ad)(1-2m)-2d}{c\beta-ad}\frac{c\beta}{c\beta-ad}$. 由 $\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}m}>0$ 可知，$x^*$ 是关于 $m$ 的递增函数，这表明此时食饵避难所

（下转第 135 页）

[4] 祝端. LTE-A 系统中基于载波聚合的资源分配技术[D]. 北京：北京邮电大学，2017：11-19.
[5] KIM H, LEE H, AHN M, et al. Joint subcarrier and power allocation methods in full duplex wireless powered communication networks for OFDM systems[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2016, 15(7): 4745-4753.
[6] ZHANG J, MENG L L, JI H. Joint cell association and user scheduling in carrier aggregated heterogeneous networks[J]. Information, 2018, 9(1): 1-7.
[7] ABDELMULA H S B, WARIP M N, LYNN O B, et al. QoS based independent carrier scheduling scheme for heterogeneous services in 5G LTE-advanced networks[C]//International Conference of Reliable Information and Communication Technology. Cham: Springer, 2018: 464-476.
[8] LEE S B, CHOUDHURY S, KHOSHNEVIS A, et al. Downlink MIMO with frequency-domain packet scheduling for 3GPP LTE[C]//IEEE INFOCOM 2009. Rio de Janeiro: IEEE, 2009: 1269-1277.
[9] TAKEDA K, NAGATA S, KISHIYAMA Y, et al. Effects of wideband scheduling and radio resource assignment in OFDMA radio access for LTE-advanced downlink[C]//2009 IEEE 70th Vehicular Technology Conference Fall. Anchorage: IEEE, 2009: 1-5.
[10] LIAO H S, CHEN P Y, CHEN W T. An efficient downlink radio resource allocation with carrier aggregation in LTE-advanced networks[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2014, 13(10): 2229-2239.
[11] KIM J C, PAK J H, NAM C S, et al. A study on the resource block allocation method to enhance the total energy efficiency for LTE-A networks[J]. Wireless Personal Communications, 2021, 123(3): 2679-2697.

**（上接第 121 页）**

有利于食饵种群密度的增加. 当 $0 < m < \frac{1}{2} - \frac{d}{c\beta - ad}$ 时，由 $\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}m} > 0$ 可知 $y^*$ 是关于 $m$ 的递增函数，这表明此时食饵避难所有利于捕食者种群密度的增加；当 $\frac{1}{2} - \frac{d}{c\gamma - ad} < m < 1 - \frac{d}{c\beta - ad}$ 时，由 $\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}m} < 0$ 可知 $y^*$ 是关于 $m$ 的递减函数，这表明此时食饵避难所不利于捕食者种群密度的增加. 当 $m = \frac{1}{2} - \frac{d}{c\beta - ad}$ 时，由上述和 $\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}m} = 0$ 可知，此时捕食者种群密度达到最大. 由于正平衡点是全局稳定的，所以可知当 $m = \frac{1}{2} - \frac{d}{c\beta - ad}$ 时，食饵种群密度不会无限增大，捕食者种群密度也不会绝灭.

## 参考文献：

[1] CHEN L J, CHEN F D, CHEN L J. Qualitative analysis of a predator-prey model with Holling type Ⅱ functional response incorporating a constant prey refuge[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11: 246-252.
[2] WANG X, ZANETTE L, ZOU X. Modelling the fear effect in predator-prey interactions[J]. Journal of Mathematical Biology, 2016, 73(5): 1179-1204.
[3] 刘英姿，李忠，何梦昕. 具有恐惧效应和食饵避难所的 Leslie-Gower 捕食者-食饵模型的动力学分析[J]. 延边大学学报(自然科学版)，2022，2(6)：112-117.
[4] WANG X Q, TAN Y P, CAI Y L, et al. Impact of the fear effect on the stability and bifurcation of a Leslie-Gower predator-prey model[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2020, 30(14): 205-210.
[5] ZHANG H S, CAI Y L, FU S M, et al. Impact of the fear effect in a prey-predator model incorporating a prey refuge[J]. App Math Comput, 2019, 356: 328-337.
[6] UPADHYAY R, MISHRA S. Popualtion dynamic consequences of fearful prey in a spatiotemporal predator-prey system[J]. Math Biosci Eng, 2018, 16(1): 338-372.
[7] WANG J, CAI Y L, FU S M, et al. The effect of the fear factor on the dynamics of a predator-prey model incorpating the prey refuge[J]. Chaos, 2019, 29(8): 83-109.
[8] LI Y, HE M, LI Z. Dynamics of a ratio-dependent Leslie-Gower predator-prey model with Allect effect and fear effect[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2022, 32(6): 2250082.
[9] 马知恩，周义仓，李承治. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京：科学出版社，2015：182-183.
[10] MEISS J D. Differential dynamical systems[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.