文章编号: 1004-4353(2023)02-0109-07

PM-空间中一类 n 变量混合型泛函方程的稳定性

韩 玥， 成立花
(西安工程大学 理学院，西安 710048)

摘要: 利用差分算子的定义给出了一类新的 n 变量可加-二次混合型泛函方程,并通过对函数性态进行分类得到了其在实向量空间中的通解,同时利用不动点方法证明了该混合型泛函方程在 PM-空间中具有 Hyers-Ulam 稳定性.

关键词: Hyers-Ulam 稳定性; 不动点法; 混合型泛函方程; PM-空间
中图分类号: O177.7 **文献标识码:** A

Stability of a class of mixed functional equations with n variables in PM-space

HAN Yue， CHENG Lihua
(*School of Science*, *Xi'an Polytechnic University*, *Xi'an* 710048, *China*)

Abstract: A new class of additive-quadratic hybrid functional equations of n variables was given by using the definition of difference operators. By categorizing the functional states, its general solution in real vector space was obtained, and the fixed-point method was used to prove that the hybrid functional equations have Hyers-Ulam stability in PM-space.

Keywords: Hyers-Ulam stability; fixed-point method; mixed functional equation; PM-space

0 引言

由于混合型泛函方程在相对论、信息论和保险统计等领域具有广泛的应用,因此受到学者们的关注. 近年来,许多学者研究了混合型泛函方程的稳定性. 例如:文献[1]的作者对一类二-三次混合型泛函方程在非阿基米德(n,β)-赋范空间中的稳定性进行了分析;文献[2]和文献[3]的作者分别在模糊空间和Banach空间中研究了可加-四次混合型泛函方程的稳定性;文献[4]和文献[5]的作者分别在随机赋范空间和非阿基米德空间中研究了可加-二次混合型泛函方程的稳定性.

2023 年,文献[6]的作者研究了如下可加泛函方程:

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \tag{1}$$

并给出了方程(1)的通解($f(x)=bx$),其中可加泛函方程的每个解 f 都被称为可加映射. 同年,文献[7]的作者研究了如下二次泛函方程:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y), \tag{2}$$

收稿日期: 2023-04-17
基金项目: 陕西省教育厅自然科学基金(22JK0394)
第一作者: 韩玥(1998—),女,硕士研究生,研究方向为泛函方程的稳定性.
通信作者: 成立花(1973—),女,副教授,研究方向为算子理论与小波分析.

并给出了方程(2)的通解($f(x)=ax^2$),其中二次泛函方程的每个解 f 都被称为二次映射.

概率模空间是由 Kourosh[8] 首次提出的.设 $\boldsymbol{X}$ 是一个实向量空间,Δ 是所有分布函数的集合.若映射 $\mu:\boldsymbol{X}\to\Delta$ 满足以下条件:

1) $\mu(x)(0)=0$;

2) 当 $x=0$,且 $t>0$ 时,有 $\mu(x)(t)=1$;

3) $\mu(-x)(t)=\mu(x)(t)$;

4) 对所有的 $x,y\in\boldsymbol{X}$, $a,b,s,t\in\mathbf{R}_0^+$, $a+b=1$,有 $\mu(ax+by)(s+t)\geqslant\mu(x)(s)\wedge\mu(y)(t)$.

则称$(\boldsymbol{X},\mu)$是一个概率模空间(PM-空间),其中符号"$\wedge$"代表"min".若对所有的 $x\in\boldsymbol{X}$, $t>0$, $a\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$, $b\in(0,1]$,有 $\mu(ax)(t)=\mu(x)\left(\dfrac{t}{|a|^b}\right)$,则称$(\boldsymbol{X},\mu)$是 b-同态的.

另外,在$(\boldsymbol{X},\mu)$是 b-同态的情况下,文献[8]的作者还将上述条件 4)变为了如下形式:

$$\mu(x+y)(2^b(s+t))=\mu\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)(s+t)\geqslant\mu(x)(s)\wedge\mu(y)(t).$$

基于上述可加泛函方程(1)和二次泛函方程(2),本文建立了如下一类 n 变量混合型泛函方程:

$$f(2x_1+x_2+\cdots+x_n)+f(x_1+2x_2+\cdots+x_n)+\cdots+f(x_1+x_2+\cdots+2x_n)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}f(-x_i)+(n+2)f(x_1+x_2+\cdots+x_n),\ \forall n\in\mathbf{N},\tag{3}$$

并利用不动点法研究了其在 PM-空间中的稳定性.

1 方程(3)的解

假设 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 都为实向量空间.本文将在 f 分别为奇映射和偶映射的情形下,对泛函方程(3)进行求解.

定理 1 若奇映射 $f:\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{X}$ 满足泛函方程(3),则 f 是一个可加映射.

证明 假设奇映射 f 满足泛函方程(3),则在方程(3)中分别用$(0,0,\cdots,0)$和$(x_1,0,\cdots,0)$替代$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可得 $f(0)=0$ 和

$$f(2x_1)=2f(x_1),\ \forall x_1\in\boldsymbol{P}.\tag{4}$$

再用$(x_1,x_1,0,\cdots,0)$替代$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可得:

$$f(3x_1)=3f(x_1),\ \forall x_1\in\boldsymbol{P}.\tag{5}$$

由式(4)和式(5)可得 $f(nx_1)=nf(x_1)$.在方程(3)中,再用$(x_1,x_2,0,\cdots,0)$替代$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可得:

$$f(2x_1+x_2)+f(x_1+2x_2)=4f(x_1+x_2)-f(x_1)-f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in\boldsymbol{P}.\tag{6}$$

再用$(x_1,x_2,x_1,0,\cdots,0)$替代$(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$可得:

$$2f(3x_1+x_2)+2f(x_1+x_2)=5f(2x_1+x_2)-2f(x_1)-f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in\boldsymbol{P}.$$

在上式中,令 $x_2=x_2-x_1$ 可得:

$$2f(2x_1+x_2)=5f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)-2f(x_1)-2f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in\boldsymbol{P}.\tag{7}$$

在式(7)中,用(x_2,x_1)替代(x_1,x_2)可得:

$$2f(x_1+2x_2)=5f(x_1+x_2)-f(x_1-x_2)-2f(x_1)-2f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in\boldsymbol{P}.\tag{8}$$

将式(7)和式(8)相加可得:

$$f(2x_1+x_2)+f(x_1+2x_2)=5f(x_1+x_2)-2f(x_1)-2f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in\boldsymbol{P}.$$

于是再由式(6)即可得到方程(1),因此 f 是可加的.证毕.

定理 2 若偶映射 $f:\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{X}$ 满足泛函方程(3),则 f 是一个二次映射.

证明 假设偶映射 f 满足泛函方程(3),则在方程(3)中分别用$(0,0,\cdots,0)$和$(x_1,0,\cdots,0)$替代$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可得 $f(0)=0$ 和

$$f(2x_1)=4f(x_1),\ \forall x_1\in\boldsymbol{P}.\tag{9}$$

再用$(x_1,x_1,0,\cdots,0)$替代$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,有:

$$f(3x_1)=9f(x_1),\ \forall x_1\in \boldsymbol{P}. \tag{10}$$

由式(9)和式(10)可得 $f(nx_1)=n^2f(x_1)$. 在方程(3)中,再用$(x_1,x_2,0,\cdots,0)$替代$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可得:

$$f(2x_1+x_2)+f(x_1+2x_2)=4f(x_1+x_2)+f(x_1)+f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in \boldsymbol{P}. \tag{11}$$

再用$(x_1,x_2,x_1,0,\cdots,0)$替代$(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$可得:

$$2f(3x_1+x_2)+4f(x_1+x_2)=5f(2x_1+x_2)+2f(x_1)+f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in \boldsymbol{P}.$$

在上式中,令 $x_2=x_2-x_1$ 可得:

$$2f(2x_1+x_2)=5f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)+2f(x_1)-4f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in \boldsymbol{P}. \tag{12}$$

在式(12)中,用(x_2,x_1)替代(x_1,x_2)可得:

$$2f(x_1+2x_2)=5f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)-4f(x_1)+2f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in \boldsymbol{P}. \tag{13}$$

将式(12)和式(13)相加可得:

$$f(2x_1+x_2)+f(x_1+2x_2)=5f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)-f(x_1)-f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in \boldsymbol{P},$$

于是再由式(11)即可得方程(2),因此 f 是二次的. 证毕.

2　方程(3)的稳定性

定义 1[9]　令 X_ρ 是一个模空间,且模 ρ 满足 Fatou 性质,C 是 X_ρ 上的一个 ρ-完备的非空子集. 如果存在 $k<1$,且对所有的 $x,y\in C$ 使得 $\rho(T(x)-T(y))\leqslant K\cdot\max\{\rho(x-y),\rho(x-T(x)),\rho(y-T(y)),\rho(x-T(y)),\rho(y-T(x))\}$,则称 $T:C\to C$ 是一个拟压缩自映射.

引理 1[9](不动点定理)　若对任意的 $x\in C$,使得 $\delta_\rho(x):=\sup\{\rho(T^n(x)-T^m(x)):m,n\in\mathbf{N}\}<\infty$,则序列$\{T^n(x)\}$收敛到点 $w(w\in C)$. 如果有 $\rho(w-T(w))<\infty$ 和 $\rho(x-T(w))<\infty$,则称$\{T^n(x)\}$的 ρ-收敛点 w 是 T 的一个唯一不动点,即若 w^* 是 T 的任一满足 $\rho(w-w^*)<\infty$ 的不动点,则有 $w=w^*$.

在下文中本文总是假定 $\boldsymbol{M}$ 是一个线性空间,$(\boldsymbol{X},\mu)$ 是一个 μ-完备 b-同态的 PM-空间. 对于映射 $f:\boldsymbol{M}\to(\boldsymbol{X},\mu)$,分别定义其有如下差分算子:

$$G_0(x_1,x_2,\cdots,x_n):=f(2x_1+x_2+\cdots+x_n)+f(x_1+2x_2+\cdots+x_n)+\cdots+$$
$$f(x_1+x_2+\cdots+2x_n)-(n+2)f(x_1+x_2+\cdots+x_n)+\sum_{i=1}^{n}f(x_i),\ \forall n\in\mathbf{N},$$
$$G_e(x_1,x_2,\cdots,x_n):=f(2x_1+x_2+\cdots+x_n)+f(x_1+2x_2+\cdots+x_n)+\cdots+$$
$$f(x_1+x_2+\cdots+2x_n)-(n+2)f(x_1+x_2+\cdots+x_n)-\sum_{i=1}^{n}f(x_i),\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

下面,利用不动点方法分析 n 变量混合型泛函方程(3)在 PM-空间中的稳定性.

定理 3　令 $\boldsymbol{M}$ 是一个线性空间,$(\boldsymbol{X},\mu)$ 是一个 μ-完备 b-同态的 PM-空间. 设映射 $\varphi:\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M}\to\Delta$ 满足 $\varphi(2^a x,0,\cdots,0)(2^{ab}Nt)\geqslant\varphi(x,0,\cdots,0)(t),\ \forall x\in\boldsymbol{M}$,且对所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{M}$ 和 $0<N<\dfrac{1}{2^b}$ 满足 $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi(2^{am}x_1,2^{am}x_2,\cdots,2^{am}x_n)(2^{abm}t)=1$. 再设映射 $f:\boldsymbol{M}\to(\boldsymbol{X},\mu)$ 满足

$$f(0)=0, \tag{14}$$

且对所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{M}$ 满足不等式

$$\mu(G_0(x_1,x_2,\cdots,x_n))(t)\geqslant\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)(t), \tag{15}$$

则对所有的 $x\in\boldsymbol{M}$,存在唯一的可加映射 $A:\boldsymbol{M}\to(\boldsymbol{X},\mu)$ 满足方程(3),且使得

$$\mu(A(x)-f(x))\left(\frac{t}{N^{\frac{a-1}{2}}(1-2^bN)}\right)\geqslant\varphi(x,0,\cdots,0)(t). \tag{16}$$

证明 在式(15)中,用$(x,0,\cdots,0)$替代$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可得:

$$\mu(f(2x)-2f(x))(t)\geqslant\varphi(x,0,\cdots,0)(t),\ \forall x\in\boldsymbol{M},$$

由上式可得:

$$\mu\left(\frac{f(2x)}{2}-f(x)\right)(t)=\mu(f(2x)-2f(x))(2^bt)\geqslant\varphi(x,0,\cdots,0)(2^bt),\ \forall x\in\boldsymbol{M}.\tag{17}$$

在式(17)中,用$2^{-1}x$替代x可得:

$$\mu\left(\frac{f(2^{-1}x)}{2^{-1}}-f(x)\right)(t)=\mu\left(\frac{f(x)}{2}-f(2^{-1}x)\right)\left(\frac{t}{2^b}\right)\geqslant\varphi(2^{-1}x,0,\cdots,0)\left(2^bN^{-1}\frac{Nt}{2^b}\right)\geqslant$$
$$\varphi(x,0,\cdots,0)(2^bN^{-1}t),\ \forall x\in\boldsymbol{M}.\tag{18}$$

由式(17)和式(18)可得:

$$\mu\left(\frac{f(2^ax)}{2^a}-f(x)\right)(t)\geqslant\psi(x)(t):=\varphi(x,0,\cdots,0)(2^bN^{\frac{a-1}{2}}t),\ \forall x\in\boldsymbol{M}.\tag{19}$$

令集合$S:=\{f:\boldsymbol{M}\to(\boldsymbol{X},\mu)\,|\,f(0)=0\}$,并定义$S$上的模$\beta$为$\beta(f)=\inf\{l>0:\mu(f(x))(lt)\geqslant\psi(x)(t),\forall x\in\boldsymbol{M}\}$,且$\beta$满足$\Delta_2$-条件和 Fatou 性质,由此可得$S_\beta$是$\beta$-完备的[10].

定义映射$T:S_\beta\to S_\beta$为$TA(x):=\dfrac{A(2^ax)}{2^a}$,且对任意的$l\in\mathbf{R}_+$,存在$g,h\in S_\beta$,且使得$\beta(g-h)\leqslant l$.由$\beta$的定义可得$\mu(g(x)-h(x))(lt)\geqslant\psi(x)(t),\forall x\in\boldsymbol{M}$.进而由该式可得:

$$\mu(Tg(x)-Th(x))(Nlt)=\mu\left(\frac{g(2^ax)}{2^a}-\frac{h(2^ax)}{2^a}\right)(Nlt)=\mu(g(2^ax)-h(2^ax))(2^{ab}Nlt)\geqslant$$
$$\psi(2^ax)(2^{ab}Nt)\geqslant\psi(x)(t),\ \forall x\in\boldsymbol{M}.$$

由上式可知对所有的$g,h\in S_\beta$有$\beta(Tg-Th)\leqslant N\beta(g-h)$,这表明$T$是一个$\beta$-严格压缩映射.

在式(19)中,用2^ax替代x可得$\mu\left(\dfrac{f(2^{2a}x)}{2^a}-f(2^ax)\right)(t)\geqslant\psi(2^ax)(t),\ \forall x\in\boldsymbol{M}$,进而由该式可得:

$$\mu(2^{-2a}f(2^{2a}x)-2^{-a}f(2^ax))(Nt)=\mu(2^{-a}f(2^{2a}x)-f(2^ax))(2^{ab}Nt)\geqslant$$
$$\psi(2^ax)(2^{ab}Nt)\geqslant\psi(x)(t),\ \forall x\in\boldsymbol{M}.\tag{20}$$

由式(19)和式(20)可得:

$$\mu\left(\frac{f(2^{2a}x)}{2^{2a}}-f(x)\right)(2^b(Nt+t))\geqslant$$
$$\mu\left(\frac{f(2^{2a}x)}{2^{2a}}-\frac{f(2^ax)}{2^a}\right)(Nt)\wedge\mu\left(\frac{f(2^ax)}{2^a}-f(x)\right)(t)\geqslant\psi(x)(t),\ \forall x\in\boldsymbol{M}.\tag{21}$$

在式(21)中,分别用2^ax、$2^{ab}2^b(N^2t+Nt)$替代x、$2^b(Nt+t)$可得:

$$\mu(2^{-2a}f(2^{3a}x)-f(2^ax))(2^{ab}2^b(N^2t+Nt))\geqslant\psi(2^ax)(2^{ab}Nt)\geqslant\psi(x)(t),\ \forall x\in\boldsymbol{M}.$$

由上式可得:

$$\mu(2^{-3a}f(2^{3a}x)-2^{-a}f(2^ax))(2^b(N^2t+Nt))\geqslant\psi(x)(t),\ \forall x\in\boldsymbol{M},\tag{22}$$

由式(19)和式(22)可得:

$$\mu\left(\frac{f(2^{3a}x)}{2^{3a}}-f(x)\right)(2^b(2^b(N^2t+Nt)+t))\geqslant$$
$$\mu\left(\frac{f(2^{3a}x)}{2^{3a}}-\frac{f(2^ax)}{2^a}\right)(2^b(N^2t+Nt))\wedge\mu\left(\frac{f(2^ax)}{2^a}-f(x)\right)(t)\geqslant\psi(x)(t),\ \forall x\in\boldsymbol{M}.\tag{23}$$

对比式(21)和式(23)可得:

$$\mu\left(\frac{f(2^{am}x)}{2^{am}}-f(x)\right)\left((2^bN)^{m-1}t+2^b\sum_{i=1}^{m-1}(2^bN)^{i-1}t\right)\geqslant\psi(x)(t),\ \forall x\in\boldsymbol{M},$$

其中整数 $m>0$. 因此由上式可得:

$$\beta(T^m f-f)\leqslant(2^b N)^{m-1}+2^b\sum_{i=1}^{m-1}(2^b N)^{i-1}\leqslant 2^b\sum_{i=1}^{m}(2^b N)^{i-1}\leqslant\frac{2^b}{1-2^b N}.$$

由 Cauchy 收敛定理知,$\{T^m(f)\}$ 是 β-收敛到 A 的[10],故上式可变形为 $\beta(A-f)\leqslant\dfrac{2^b}{1-2^b N}$. 于是有

$\mu(A(x)-f(x))\left(\dfrac{2^b}{1-2^b N}t\right)\geqslant\psi(x)(t):=\varphi(x,0,\cdots,0)(2^b N^{\frac{a-1}{2}}t)$,进而可得:

$$\mu(A(x)-f(x))\left(\frac{t}{N^{\frac{a-1}{2}}(1-2^b N)}\right)\geqslant\varphi(x,0,\cdots,0)(t),\ \forall x\in\boldsymbol{M}.$$

由上式可知不等式(16)成立. 再由引理 1 易证 A 具有唯一性[10],证毕.

定理 4　令 $\boldsymbol{M}$ 是一个线性空间,$(\boldsymbol{X},\mu)$ 是一个 μ-完备 b-同态的 PM-空间. 设映射 $\varphi:\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M}\to\Delta$ 满足 $\varphi(2^a x,0,\cdots,0)(2^{2ab}Nt)\geqslant\varphi(x,0,\cdots,0)(t)$,$\forall x\in\boldsymbol{M}$,且对所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{M}$ 和 $0<N<\dfrac{1}{2^b}$ 满足 $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi(2^{am}x_1,2^{am}x_2,\cdots,2^{am}x_n)(2^{2abm}t)=1$. 再设映射 $f:\boldsymbol{M}\to(\boldsymbol{X},\mu)$ 满足式(14),且对所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{M}$ 满足不等式

$$\mu(G_e(x_1,x_2,\cdots,x_n))(t)\geqslant\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)(t).\tag{24}$$

则对所有的 $x\in\boldsymbol{M}$,存在唯一的二次映射 $\boldsymbol{Q}:\boldsymbol{M}\to(\boldsymbol{X},\mu)$ 满足方程(3),且使得

$$\mu(\boldsymbol{Q}(x)-f(x))\left(\frac{t}{2^b N^{\frac{a-1}{2}}(1-2^b N)}\right)\geqslant\varphi(x,0,\cdots,0)(t).\tag{25}$$

证明　在式(24)中,用 $(x,0,\cdots,0)$ 替代 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可得:

$$\mu(f(2x)-4f(x))(t)\geqslant\varphi(x,0,\cdots,0)(t),\forall x\in\boldsymbol{M}.$$

由上式可得:

$$\mu\left(\frac{f(2x)}{2^2}-f(x)\right)(t)=\mu(f(2x)-2^2 f(x))(2^{2b}t)\geqslant\varphi(x,0,\cdots,0)(2^{2b}t),\forall x\in\boldsymbol{M}.\tag{26}$$

在式(26)中,用 $2^{-1}x$ 替代 x 可得:

$$\mu\left(\frac{f(2^{-1}x)}{2^{-2}}-f(x)\right)(t)=\mu\left(\frac{f(x)}{2^2}-f(2^{-1}x)\right)\left(\frac{t}{2^{2b}}\right)\geqslant\varphi(2^{-1}x,0,\cdots,0)\left(2^{2b}N^{-1}\frac{Nt}{2^{2b}}\right)\geqslant$$
$$\varphi(x,0,\cdots,0)(2^{2b}N^{-1}t),\forall x\in\boldsymbol{M}.\tag{27}$$

由式(26)和式(27)可得:

$$\mu\left(\frac{f(2^a x)}{2^{2a}}-f(x)\right)(t)\geqslant\psi(x)(t):=\varphi(x,0,\cdots,0)(2^{2b}N^{\frac{a-1}{2}}t),\ \forall x\in\boldsymbol{M}.\tag{28}$$

根据证明定理 3 中所给出的集合 S 及其模 β,本文定义映射 $T:S_\beta\to S_\beta$ 为 $TQ(x):=\dfrac{Q(2^a x)}{2^{2a}}$,且对任意的 $l\in\mathbf{R}_+$,存在 $g,h\in S_\beta$,使得 $\beta(g-h)\leqslant l$. 由 β 的定义可得:$\mu(g(x)-h(x))(lt)\geqslant\psi(x)(t)$,$\forall x\in\boldsymbol{M}$. 由该式可得:

$$\mu(Tg(x)-Th(x))(Nlt)=\mu\left(\frac{g(2^a x)}{2^{2a}}-\frac{h(2^a x)}{2^{2a}}\right)(Nlt)=\mu(g(2^a x)-h(2^a x))(2^{2ab}Nlt)\geqslant$$
$$\psi(2^a x)(2^{2ab}Nt)\geqslant\psi(x)(t),\forall x\in\boldsymbol{M}.$$

由上式可知对所有的 $g,h\in S_\beta$ 有 $\beta(Tg-Th)\leqslant N\beta(g-h)$,这表明 T 是一个 β-严格压缩映射.

在式(28)中,用 $2^a x$ 替代 x 可得 $\mu\left(\dfrac{f(2^{2a}x)}{2^{2a}}-f(2^a x)\right)(t)\geqslant\psi(2^a x)(t)$,$\forall x\in\boldsymbol{M}$. 由该式可得:

$$\mu(2^{-2(2a)}f(2^{2a}x)-2^{-2a}f(2^a x))(Nt)=\mu(2^{-2a}f(2^{2a}x)-f(2^a x))(2^{2ab}Nt)\geqslant$$

$$\psi(2^a x)(2^{2ab}Nt) \geqslant \psi(x)(t), \ \forall x \in \boldsymbol{M}. \tag{29}$$

由式(28)和式(29)可得：

$$\mu\left(\frac{f(2^{2a}x)}{2^{2(2a)}} - f(x)\right)(2^b(Nt+t)) \geqslant$$

$$\mu\left(\frac{f(2^{2a}x)}{2^{2(2a)}} - \frac{f(2^a x)}{2^{2a}}\right)(Nt) \wedge \mu\left(\frac{f(2^a x)}{2^{2a}} - f(x)\right)(t) \geqslant \psi(x)(t), \ \forall x \in \boldsymbol{M}. \tag{30}$$

在式(30)中,分别用 $2^a x$ 和 $2^{2ab}2^b(N^2t+Nt)$ 替代 x、$2^b(Nt+t)$ 可得：

$$\mu(2^{-2(2a)}f(2^{3a}x) - f(2^a x))(2^{2ab}2^b(N^2t+Nt)) \geqslant \psi(2^a x)(2^{2ab}Nt) \geqslant \psi(x)(t), \forall x \in \boldsymbol{M}.$$

由上式可得 $\mu(2^{-3(2a)}f(2^{3a}x) - 2^{-2a}f(2^a x))(2^b(N^2t+Nt)) \geqslant \psi(x)(t), \forall x \in \boldsymbol{M}$. 再由式(28)可得：

$$\mu\left(\frac{f(2^{3a}x)}{2^{2(3a)}} - f(x)\right)(2^b(2^b(N^2t+Nt)+t)) \geqslant$$

$$\mu\left(\frac{f(2^{3a}x)}{2^{2(3a)}} - \frac{f(2^a x)}{2^{2a}}\right)(2^b(N^2t+Nt)) \wedge \mu\left(\frac{f(2^a x)}{2^{2a}} - f(x)\right)(t) \geqslant \psi(x)(t), \forall x \in \boldsymbol{M}.$$

将上式与式(30)对比可得 $\mu\left(\frac{f(2^{am}x)}{2^{2am}} - f(x)\right)\left((2^bN)^{m-1}t + 2^b\sum_{i=1}^{m-1}(2^bN)^{i-1}t\right) \geqslant \psi(x)(t), \forall x \in \boldsymbol{M}$, 其中整数 $m > 0$. 由该式可得：

$$\beta(T^m f - f) \leqslant (2^bN)^{m-1} + 2^b\sum_{i=1}^{m-1}(2^bN)^{i-1} \leqslant 2^b\sum_{i=1}^{m}(2^bN)^{i-1} \leqslant \frac{2^b}{1-2^bN}.$$

由 Cauchy 收敛定理知,$\{T^m(f)\}$ 是 β-收敛到 Q 的[10],故上式可变形为 $\beta(Q-f) \leqslant \frac{2^b}{1-2^bN}$. 于是有：

$$\mu(Q(x) - f(x))\left(\frac{2^b}{1-2^bN}t\right) \geqslant \psi(x)(t) := \varphi(x,0,\cdots,0)(2^{2b}N^{\frac{a-1}{2}}t).$$

再由上式可得 $\mu(Q(x) - f(x))\left(\frac{t}{2^bN^{\frac{a-1}{2}}(1-2^bN)}\right) \geqslant \varphi(x,0,\cdots,0)(t), \forall x \in \boldsymbol{M}$, 故不等式(25)成立. 由引理 1 易证 Q 具有唯一性[10],证毕.

定理 5 令 $\boldsymbol{M}$ 是一个线性空间,$(\boldsymbol{X},\mu)$ 是一个 μ-完备 b-同态的 PM-空间. 设映射 $\varphi: \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M} \to \Delta$ 满足 $\varphi(s2^a x,0,\cdots,0)\left(\frac{2^{iab}N}{2}t\right) \geqslant \varphi(sx,0,\cdots,0)(\frac{t}{2}), \forall x \in \boldsymbol{M}$, 且对所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in \boldsymbol{M}$, $0 < N < \frac{1}{2^b}$, $s \in \{-1,1\}$ 和 $i \in \{1,2\}$ 满足：

$$\lim_{m\to\infty}\min\left\{\varphi(2^{am}x_1,2^{am}x_2,\cdots,2^{am}x_n)\left(\frac{2^{iabm}}{2}t\right),\varphi(-2^{am}x_1,-2^{am}x_2,\cdots,-2^{am}x_n)\left(\frac{2^{iabm}}{2}t\right)\right\} = 1.$$

再设映射 $f: \boldsymbol{M} \to (\boldsymbol{X},\mu)$ 满足式(14),且对所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in \boldsymbol{M}$ 满足不等式

$$\mu(f(2x_1+x_2+\cdots+x_n) + f(x_1+2x_2+\cdots+x_n) + \cdots + f(x_1+x_2+\cdots+2x_n) -$$

$$(n+2)f(x_1+x_2+\cdots+x_n) - \sum_{i=1}^{n}f(-x_i))(t) \geqslant \varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)(t), \forall n \in \mathbf{N}.$$

则对所有的 $x \in \boldsymbol{M}$, 存在唯一的可加映射 $A: \boldsymbol{M} \to (\boldsymbol{X},\mu)$ 和二次映射 $Q: \boldsymbol{M} \to (\boldsymbol{X},\mu)$ 使得：

$$\mu(f(x) - A(x) - Q(x))(t) \geqslant \min\left\{\varphi(x,0,\cdots,0)\left(\frac{N^{\frac{a-1}{2}}(1-2^bN)}{2}t\right), \varphi(-x,0,\cdots,0)\cdot\right.$$

$$\left.\left(\frac{N^{\frac{a-1}{2}}(1-2^bN)}{2}t\right),\varphi(x,0,\cdots,0)\left(\frac{2^bN^{\frac{a-1}{2}}(1-2^bN)}{2}t\right), \varphi(-x,0,\cdots,0)\left(\frac{2^bN^{\frac{a-1}{2}}(1-2^bN)}{2}t\right)\right\}. \tag{31}$$

证明 令 $f_0(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, 则根据 f_0 的奇性有 $f_0(-x) = -f_0(x)$, 且对所有的

$x_1,x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{M}$ 有：

$$\mu(f_0(2x_1+x_2+\cdots+x_n)+f_0(x_1+2x_2+\cdots+x_n)+\cdots+f_0(x_1+x_2+\cdots+2x_n)-(n+2)f_0(x_1+x_2+\cdots+x_n)+\sum_{i=1}^{n}f_0(x_i))(t)\geqslant \min\left\{\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)(\frac{t}{2}),\varphi(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)(\frac{t}{2})\right\}.$$

由定理 3 知，对所有的 $x\in\boldsymbol{M}$ 存在唯一的可加映射 $A:\boldsymbol{M}\rightarrow(\boldsymbol{X},\mu)$，使得：

$$\mu(A(x)-f_0(x))(t)\geqslant\min\left\{\varphi(x,0,\cdots,0)\left(\frac{N^{\frac{a-1}{2}}(1-2^bN)}{2}t\right),\varphi(-x,0,\cdots,0)\left(\frac{N^{\frac{a-1}{2}}(1-2^bN)}{2}t\right)\right\}.\tag{32}$$

再令 $f_e(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，则根据 f_e 的偶性有 $f_e(-x)=f_e(x)$，且对所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{M}$ 有：$\mu(f_e(2x_1+x_2+\cdots+x_n)+f_e(x_1+2x_2+\cdots+x_n)+\cdots+f_e(x_1+x_2+\cdots+2x_n)-(n+2)\cdot f_e(x_1+x_2+\cdots+x_n)-\sum_{i=1}^{n}f_e(x_i))(t)\geqslant\min\left\{\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)(\frac{t}{2}),\varphi(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)(\frac{t}{2})\right\}$.

由定理 4 知，对所有的 $x\in\boldsymbol{M}$ 存在唯一的二次映射 $Q:\boldsymbol{M}\rightarrow(\boldsymbol{X},\mu)$，使得：

$$\mu(Q(x)-f_e(x))(t)\geqslant \min\left\{\varphi(x,0,\cdots,0)\left(\frac{2^bN^{\frac{a-1}{2}}(1-2^bN)}{2}t\right),\varphi(-x,0,\cdots,0)\left(\frac{2^bN^{\frac{a-1}{2}}(1-2^bN)}{2}t\right)\right\}.$$

于是再由式(32) 即可得到式(31)，证毕.

参考文献：

[1] WANG Z H. Approximate mixed type quadratic-cubic functional equation[J]. Aims Mathematics，2021，6(4)：3546-3561.

[2] KARTHIKEYAN S，CHOONKIL P，PALANI P，et al. Stability of an additive-quartic functional equation in modular spaces[J]. Journal of Mathematics and Computer Science，2021，26(1)：22-40.

[3] MUTHAMILARASI C，SANTRA S S，BALASUBRAMANIAN G，et al. The stability analysis of additive-quartic functional equation[J]. Mathematics，2021，9(22)：2881-2896.

[4] TAMILVANAN K，LEE J R，PARK C. Ulam stability of a functional equation deriving from quadratic and additive mappings in random normed spaces[J]. Aims Mathematics，2021，6(1)：908-924.

[5] TAMILVANAN K，ALKHALDI A H，AGARWAL R P，et al. Fixed-point approach：Ulam stability results of functional equation in non-Archimedean fuzzy φ-2-normed spaces and non-Archimedean Banach spaces[J]. Mathematics，2023，11(2)：270-293.

[6] AGILAN P，ALMAZAH M A，JULIETRAJA K，et al. Classical and fixed-point approach to the stability analysis of a bilateral symmetric additive functional equation in fuzzy and random normed spaces[J]. Mathematics，2023，11(3)：681-699.

[7] FU L L，LIU Q，LI Y J. On the stability of orthogonally Jensen additive and quadratic functional equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2023，519(1)：126744.

[8] KOUROSH N. Baire's theorem in probabilistic modular spaces[J]. Lecture Notes in Engineering and Computer Science，2008，2171(1)：916-917.

[9] KHAMSI M. Quasi contraction mappings in modular spaces without Δ_2-Condition[J]. Fixed Point Theory & Applications，2008，2008(1)：1-6.

[10] ZOLFAGHARI S，EBADIAN A，OSTADBASHI S，et al. A fixed-point approach to the Hyers-Ulam stability of an AQ functional equation in probabilistic modular spaces[J]. Nonlinear Analysis and Application，2013，4(2)：89-101.