

文章编号: 1004-4353(2023)02-0102-07

具有 Kuramoto-Sivashinsky 扰动的广义 Zakharov-Kuznetsov 方程孤立波解的存在性

温倩, 郑航

(武夷学院 数学与计算机学院, 福建 武夷山 354300)

摘要: 利用几何奇异摄动理论研究了一个具有 Kuramoto-Sivashinsky(KS)扰动的广义 Zakharov-Kuznetsov (GZK)方程孤立波解的存在性. 首先,利用动力系统分支理论计算了扰动 GZK 方程对应的未扰系统同宿轨道的显式表达式;其次,在扰动参数充分小的情况下利用 Melnikov 积分计算并得到了 KS 扰动下的 GZK 方程存在孤立波解的充分条件;最后,用数值方法证明了所得结果的正确性.

关键词: 几何奇异摄动理论; Melnikov 积分; 广义 Zakharov-Kuznetsov 方程; 同宿轨道; 孤立波解

中图分类号: O193

文献标识码: A

Existence of solitary wave solutions of generalized Zakharov-Kuznetsov equation with Kuramoto-Sivashinsky perturbation

WEN Qian, ZHENG Hang

(College of Mathematics and Computer, Wuyi University, Wuyishan 354300, China)

Abstract: Based on geometric singular perturbation, the existence of solitary wave solutions of a generalized Zakharov-Kuznetsov (GZK) equation with Kuramoto-Sivashinsky (KS) perturbation was studied. Firstly, the exact parametric expression of homoclinic orbit for unperturbed system was given by method of the bifurcation theory of dynamic system. Secondly, when the perturbed parameter was sufficiently small, the sufficient conditions to guarantee the existence of solitary wave solutions of the GZK equation with KS perturbation was obtained via the Melnikov function integral. Finally, the correctness of the obtained results was proved by numerical method.

Keywords: geometric singular perturbation; Melnikov integral; generalized Zakharov-Kuznetsov equation; homoclinic orbit; solitary wave solution

0 引言

在现实中,许多复杂的非线性现象都可以用非线性波动方程来描述,其中经典的浅水波方程为 Korteweg-de Vries (KdV) 方程^[1]: $u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} = 0$, 其中 α 是实数, $u u_x$ 为非线性项, u_{xxx} 为色散效应项. 将一维空间的 KdV 方程推广到三维空间可以得到 Zakharov-Kuznetsov (ZK) 方程^[2]: $u_t +$

收稿日期: 2023-03-23

基金项目: 福建省中青年教育科研项目(JAT200670, JAT210454)

作者简介: 温倩(1981—),女,硕士,讲师,研究方向为微分方程.

$\alpha u u_x + (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})_x = 0$. ZK 方程的更一般形式为广义 Zakharov-Kuznetsov (GZK) 方程^[3]: $u_t + \alpha(u^n)_x + (\beta u_{xx} + \gamma u_{yy} + \delta u_{zz})_x = 0$, 其中 $n \geq 2$, α, β, γ 是实数.

由于研究浅水波方程的动力学行为有助于更好地了解浅水波的运动规律, 因此许多学者对其进行了研究. 目前, 有很多求解 ZK 方程行波解的方法, 如动力系统法^[3]、正弦-余弦法^[4]、扩展的双曲正切法^[5]、扩展的广义 Riccati 方程映射法^[6]等. 但由于求解浅水波方程时不可避免地会受到某些因素(如 KS 扰动、Marangoni 效应等)的干扰, 进而会使浅水波产生色散、耗散和波裂等现象; 因此, 研究受扰动的 ZK 方程更具有现实意义. 本文将在 KS 扰动下研究 GZK 方程是否存在孤立波解.

目前已有许多学者研究了具有扰动的浅水波方程, 其中几何奇异摄动理论和 Melnikov 积分是常用的方法. 例如: Ogawa^[7]在 KS 扰动下利用几何奇异摄动理论研究了 KdV 方程 $(u_t + uu_x + u_{xxx} + \epsilon(u_{xx} + u_{xxxx})) = 0$ 孤立波解的存在性, 其中 $0 < \epsilon \ll 1$, u_{xx} 为扩散项, u_{xxxx} 为耗散项, $u_{xx} + u_{xxxx}$ 为 KS 扰动. Li 等^[8]利用 Melnikov 积分计算了扰动系统轨道中的稳定流形和不稳定流形之间的距离, 并证明了扰动 KdV-mKdV 方程存在孤立波, 然而作者并未给出一般情况下的 Melnikov 积分表达式. 邱慧敏等^[9]利用几何奇异摄动理论研究了扰动广义 KdV 方程孤立波解的存在性, 并通过对任意 n 值都适用的显式计算方法获得了同宿轨道的 Melnikov 积分. 基于上述研究, 本文将利用几何奇异摄动理论和 Melnikov 积分显式计算方法研究如下具有 KS 扰动的广义 GZK 方程:

$$u_t + \alpha(u^n)_x + (\beta u_{xx} + \gamma u_{yy} + \delta u_{zz})_x + \epsilon(u_{xx} + u_{xxxx}) = 0. \quad (1)$$

方程(1)为广义的(3+1)维方程, 并且其同宿轨道具有复杂的“八字环”情况.

1 未扰 GZK 方程的孤立波解

首先对具有 KS 扰动的广义 GZK 方程进行行波变换 $(u(x, y, z, t) = \varphi(\xi))$, 其中 $\xi = x + y + z - ct$, c 为波速($c > 0$)), 即将偏微分方程(1)转化为常微分方程:

$$-cu_\xi + \alpha(u^n)_\xi + \lambda u_{\xi\xi\xi} + \epsilon(u_{\xi\xi} + u_{\xi\xi\xi\xi}) = 0, \quad (2)$$

其中 $\lambda = \beta + \gamma + \delta$. 在方程(2)两边同时对 ξ 积分, 并令积分常数为 0, 则方程(2)可变形为:

$$-cu + \alpha u^n + \lambda u_{\xi\xi} + \epsilon(u_\xi + u_{\xi\xi\xi}) = 0. \quad (3)$$

在式(3)中引入 $\frac{du}{d\xi} = v$ 和 $\frac{dv}{d\xi} = w$, 则式(3)可以转化为慢系统:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = v, \\ \frac{dv}{d\xi} = w, \\ \epsilon \frac{dw}{d\xi} = cu - \alpha u^n - \lambda w - \epsilon v. \end{cases} \quad (4)$$

对慢系统式(4)进行时间尺度变换, 即令 $\xi = \epsilon\eta$, 则系统(4)可变为式(3)的快系统:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\eta} = \epsilon v, \\ \frac{dv}{d\eta} = \epsilon w, \\ \frac{dw}{d\eta} = cu - \alpha u^n - \lambda w - \epsilon v. \end{cases} \quad (5)$$

在系统(4)和系统(5)中令 $\epsilon \rightarrow 0$, 则可得如下系统(依次分别称为退化系统和层系统):

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = v, \\ \frac{dv}{d\xi} = w, \\ 0 = cu - \alpha u^n - \lambda w, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{du}{d\eta} = 0, \\ \frac{dv}{d\eta} = 0, \\ \frac{dw}{d\eta} = cu - \alpha u^n - \lambda w. \end{cases}$$

其中:退化系统存在二维临界流形 $M_0 = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : cu - \alpha u^n - \lambda w = 0\}$; 层系统在平衡点处其线性

化系统的系数矩阵为 $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c - \alpha n u^{n-1} & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$. 经计算, 该系数矩阵的特征值为 $0, 0, -\lambda$, 所以临界

流形 M_0 是法向双曲的^[10]. 根据 Fenichel 第一不变流形定理^[11] 可知, 在 M_0 的 $o(\epsilon)$ 领域存在一个与 M_0 微分同胚的二维局部不变流形 M_ϵ :

$$M_\epsilon = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : w = \frac{1}{\lambda}(cu - \alpha u^n) + q(u, v, \epsilon)\}, \quad (6)$$

其中 $q(u, v, \epsilon)$ 是关于 u, v, ϵ 光滑的, 并且 $q(u, v, 0) = 0$. 因此, 将 $q(u, v, \epsilon)$ 按 ϵ 展开后, 再将 $q(u, v, \epsilon) = \epsilon q_1(u, v, \epsilon) + o(\epsilon^2)$ 代入系统(4) 中进行比较(比较 ϵ 的系数)可得:

$$q_1(u, v, \epsilon) = \frac{1}{\lambda^2}(\alpha n u^{n-1} - c - \lambda)v.$$

由上式可得不变流形 M_ϵ 为:

$$M_\epsilon = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : w = \frac{1}{\lambda}(cu - \alpha u^n) + \frac{\epsilon}{\lambda^2}(\alpha n u^{n-1} - c - \lambda)v + O(\epsilon^2)\}.$$

若将系统(4) 限制在 M_ϵ 上, 则可将其动力学行为定义为:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = v, \\ \frac{dv}{d\xi} = \frac{1}{\lambda}(cu - \alpha u^n) + \frac{\epsilon}{\lambda^2}(\alpha n u^{n-1} - c - \lambda)v + O(\epsilon^2). \end{cases} \quad (7)$$

在扰动的平面动力系统(7) 中, 令 $\epsilon \rightarrow 0$ 可得与其对应的未扰平面动力系统:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = v, \\ \frac{dv}{d\xi} = \frac{1}{\lambda}(cu - \alpha u^n). \end{cases} \quad (8)$$

由系统(8) 右端函数的零点个数可知: 当 n 为偶数时, 系统(8) 有 2 个平衡点 $E_0(0, 0)$ 和 $E_1(\varphi_0, 0)$, 其中 $\varphi_0 = \sqrt[n-1]{\frac{c}{\alpha}}$. 若 n 为奇数且 $\alpha > 0$ 时, 系统(8) 有 3 个平衡点, 分别为 $E_0(0, 0), E_{1,2}(\pm \varphi_0, 0)$; 当 $\alpha < 0$ 时, 系统(8) 只有 1 个平衡点 $E_0(0, 0)$.

系统(8) 的线性化系数矩阵的行列式为 $J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\lambda}(c - \alpha n u^{n-1}) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda}(n \alpha u^{n-1} - c)$. 由平面动力系

统理论可知, 在平衡点处, 如果 $J < 0$, 则该平衡点为鞍点; 如果 $J > 0$, 则该平衡点为中心点. 由上述可知, 利用各平衡点处 J 的符号可以进行如下判断:

1) 当 n 为偶数时: ① 当 $\lambda > 0$ 时, E_0 为鞍点, E_1 为中心, 如图 1(a) 所示; ② 当 $\lambda < 0$ 时, E_0 为中

心, E_1 为鞍点, 如图 1(b) 所示.

2) 当 n 为奇数时: ① 当 $\alpha > 0$ 且 $\lambda > 0$ 时, E_0 为鞍点, $E_{1,2}$ 为中心, 如图 1(c) 所示; ② 当 $\alpha > 0$ 且 $\lambda < 0$ 时, E_0 为中心, $E_{1,2}$ 为鞍点, 如图 1(d) 所示; ③ 当 $\alpha < 0$ 且 $\lambda > 0$ 时, E_0 为鞍点, 如图 1(e) 所示; ④ 当 $\alpha < 0$ 且 $\lambda < 0$ 时, E_0 为中心, 如图 1(f) 所示.

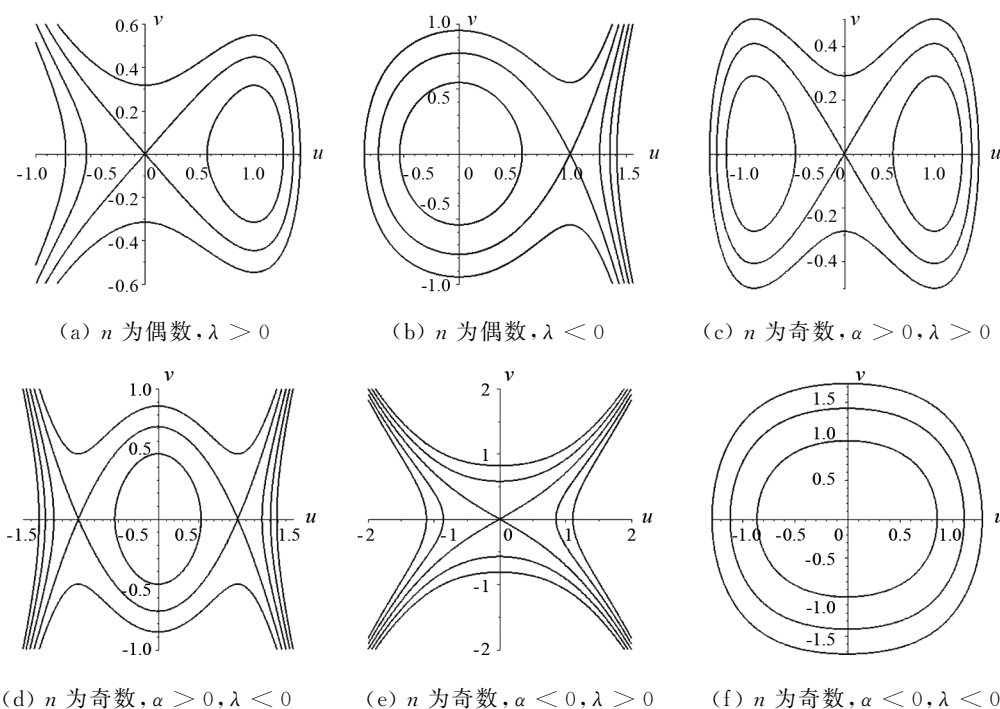


图 1 未扰系统(8)的相图分支

根据哈密顿系统的定义^[12] 容易判断, 系统(8) 是哈密顿系统. 将系统(8) 中 2 个方程相除得 $(cu - \alpha u^n)du = \lambda v dv$, 再对该方程两边同时积分可得其哈密顿函数为:

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \lambda v^2 - \frac{c}{2} u^2 + \frac{\alpha}{n+1} u^{n+1} = h. \quad (9)$$

由图 1 可以看出, 图 1(a) 和图 1(c) 都存在同宿轨道, 且 $\lambda > 0, h = 0$. 此时: 若 n 为偶数, 则未扰系统(8) 存在环绕中心 E_1 和连接鞍点 E_0 的同宿轨道 $\Gamma(c)$ (即 $\Gamma^+(c)$); 若 n 为奇数, 且 $\alpha > 0$, 则未扰系统(8) 存在环绕中心 $E_{1,2}$ 和连接鞍点 E_0 的同宿轨道 $\Gamma(c)$ (即 $\Gamma^+(c) \cup \Gamma^-(c)$).

根据 $h = 0$ 和式(9) 可得 $v = \frac{du}{d\xi} = \frac{u}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{c - \frac{2\alpha}{n+1} u^{n-1}}$. 对该式两边同时对 ξ 进行积分可得:

$$u^{n-1} = \frac{(n+1)c}{2\alpha} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{(n-1)\sqrt{c}}{2\sqrt{\lambda}} \xi + k \right), \quad (10)$$

其中 k 为积分常数. 令 $u^{n-1}(0) = \frac{(n+1)c}{2\alpha}$, 并将其代入式(10) 计算可得 $k = 0$. 由此可得未扰动系统(8)

的同宿轨道的孤立波解(见图 2) 的显式表达式为:

$$u = \begin{cases} \left(\frac{(n+1)c}{2\alpha} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{(n-1)\sqrt{c}}{2\sqrt{\lambda}} \xi \right) \right)^{\frac{1}{n-1}}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ \pm \left(\frac{(n+1)c}{2\alpha} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{(n-1)\sqrt{c}}{2\sqrt{\lambda}} \xi \right) \right)^{\frac{1}{n-1}}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.} \end{cases} \quad (11)$$

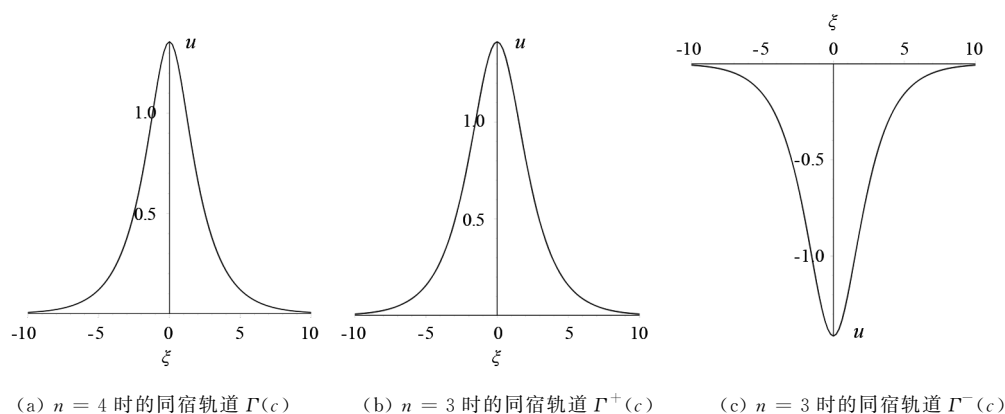


图 2 $\alpha = \beta = \lambda = \delta = c = 1$ 时未扰系统(8) 的孤立波解

由上述可得如下定理 1:

定理 1 当 $\lambda > 0$ 时,若 n 为偶数或奇数($\alpha > 0$),则未扰系统(8) 的孤立波解存在显式表达式,为式(11).

2 扰动 GZK 方程孤立波解的存在性

GZK 方程受到 KS 扰动后,由于其同宿轨道鞍点的稳定流形和不稳定流形的横截相交性可以由未扰系统(8)同宿轨道的 Melnikov 积分的简单零点决定^[13],因此有:

$$M(c) = \oint_{\Gamma(c)} \left(\frac{1}{\lambda} (cu - \alpha u^n) \right) \wedge \left(\frac{1}{\lambda^2} (\alpha n u^{n-1} - c - \lambda)v \right) d\xi = \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha n u^{n-1} - c - \lambda)v^2 d\xi. \quad (12)$$

引理 1 未扰系统(8)的右侧同宿轨道 $\Gamma^+(c)$ 的 Melnikov 积分为:

$$M^+(c) = \frac{2\sqrt{c}}{(n-1)\lambda^2\sqrt{\lambda}} \left(\frac{(n+1)c}{2\alpha} \right)^{\frac{2}{n-1}} [(c+\lambda)(I(n+1, n-1) - I(2, n-1)) + \frac{n(n+1)c}{2} (I(n+1, n-1) - I(2n, n-1))]. \quad (13)$$

证明 将式(11)代入式(12)可得未扰系统(8)的右侧同宿轨道 $\Gamma^+(c)$ 的 Melnikov 积分为:

$$\begin{aligned} M^+(c) &= \oint_{\Gamma^+(c)} \left(\frac{1}{\lambda} (cu_+ - \alpha u_+^n) \right) \wedge \left(\frac{1}{\lambda^2} (\alpha n u_+^{n-1} - c - \lambda)v \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\lambda^3} \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha n u_+^{n-1} - c - \lambda) \left(cu_+^2 - \frac{2\alpha}{n+1} u_+^{n+1} \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\lambda^3} \left[(c+\lambda) \left(\frac{2\alpha}{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} u_+^{n+1} d\xi - c \int_{-\infty}^{+\infty} u_+^2 d\xi \right) + \alpha n \left(c \int_{-\infty}^{+\infty} u_+^{n+1} d\xi - \frac{2\alpha}{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} u_+^{2n} d\xi \right) \right] = \\ &= \frac{2\sqrt{c}}{(n-1)\lambda^2\sqrt{\lambda}} \left(\frac{(n+1)c}{2\alpha} \right)^{\frac{2}{n-1}} [(c+\lambda)(I(n+1, n-1) - I(2, n-1)) + \\ &+ \frac{n(n+1)c}{2} (I(n+1, n-1) - I(2n, n-1))]. \end{aligned}$$

其中 $I(m, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{sech} \rho)^{\frac{2m}{n}} d\rho$, $\rho = \frac{(n+1)\sqrt{c}}{2\sqrt{\lambda}} \xi$, $m = 2, n+1, 2n$. 令 $\theta = \arcsin(\tanh \rho)$, 于是再查积分表^[14] 可得:

$$I(m, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \tanh^2 \rho)^{\frac{m-n}{n}} d \tanh \rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{\frac{2m-n}{n}} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{\frac{2m-n}{n}} d\theta =$$

$$\begin{cases} \pi \frac{(\frac{2m-n}{n} - 1)!!}{(\frac{2m-n}{n})!!}, & \text{当 } \frac{2m-n}{n} \text{ 为偶数时;} \\ \frac{(\frac{2m-n}{n} - 1)!!}{(\frac{2m-n}{n})!!}, & \text{当 } \frac{2m-n}{n} \text{ 为奇数时.} \end{cases} \quad (14)$$

下面讨论具有 KS 扰动的 GZK 方程孤立波解的存在性.

定理 2 当 $\lambda > 0$ 时, 若 n 为偶数或为奇数 ($\alpha > 0$), 则方程(1) 在 $c_0 = -\frac{a}{b}$ 处存在孤立波解.

证明 1) 若 n 为偶数, 则由式(13) 可得 $M(c) = M^+(c) \triangleq c^{\frac{n+3}{2(n-1)}}(a + bc)$, 其中:

$$a = \frac{2}{(n-1)\lambda\sqrt{\lambda}} \left(\frac{n+1}{2\alpha}\right)^{\frac{2}{n-1}} (I(n+1, n-1) - I(2, n-1)),$$

$$b = \frac{2}{(n-1)\lambda^2\sqrt{\lambda}} \left(\frac{n+1}{2\alpha}\right)^{\frac{2}{n-1}} [(I(n+1, n-1) - I(2, n-1)) + \frac{n(n+1)}{2} \cdot (I(n+1, n-1) - I(2n, n-1))].$$

对上式计算可得, 当 $b \neq 0$ 时 $M(c)$ 存在简单零点 $c_0 = -\frac{a}{b}$, 并且 $M'(c_0) = bc_0^{\frac{n+3}{2(n-1)}} \neq 0$.

2) 若 n 为奇数, 则由式(12) 可得 $M^\pm(c) = \frac{1}{\lambda^{\frac{2}{3}}} \int_{-\infty}^{+\infty} (an u_\pm^{n-1} - c - \lambda)(cu_\pm^2 - \frac{2\alpha}{n+1} u_\pm^{n+1}) d\xi$. 于是由 u_\pm 的显示表达式(11) 和 n 的奇偶性知 $M^+(c) = M^-(c)$, 因此有 $M(c) = M^+(c) + M^-(c) = 2M^+(c)$. 同理, 在点 $c_0 = -\frac{a}{b}$ 处, $M(c) = 0$, 并且 $M'(c_0) \neq 0$.

综上所述, 当 $\lambda > 0$ 时, 若 n 为偶数或为奇数 ($\alpha > 0$), $c_0 = -\frac{a}{b}$, 则在小扰动下系统(7) 仍然存在同宿轨道, 即具有 KS 扰动的 GZK 方程(1) 存在孤立波解. 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 该孤立波解即为未扰系统(8) 的孤立波解.

3 数值模拟

为验证上述结果的正确性, 本文利用 Maple 软件对方程(1) 孤立波解的存在性进行了数值模拟验证. 验证时方程(1) 中的 n 分别取 3 和 4.

$$1) \text{ 当 } n = 4 \text{ 时, 利用式(14) 计算可得: } I(2, 3) = \frac{3\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{5}{3})}{2\Gamma(\frac{7}{6})}, I(5, 3) = \frac{24\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{2}{3})}{7\Gamma(\frac{1}{6})}, I(8, 3) = \frac{40\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{2}{3})}{91\Gamma(\frac{7}{6})}.$$

将上述结果代入式(13) 可得 $c = 1.44$. 图 3 为 $n = 4$ 时扰动系统(7) 的相图和时间序列图,

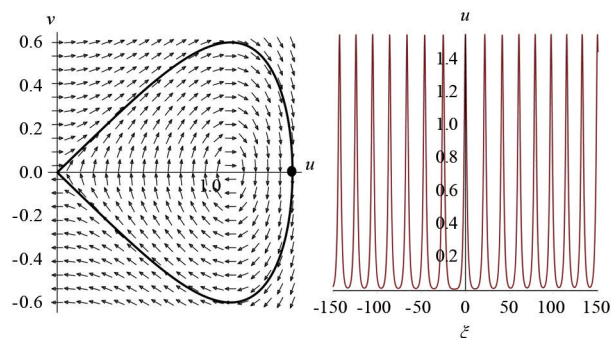
其中 $\epsilon = 0.001$, 初值为未扰系统(8) 的同宿轨道与 u 轴的交点 $P_0(u, v) = (1.53, 0)$, 即图中的黑色点.

$$2) \text{ 当 } n = 3 \text{ 时, 利用式(14) 计算可得: } I(2, 2) = 2, I(4, 2) = \frac{4}{3}, I(6, 2) = \frac{16}{15}.$$

将上述结果代入式

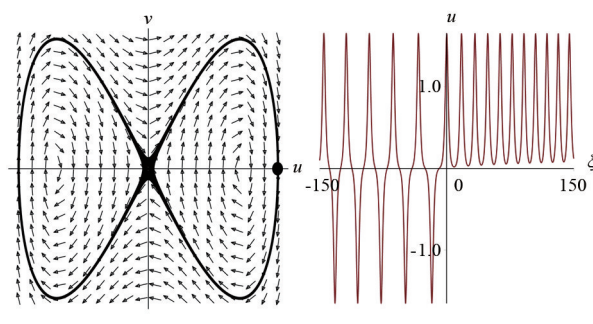
(13) 可得 $c = 1.36$. 图 4 为 $n = 3$ 时扰动系统(7) 的相图和时间序列图, 其中 $\epsilon = 0.001$, 初值为未扰系统(8) 的同宿轨道与 u 轴交点($P_0(u, v) = (1.65, 0)$), 即图中的黑色点.

由图 3 和图 4 可以看出, 无论 n 取偶数还是奇数, 系统(7) 的同宿轨道在相当小($0 < \epsilon \ll 1$) 的扰动下仍然存在, 即在 KS 扰动下 GZK 方程仍存在孤立波解.



(a) 扰动系统(7) 的相图 (b) 扰动系统(7) 的时间序列图

图 3 $n = 4$ 时扰动系统(7) 的相图和时间序列图



(a) 扰动系统(7) 的相图 (b) 扰动系统(7) 的时间序列图

图 4 $n = 3$ 时扰动系统(7) 的相图和时间序列图

参考文献:

- [1] KORTEWEG D J, VRIES G D. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves[J]. Philosophical Magazine, 2011, 91(6): 1007-1028.
- [2] ZAKHAROV V, KUZNETSOV E. On three-dimensional solitons[J]. Soviet Physics, 1974, 39: 285-288.
- [3] ZHANG W B, ZHOU J B. Traveling wave solutions of a generalized Zakharov-Kuznetsov equation[J]. ISRN Mathematical Analysis, 2012, 2012: 107846.
- [4] WAZWAZ A M. Exact solutions with solitons and periodic structures for the Zakharov-Kuznetsov (ZK) equation and its modified form[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2005, 10(6): 597-606.
- [5] WAZWAZ A M. The extended tanh method for the Zakharov-Kuznetsov (ZK) equation, the modified ZK equation, and its generalized forms[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, 13(6): 1039-1047.
- [6] KOLEBAJE O T, AKINYEMI P, OBENDE M. Travelling wave solutions of the generalized Zakharov-Kuznetsov equation via the extended generalized Riccati equation mapping method[J]. International Journal of Advanced Mathematical Sciences, 2013, 1(1): 1-7.
- [7] OGAWA T. Travelling wave solutions to a perturbed Korteweg-de Vries equation[J]. Hiroshima Mathematical Journal, 1994, 24(2): 401-422.
- [8] LI C Q, WEI M Z, LIN Y H. Existence of solitary waves in a perturbed KdV-mKdV equation[J]. Journal of Mathematics, 2021, 2021: 2270924.
- [9] 丘慧敏, 沈建和. 扰动浅水波方程的行波解和显式 Melnikov 方法[J]. 福建师范大学学报(自然科学版), 2021, 37(6): 14-21.
- [10] ZHENG H, XIA Y. The solitary wave, kink and anti-kink solutions coexist at the same speed in a perturbed nonlinear Schrödinger equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2023, 56(15): 155701.
- [11] FENICHEL N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations[J]. Journal of Differential Equations, 1979, 31(1): 53-98.
- [12] 赵爱民, 李美丽, 韩茂安. 微分方程基本理论[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 112.
- [13] 韩茂安. Bifurcation theory of limit cycles[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [14] GRADSHTEYN S, RYZHIK I M. Table of integrals, series and products[M]. Amsterdam: Academic Press, 2014: 3623.