

文章编号: 1004-4353(2020)04-0317-04

浅阱中双组份玻色爱因斯坦凝聚体的 激发态稳定性研究

周小燕, 梁青青, 赵春艳, 杨惠
(兰州文理学院 传媒工程学院, 甘肃 兰州 730000)

摘要: 应用变分法研究了囚禁在浅阱中双组份玻色爱因斯坦凝聚体激发态的稳定性. 结果显示: 凝聚体之间的相互作用系数对其稳定性具有至关重要的作用, 利用 Feshbach 共振技术调制原子之间的相互作用系数可以抑制凝聚体激发态的塌缩. 另外, 通过变分法计算得到了控制激发态塌缩的临界条件.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚; 双组份; 临界条件; 激发态; 塌缩

中图分类号: O469

文献标识码: A

The stability of excited states for two-component Bose-Einstein Condensates in the shallow trap

ZHOU Xiaoyan, LIANG Qingqing, ZHAO Chunyan, YANG Hui

(School of Communication Engineering, Lanzhou University of Arts and Science, Lanzhou 730000, China)

Abstract: The stability of excited states for two-component Bose-Einstein Condensates (BECs) trapped in a shallow trap is investigated using the variational method. The results show that the atom interaction coefficient between BECs plays an important role in their stabilizing. The collapse of the excited state of the BECs can be suppressed by modulating the interaction coefficient between atoms using Feshbach resonance. In addition, the critical condition for controlling the collapse of the excited state is also obtained using the variational method for calculating.

Keywords: BECs; two-component; critical condition; excited state; collapse

0 引言

1995 年, 美国科学家埃里克·康奈尔等在实验中首次发现了玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)^[1], 因 BEC 不仅可为研究量子力学的基本问题提供一个宏观系统, 而且可广泛应用于原子激光、精密测量、量子信息和量子计算等领域, 因此受到国内外学者的广泛关注^[2-9]. 近年来, 学者们对有限深势阱中单组份 BEC 的稳定性做了大量的研究, 结果表明影响 BEC 稳定性的因素较多, 如原子之间的相互作用, 势阱囚禁原子数目的多少, 凝聚原子与热原子之间的相互作用, 等等^[10-11]. 也有学者对有限深势阱中双组份 BECs 的稳定性进行了研究, 结果表明双组份 BECs 的稳定性更加复杂^[12-14]. 为进一步分析有限深势阱中双组份 BECs 激发态的稳定性, 本文在不考虑相分离和热原子影响的情况下, 利用变分法研究了有限深势阱中两组份凝聚体激发态的稳定性.

收稿日期: 2020-09-23

作者简介: 周小燕(1981—), 女, 讲师, 研究方向为理论物理.

基金项目: 兰州文理学院校级项目(17XJZZ08); 甘肃省高等学校创新基金资助项目(2020A-160)

1 浅阱中凝聚体满足的模型方程

浅阱中凝聚体所满足的模型方程^[15]为:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = [-\nabla^2 + V(r) + g_1 |\psi_1|^2 + g_{12} |\psi_2|^2] \psi_1, \\ i \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = [-\nabla^2 + V(r) + g_2 |\psi_2|^2 + g_{12} |\psi_1|^2] \psi_2. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r})$ 是二维拉普拉斯算子, g_1 和 g_2 表示同组份凝聚体原子内部的相互作用, g_{12} 表示不同组份凝聚体之间的原子相互作用, ψ 表示波函数, V 表示有效势. 由于本文研究的是双组份, 故采用的是 ^{87}Rb 原子的两种不同自旋态. 双组份原子的质量取 $m_1 = m_2 = m = 1.45 \times 10^{-25} \text{ kg}$, 特征长度取 $l_{z1} = l_{z2} = l = 2 \times 10^{-6} \text{ m}$. 浅阱中囚禁的原子数总量用 N 表示, N_1 和 N_2 分别表示不同组份的原子数目, $N = N_1 + N_2$.

2 浅阱中两组份凝聚体激发态的稳定性

为了研究浅阱中凝聚体激发态的稳定性, 令原子之间的相互作用系数 g_{12} ^[16-17] 为

$$g_{12}(t) = g_{120} [1 + \epsilon \sin(\omega t)]. \quad (2)$$

其中: g_{120} 表示组份间原子之间相互作用的常数部分, $g_{120}\epsilon$ 表示组份间的原子间相互作用的振荡部分, ω 表示振荡频率. 令组内原子之间的相互作用 g 为

$$g(t) = g_0 [1 + \epsilon \sin(\omega t)]. \quad (3)$$

其中: g_0 表示组内原子之间相互作用的常数部分, $g_0\epsilon$ 表示组内原子之间相互作用的振荡部分. 本文选用高斯型试探波函数(如式(4)所示)作为激发态的波函数.

$$\psi(r, t) = A_i(t) \exp\left[-\frac{r^2}{2R_i^2(t)} + \frac{i}{2}\beta_i(t)r^2 + i\alpha_i(t)\right]. \quad (4)$$

方程(1)所对应的拉格朗日表达式为

$$L(\psi_1, \psi_2) = \sum \left[\frac{i}{2} (\psi_i \psi_j^* - \psi_i^* \psi_j) - \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right|^2 - r^2 e^{-cr^2} |\psi_i|^2 - \frac{1}{2} g_1 |\psi_i|^4 \right] - g_{12} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2. \quad (5)$$

将方程(4) 带入方程(5) 可得到有效的拉格朗日表达式:

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} = \sum_{i=1,2} \left[-\frac{\pi A_i^2 \beta_i R_i^4}{2} - \pi A_i^2 \alpha_i R_i^2 - \pi A_i^2 - \pi A_i^2 \beta_i^2 R_i^4 - \frac{\pi A_i^2 R_i^4}{(1 + cR_i^2)^2} - \frac{\pi A_i^4 g_i R_i^2}{4} \right] - \\ g_{12} \pi A_1^2 A_2^2 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

利用方程 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{\gamma}(t)} = \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \gamma(t)}$ 对方程(6) 求导计算可得到如下关于凝聚体波包宽度的运动方程:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_i}{dt^2} = \frac{4}{R_i^3} + \frac{4R_i(cR_i^2 - 1)}{(1 + cR_i^2)^3} + \frac{g_i N_i}{N \pi R_i^3} + \frac{4g_{ij} N_j R_i}{N \pi (R_i^2 + R_j^2)} = \\ - \frac{d}{dt} \left[\frac{g_i N_i}{2 \pi N R_i^2} + \frac{2g_{ij} N_j}{N \pi (R_1^2 + R_2^2)} + \frac{2(1 + 2cR_i^2 + c^2 R_i^4 + R_i^4)}{R_i + cR_i^3} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

式(7) 中, $i=1, 2$, $j=1, 2$ 且 $i \neq j$. 为计算方便, 令 $R_1 = R_2 = R$, $N_1 = N_2 = N/2$, $g_1(t) = g_2(t) = g(t) = g_0 [1 + \epsilon \sin(\omega t)]$, 则式(7) 可化简为

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{4R(cR^2 - 1)}{(1 + cR^2)^2} + \frac{8\pi + (g_0 + g_{120})[1 + \epsilon \sin(\omega t)]}{2\pi R^3}. \quad (8)$$

2.1 不调制相互作用系数时凝聚体的稳定性

当不调制相互作用系数,即 $\epsilon = 0$ 时,方程(8)可简化为

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{8\pi + g_0 + g_{120}}{2\pi R^3} + \frac{4R(cR^2 - 1)}{(1 + cR^2)^3}. \quad (9)$$

根据文献[15]的计算方法可计算出囚禁在浅阱系统中的能量为

$$E_{2D} = \frac{[\dot{R}^2 + (g_0 + g_{120} + 8\pi)/4\pi R^2]}{2}. \quad (10)$$

由式(10)可知:当 $8\pi + g_0 + g_{120} > 0$, $R \rightarrow 0$ 时,波包趋于扩散,能量 $E_{2D} \rightarrow \infty$. 当 $8\pi + g_0 + g_{120} < 0$ 时,波包趋于塌缩,能量 $E_{2D} \rightarrow -\infty$. 因此可得出激发态波包塌缩的临界条件为

$$g_0 + g_{120} + 8\pi < 0. \quad (11)$$

由式(11)可知,两组份凝聚体在下列情况下发生塌缩:组内间的原子相互吸引,而组份间的原子相互排斥;或组内间的原子相互排斥,而组份间的原子相互吸引. 由此可见,两组份凝聚体能量的塌缩条件决定了两组分凝聚体的动力学特性.

2.2 调制相互作用系数时凝聚体的稳定性

为了说明调制原子之间相互作用的效果,本文将 $R(t)$ 分成慢变部分 $A(t)$ 和快变部分 $B(t)$, 即:

$$R(t) = A(t) + B(t), \text{ 且 } |B(t)| \ll |A(t)|. \quad (12)$$

将式(12)代入式(8)中可得到如下方程:

$$\frac{d^2 B}{dt^2} = \frac{G\epsilon \sin \omega t}{2\pi A^3} - \frac{3GB}{2\pi A^4} - \frac{12B}{A^4} - 4B - 180c^2 A^4 B + 48cA^2 B, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dt^2} = & \frac{8\pi + G}{2\pi A^3} + \frac{24\langle B^2 \rangle}{A^5} + \frac{3G\langle B^2 \rangle}{\pi A^5} - \frac{3G\langle B\epsilon \sin \omega t \rangle}{2\pi A^4} + 48cA\langle B^2 \rangle - \\ & 360c^2 A^3 \langle B^2 \rangle - 4A + 16cA^3 - 36c^2 A^5. \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)中, $G = g_0 + g_{120}$, 快变部分的相对时间的平均导数用 $\langle \dots \rangle$ 表示. 在求解方程(13)时,可将慢变部分 A 视为常数,由此求得方程(13)的解为

$$B(t) = \frac{-AG\epsilon \sin(\omega t)}{2\pi\omega^2 A^4 - 24\pi - 3G + 96c\pi A^6 - 360\pi c^2 A^8 - 8\pi A^4}. \quad (15)$$

将方程(15)代入式(14)中,即可得到如下关于慢变 A 部分的表达式:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dt^2} = & A^{-3} \left\{ \frac{8\pi + G}{2\pi} - 4A^4 + 16cA^6 - 36c^2 A^8 + \frac{1}{4\pi} \times \right. \\ & \left. \left[\frac{48\pi G^2 \epsilon^2 + 12G^2 \epsilon^3 + 96\pi c G^2 \epsilon^2 A^6 - 720\pi c^2 G^2 \epsilon^2 A^8}{2\pi\omega^2 - 24\pi - 8\pi A^4 - 3G + 96\pi c A^6 - 360\pi c^2 A^8} \right] \times \right. \\ & \left. \frac{3G^2 \epsilon^2}{2\pi\omega^2 - 24\pi - 8\pi A^4 - 3G + 96\pi c A^6 - 360\pi c^2 A^8} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

当 $A \rightarrow 0$ 时,方程(16)变为

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = A^{-3} \left[\frac{6(8\pi + G)^2 + \epsilon^2 G^2 (G - 8\pi)}{12\pi(8\pi + G)} \right]. \quad (17)$$

方程(17)相当于一个振动方程. 由方程(17)可知,当原子之间相互作用系数 ϵ 满足 $\epsilon^2 > \frac{6(8\pi + G)^2}{G^2(8\pi - G)}$ 时,

凝聚态的稳定性相对于相互作用系数无调制时的塌缩情况发生了较大变化,即当 $8\pi + G < 0$ 时系统出现的是反弹而不是塌缩. 由此可知,式(17)能够保证凝聚体具有稳定行为,并由此可得出控制双组份凝聚体激发态塌缩的临界条件为:

$$\epsilon > \left| \frac{\sqrt{6(8\pi + G)}}{G\sqrt{8\pi - G}} \right|. \quad (18)$$

由式(18)可知,只要通过 Feshbach 共振技术来调制原子之间的相互作用,并满足式(18),就可以抑制双组份凝聚体的塌缩.

参考文献:

- [1] ANDERSON M H, ENSHER J R, MATTHEWS M R. Observation of Bose-Einstein Condensation in a dilute atomic vapor[J]. Science, 1995,269:198-201.
- [2] HALL D S, MATTHEW M R, ENSHER J R, et al. Dynamics of component separation in a binary mixture of Bose-Einstein Condensates[J]. Phys Rev Lett, 1998,81(8):1539-1542.
- [3] KLAUS M. Bose Condensate and Fermi gases at zero temperature[J]. Phys Rev Lett, 1998,80(9):1804-1807.
- [4] SCOTT GRAEME. Efficient generation of nearly diffraction free-beams using an axicon[J]. Opt Eng, 1992,31(12):2640-2643.
- [5] ARIT J, DHOLAKIA K. Generation of highorder Bessel beams by use of an axicon[J]. Opt Commun, 2000,177(1/6):297-301.
- [6] MATTHEWS M R, ANDERSON B P, HALJAN P C, et al. Vortices in a Bose-Einstein Condensate[J]. Phys Rev Lett, 1999,83(3):2498-2501.
- [7] MODUGNO M, DALFOVO F, FORT C, et al. Dynamics of two colliding Bose-Einstein Condensate in a elongated magnetostatic trap[J]. Phys Rev A, 2000,62(6):063607(1-7).
- [8] PU H, BIGELOW N P. Collectations excitation and nonlinear response of a trapped two-species Bose-Einstein Condensate[J]. Phys Rev Lett, 1998,80(6):1134-1137.
- [9] HALL D S, MATTHEWS M R, ENSHER J R, et al. Dynamics of component separation in a Binary mixture of Bose-Einstein Condensate[J]. Phys Rev Lett, 1998,81(20):4531-4534.
- [10] KRAMER M, PITAEVSKII L, STRINGARI S. Macroscopic dynamics of a trapped Bose-Einstein Condensate in the presence of 1D and 2D optical lattices[J]. Phys Rev Lett, 2002,88(18):180404(1-4).
- [11] ZHOU X Y, MU A X, XUE J K. The stability of Bose-Einstein Condensate in the shallow trap[J]. Chin Phys, 2007,16(11):3197-3200.
- [12] SABARI S, RAJA R V J, PROSEZIAN K, et al. Stability of trapless Bose-Einstein Condensates with two-and-three interactions[J]. Phys B: At Mol Opt Phys, 2010,43(12):125302.
- [13] ZHOU J W, LI X X, GAO R. Modulational instability of trapped two-component Bose-Einstein Condensates[J]. Chin Phys Lett, 2019,36(9):090302.
- [14] 陈海军,李高清,薛具奎. 变分法研究一维 Bose-Fermi 系统的稳定性[J]. 物理学报,2011,60(4):41-45.
- [15] 周小燕,梁青青,赵春艳. 组份玻色爱因斯坦凝聚体基态的稳定性研究[J]. 延边大学学报(自然科学版),2020,46(1):37-39.
- [16] BERGE L, MEZENTSEV V K, JUUL J. Rasmussen self-guiding light in layered nonlinear media[J]. Opt Lett, 2000,25(14):1037-1039.
- [17] YUKALVO V O, MARZIN K P, YUKALOVA E P. Resonant generation of topological modes in trapped Bose gases[J]. Phys Rev A, 2000,69:023620.