

文章编号: 1004-4353(2020)04-0308-09

# 绝热捷径技术在纠缠制备中的对比研究

邓灿, 计新\*

( 延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002 )

**摘要:** 为对比 Lewis-Riesenfeld (LR) 不变量、无跃迁量子驱动、超绝热迭代和缀饰态 4 种绝热捷径技术在制备纠缠态时的性能, 在介绍 LR 不变量、无跃迁量子驱动、超绝热迭代以及缀饰态的基础上, 基于控制变量的物理思想从多角度对比分析了这 4 种绝热捷径技术在制备纠缠态时的优缺点. 对比结果表明, 这 4 种绝热捷径技术均能快速实现高保真度和对环境鲁棒的纠缠, 但由于构建绝热捷径的方式不同, 这 4 种绝热捷径技术均存在不同的限制. 因此, 对于不同的实验要求和实验条件, 应灵活选择不同的绝热捷径技术.

**关键词:** Lewis-Riesenfeld 不变量; 无跃迁量子驱动; 超绝热迭代; 缀饰态

中图分类号: O431

文献标识码: A

## A comparative study on shortcut-to-adiabaticity techniques in the generation of entangled states

DENG Can, JI Xin\*

( College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China )

**Abstract:** In order to compare the performance of four shortcut-to-adiabaticity techniques, including Lewis-Riesenfeld (LR) invariant, transitionless quantum driving, superadiabatic iterations and dressed state, in the generation of entanglement, based on the introduction of LR invariant, transitionless quantum driving, superadiabatic iterations and dressed state, the advantages and disadvantages of these four shortcuts to adiabaticity are compared in the preparation of entangled states from multiple perspectives based on the physical ideas of control variable. The results indicate that all four kinds of shortcut-to-adiabaticity schemes can quickly achieve the entanglement of high fidelity and robust to the environment, however, they have different limitations due to the different ways of constructing shortcut to adiabaticity. Therefore, for different experimental requirements and conditions, different techniques should be selected flexibly.

**Keywords:** Lewis-Riesenfeld invariant; transitionless quantum driving; superadiabatic iterations; dressed state

## 0 引言

量子纠缠是量子计算和量子通信的基础, 目前被广泛应用于密钥分配<sup>[1]</sup>、隐形传送<sup>[2]</sup>、密集编码<sup>[3]</sup>等领域. 如何通过精确控制光子、原子等微观粒子制备出高保真度的纠缠一直是学者研究的主要内容. 研究<sup>[4-5]</sup>显示, 利用绝热演化可以精准地制备出高保真度和对环境鲁棒的纠缠, 但该方法因受到绝热近似的限制, 使得量子系统的演化时间非常长, 进而会导致退相干、损耗以及噪声积累等. 2010 年, 陈玺等<sup>[6]</sup>首次提出了加速绝热演化过程的绝热捷径技术, 并引起诸多学者的关注. 近年来, 学者们在陈玺等研究的基础上又提出了多种绝热捷径技术, 主要有 Lewis-Riesenfeld (LR) 不变量<sup>[7-8]</sup>、无跃迁量子驱动<sup>[9-10]</sup>、

收稿日期: 2020-05-07

基金项目: 国家自然科学基金地区项目(11464046)

\* 通信作者: 计新(1965—), 女, 博士, 教授, 研究方向为量子光学与量子信息学.

超绝热迭代<sup>[11-12]</sup>以及缀饰态<sup>[13-14]</sup>等。目前,绝热捷径技术已广泛应用于逻辑门构建<sup>[15]</sup>、纠缠制备<sup>[16]</sup>、原子冷却<sup>[17]</sup>、量子退火<sup>[18]</sup>、光机械<sup>[19]</sup>等领域,而且还由绝热捷径技术引申出了量子限速<sup>[20]</sup>、不确定性关系<sup>[21]</sup>、多重薛定谔绘景<sup>[11]</sup>以及最大冷却速率<sup>[22]</sup>等概念。但目前为止,对 LR 不变量、无跃迁量子驱动、超绝热迭代以及缀饰态这 4 种绝热捷径技术进行对比分析的文献尚无报道,为此本文在介绍这 4 种绝热捷径技术的基础上,从制备速度、保真度、激励脉冲、布居转移情况以及对环境的鲁棒性等方面对这 4 种绝热捷径技术制备纠缠态的方案进行对比分析,以为在实际应用中选择合适的纠缠制备方案提供参考。

## 1 4 种绝热捷径技术的原理

### 1.1 LR 不变量

LR 不变量理论由 Lewis 和 Riesenfeld<sup>[9]</sup>于 1969 年提出,该理论适用于由含时哈密顿量  $H(t)$  驱动演化的量子系统,系统的含时厄米不变量算符  $I(t)$  满足

$$i\hbar \frac{\partial I(t)}{\partial t} = [H(t), I(t)]. \quad (1)$$

含时薛定谔方程  $i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t)|\psi(t)\rangle$  的解可看作是由不变量  $I(t)$  的含时本征态  $|\Phi_n(t)\rangle$  组成的叠加态,即  $|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n e^{i\alpha_n} |\Phi_n(t)\rangle$ , 其中:  $C_n$  为不含时的振幅;  $|\Phi_n(t)\rangle$  为不变量  $I(t)$  的正交特征向量, 表示为

$$I(t) = \sum_n |\Phi_n(t)\rangle \lambda_n \langle \Phi_n(t)|. \quad (2)$$

式(2)中:  $\lambda_n$  为实数;  $\alpha_n$  为 Lewis-Riesenfeld 相位, 表示为  $\alpha_n = \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' \langle \Phi_n(t') | i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - H(t') | \Phi_n(t') \rangle$ .

当系统的初态恰好是不变量的某个本征态时,系统会一直沿着初态演化而不会跃迁到其他的本征态,因此利用不变量的本征态可以构建出驱动系统演化的哈密顿量. 构建该哈密顿时,可先对系统实施一个如下的么正操作:

$$U = \sum_n e^{i\alpha_n(t)} |\Phi_n(t)\rangle \langle \Phi_n(0)|. \quad (3)$$

然后通过求解  $i\hbar \dot{U} = H(t)U$  可得

$$H(t) = -\hbar \sum_n |\Phi_n(t)\rangle \dot{\alpha}_n \langle \Phi_n(t)| + i\hbar \sum_n |\partial_t \Phi_n(t)\rangle \langle \Phi_n(t)|. \quad (4)$$

若  $I(0)$  与  $H(0)$  不对易,则  $I(0)$  的本征态  $|\Phi_n(t)\rangle$  与  $H(0)$  的本征态不相同. 同理,若  $I(t_f)$  与  $H(t_f)$  不对易,则  $I(t_f)$  的本征态  $|\Phi_n(t_f)\rangle$  与  $H(t_f)$  的本征态也不相同. 因此,通过设置  $[H(0), I(0)] = 0$  和  $[H(t_f), I(t_f)] = 0$ , 即可实现系统哈密顿量的本征态和不变量的本征态在初始时刻和最终时刻相同, 由此实现量子态布居的完美转移。

### 1.2 无跃迁量子驱动

无跃迁量子驱动方法由 Berry<sup>[9]</sup>于 2009 年提出,该理论适用于研究含时量子系统,控制系统演化的原始哈密顿量  $H_0$  为

$$H_0(t) = \sum_n |n(t)\rangle E_n(t) \langle n(t)|. \quad (5)$$

$H_0$  的绝热近似解为  $|\psi_n(t)\rangle = e^{i\xi_n(t)} |n(t)\rangle$ , 式中  $\xi_n$  为绝热相位,其表达式为

$$\xi_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t') + i \int_0^t dt' \langle n(t') | \partial_{t'} n(t') \rangle. \quad (6)$$

该技术通过构造一个反向导热哈密顿项  $H_{\text{CD}}(t) = i\hbar \dot{U} U^\dagger$  使系统精确地沿着原始哈密顿量  $H_0(t)$  的绝热通道演化,其中么正算符  $U(t)$  为

$$U(t) = \sum_n e^{i\xi_n(t)} |n(t)\rangle \langle n(0)|. \quad (7)$$

将式(7)代入  $H_{CD}(t)$  得:

$$H(t) = H_0(t) + H_{CD}(t), \quad (8)$$

$$H_{CD}(t) = i\hbar \sum_n [|\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)| - \langle n(t)| \partial_t n(t)\rangle |n(t)\rangle \langle n(t)|]. \quad (9)$$

其中,  $H_{CD}$  是非对角的厄米算符. 当  $t < 0$  和  $t > t_f$  时,  $H_{CD}(t)$  项变为 0. 此时  $|n(t)\rangle$  可视为无跃迁哈密顿量  $H(t)$  的本征态, 则无跃迁哈密顿量可以表示为

$$H(t) = -\hbar \sum_n |n(t)\rangle \xi_n(t) \langle n(t)| + i\hbar \sum_n |\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)|. \quad (10)$$

将式(10)减去  $H_{CD}(t)$  即可得  $H_0 = \hbar \sum_n |n(t)\rangle [-\dot{\xi}_n + i\langle n(t)| \partial_t n(t)\rangle] \langle n(t)|$ .

### 1.3 超绝热迭代

1987 年, Berry<sup>[23]</sup> 首次提出了超绝热迭代的概念. 2012 年, Ibanez 等<sup>[11]</sup> 在绝热迭代的基础上构建了绝热捷径通道, 该技术使用的仍是一个由含时原始哈密顿量驱动演化的系统, 其演化过程满足薛定谔方程

$$i\hbar \partial_t |\phi_0(t)\rangle = H_0(t) |\phi_0(t)\rangle. \quad (11)$$

该技术首先利用幺正算符  $A_0(t) = \sum_n |n_0(t)\rangle \langle n_0(0)|$  定义了如下相互作用绘景下的态函数:

$$|\phi_1(t)\rangle = A_0^\dagger(t) |\phi_0(t)\rangle. \quad (12)$$

然后结合式(11)和式(12)给出了如下相互作用绘景方程:

$$i\hbar \partial_t |\phi_1(t)\rangle = H_1(t) |\phi_1(t)\rangle. \quad (13)$$

其中:  $H_1(t)$  是有效相互作用哈密顿量,  $H_1(t) = A_0^\dagger(t) [H_0(t) - K_0(t)] A_0(t)$ ;  $K_0(t)$  是耦合项,  $K_0 = i\hbar \dot{A}_0 A_0^\dagger$ . 若  $K_0(t) = 0$ , 则  $H_1(t)$  在基矢  $\{|n_1(0)\rangle\}$  中对角化, 由此相互作用绘景变成一个有解的非耦合系统, 其解为  $|\phi_1(t)\rangle = U_1(t) |\phi_1(0)\rangle$ , 其中  $U_1(t)$  为非耦合系统的幺正演化算子, 可表示为:

$$U_1(t) = \sum_n |n_0(0)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n^{(0)}(t') dt'} \langle n_0(0)|. \quad (14)$$

然后通过构建  $A_0(0) = 1$ , 使  $|\phi_1(0)\rangle = |\phi_0(0)\rangle$  成立, 由此态函数可从  $|\phi_0(t)\rangle = A_0(t) |\phi_1(t)\rangle$  演化为如下形式:

$$|\phi_0^{(1)}(t)\rangle = \sum_n |n_0(t)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n^{(0)}(t') dt'} \langle n_0(0)| \phi_0(0)\rangle. \quad (15)$$

当  $K_0(t)$  不为零时, 系统在非绝热条件下进行演化, 其演化结果与由原始哈密顿量  $H_0(t)$  驱动演化的结果近似; 当在相互作用绘景哈密顿量中加入反向导热项  $A_0^\dagger(t) K_0(t) A_0(t)$  时, 即可实现式(15)的精确演化. 修正后的相互作用绘景哈密顿量为  $H^{(1)}(t) = H_1(t) + A_0^\dagger(t) K_0(t) A_0(t) = A_0^\dagger(t) H_0(t) A_0(t)$ , 修正后的薛定谔绘景哈密顿量为  $H_0^{(1)}(t) = H_0(t) + H_{cd}^{(0)}(t)$ , 其中  $H_{cd}^{(0)}(t) = K_0(t)$ , 并且只有当  $K_0(0) = K_0(t_f) = 0$  时,  $H^{(1)}(0) = H_0(0)$  和  $H^{(1)}(t_f) = H_0(t_f)$  才成立.

在第 2 次迭代中, 该技术利用幺正算符  $A_1 = \sum_n |n_1(t)\rangle \langle n_1(0)|$  进一步定义了如下二次相互作用绘景下的波函数:

$$|\phi_2(t)\rangle = A_1^\dagger(t) |\phi_1(t)\rangle. \quad (16)$$

然后结合式(13)和式(16)给出了如下二次相互作用绘景方程:

$$i\hbar \partial_t |\phi_2(t)\rangle = H_2(t) |\phi_2(t)\rangle. \quad (17)$$

其中,  $H_2(t) = A_1^\dagger(t) [H_1(t) - K_1(t)] A_1(t)$ ,  $K_1 = i\hbar \dot{A}_1 A_1^\dagger$ . 当  $K_1(t) = 0$  时, 系统在一阶超绝热条件下进行演化. 在二次相互作用绘景中, 驱动系统演化的波函数为  $|\phi_2(t)\rangle = U_2(t) |\phi_2(0)\rangle$ . 其中,  $U_2(t)$  是在二次相互作用绘景下非耦合系统中的幺正演化算子, 可表示为

$$U_2(t) = \sum |n_1(0)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n^{(1)}(t') dt'} \langle n_1(0) |. \quad (18)$$

然后通过进一步构建  $A_0(0) = A_1(0) = 1$ , 使  $|\psi_2(0)\rangle = |\psi_0(0)\rangle$  成立. 因此, 相应地可将相互作用绘景下的态函数  $|\psi_0^{(2)}(t)\rangle = U_0(t)U_1(t)U_2(t)|\psi_2(0)\rangle$  转换为如式(19)所示的薛定谔绘景形式:

$$|\psi_0^{(2)}(t)\rangle = \sum_n \sum_m |m_0(t)\rangle \langle m_0(0) | n_1(t) \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n^{(1)}(t') dt'} \times \langle n_1(0) | \psi_0(0) \rangle. \quad (19)$$

在二次相互作用绘景哈密顿量中加入反向导热项  $A_1^\dagger K_1 A_1$ , 即可实现式(19)的精确演化. 二次修正后的相互作用绘景哈密顿量为  $H^{(2)}(t) = H_2 + A_1^\dagger K_1 A_1 = A_1^\dagger H_1 A_1$ , 修正后的薛定谔绘景哈密顿量变为  $H_0^{(2)}(t) = H_0(t) + H_{cd}^{(1)}(t)$ , 其中  $H_{cd}^{(1)} = A_0(t)K_1(t)A_0^\dagger(0)$ . 最后通过令  $K_1(0) = K_1(t_f) = 0$ , 即可使在超绝热框架下的量子态布居在初始时刻和终止时刻都与绝热框架下的布居相同.

#### 1.4 缀饰态

2016年, Baksic等<sup>[13]</sup>首次提出了一种利用缀饰态来加速绝热过程的方法, 该方法仍适用于研究含时系统. 驱动系统演化的原始哈密顿为  $H_0(t)$ , 波函数为  $\psi(t)$ . 该技术首先对原始系统做旋转变换  $|\phi_1(t)\rangle = U(t)^\dagger |\psi(t)\rangle$ , 其中么正算符  $U(t) = \sum_n |\varphi_n(t)\rangle \langle n|$ ;  $\{|n\rangle\}$  为一组不含时的态. 因为  $\{|\varphi_n(t)\rangle\}$  为原始哈密顿量  $H_0(t)$  的瞬时本征态, 所以经该旋转变换后的绘景被称为绝热绘景. 在绝热绘景下, 驱动系统演化的哈密顿量可表示为

$$H_{ad}(t) = U^\dagger(t)H_0(t)U(t) + W(t) = \sum_n E_n(t) |n\rangle \langle n| - iU^\dagger(t)\dot{U}(t). \quad (20)$$

式(20)中  $W(t) = -iU^\dagger(t)\dot{U}(t)$ , 因  $W(t)$  含有联系  $H_0(t)$  的各个瞬时本征态的非对角矩阵元素, 因此系统会产生非绝热误差. 为此该技术引入了修正哈密顿量  $H_{co}(t)$  来修正系统产生的非绝热误差, 由此修正后的哈密顿量可表示成  $H'(t) = H_0(t) + H_{co}(t)$ . 因此, 在绝热绘景下修正后的哈密顿量变为

$$H_{ad}'(t) = U^\dagger(t)H_0(t)U(t) + U^\dagger(t)H_{co}(t)U(t) + W(t) = \sum_n E_n(t) |n\rangle \langle n| + U^\dagger(t)H_{co}(t)U(t) - iU^\dagger(t)\dot{U}(t) = H_{ad}(t) + U^\dagger(t)H_{co}(t)U(t). \quad (21)$$

然后再对式(21)控制的系统做一次旋转变换  $|\psi_2(t)\rangle = V(t)^\dagger |\phi_1(t)\rangle$ , 其中  $\{|\tilde{\varphi}_n(t)\rangle\}$  为一组缀饰态; 么正算符  $V(t) = \sum_n |\tilde{\varphi}_n(t)\rangle \langle n|$ . 么正算符  $V(t)$  在初始时刻  $t_i$  和最终时刻  $t_f$  均满足条件  $V(t_i) = V(t_f) = 1$ . 因为  $\{|\tilde{\varphi}_n(t)\rangle\}$  为驱动系统演化的一组缀饰态, 所以经第2次旋转变换后的绘景被称为缀饰态绘景. 将绝热绘景下的  $H_{ad}'$  转换至缀饰态绘景下的  $H_V'$ :

$$H_V'(t) = V^\dagger(t)H_{ad}(t)V(t) + V^\dagger(t)U^\dagger(t)H_{co}(t)U(t)V(t) - iV^\dagger(t)\dot{V}(t). \quad (22)$$

最后对  $H_{co}$  进行设计, 使修正后的哈密顿  $H_V'$  和缀饰态  $\{|\tilde{\varphi}_n(t)\rangle\}$  满足  $\langle \tilde{\varphi}_m(t) | H_V'(t) | \tilde{\varphi}_n(t) \rangle = 0 (m \neq n)$ , 同时消除  $H_V(t)$  中不必要的非对角元素.

## 2 4种绝热捷径技术的对比

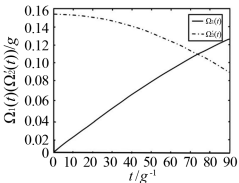
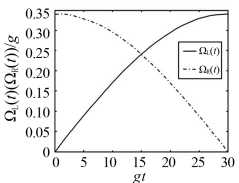
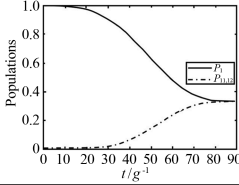
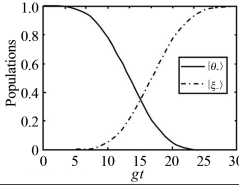
### 2.1 基于LR不变量的纠缠态制备

LR不变量技术最大的特点是在不改变原始哈密顿的形式下, 可通过直接设计驱动脉冲的方式来加快制备纠缠态的速度, 但在当前的实验条件下难以获得该驱动脉冲. 本文基于控制变量的物理思想, 对 Wu等<sup>[24]</sup>和 Huang等<sup>[25]</sup>在腔光纤耦合系统下基于LR不变量制备纠缠态的方案(特别是数值模拟结果部分)进行了对比分析, 如表1所示. 在表1中:  $t_f$  为纠缠达到最高保真度时系统的演化时间;  $\Omega(t)$  为驱动脉冲的拉比频率;  $\lambda, \epsilon, \nu, g$  为设置的相关参数;  $F(\gamma)$  和  $F(\kappa)$  分别表示保真度  $F$  与原子自发辐射率  $\gamma$ 、腔光子泄漏率  $\kappa$  间的关系(在短光纤极限下, 由于光纤光子泄漏对保真度的影响近似为零, 因此只需考虑  $\gamma$  和  $\kappa$  对保真度的影响).

由表1中的操作时间  $t_f$  可知, LR不变量方案制备纠缠的操作时间(80/g、90/g)显著低于受激拉曼

绝热过程方案制备纠缠的操作时间 $(200/g)^{[26]}$ ,这表明 LR 不变量方案能加快系统的演化速度,进而实现快速纠缠态;由表 1 中的函数  $F(\gamma)$  和  $F(\kappa)$  可知,LR 不变量方案能实现高保真度和对环境鲁棒的纠缠;由表 1 中的驱动脉冲的拉比频率表达式和形状可知,Wu 等和 Huang 等使用的脉冲  $\Omega_1(t)$  和  $\Omega_2(t)$  均是由在短时间内截取 2 个非周期简谐脉冲获得的,但这 2 个非周期简谐脉冲在当前的实验条件下难以实现. Wu 等理论制备的三维纠缠态为:  $|\Psi_{3D}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\Psi_1\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}|\Psi_2\rangle$ , 其中  $|\Psi_1\rangle = |\phi_1\rangle$ ,  $|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_{11}\rangle + |\phi_{12}\rangle)$ . 该系统演化结束后,若量子态  $|\phi_1\rangle$  和  $|\phi_{11(12)}\rangle$  的布居相等且均等于  $\frac{1}{3}$ ,则表明该方案能实现完美的布居转移. 同理, Huang 等理论制备的目标态为  $|\Psi_{GHZ}\rangle = |\xi_+\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_7\rangle + |\psi'_7\rangle)$ ,若系统演化结束后初态  $|\Psi\rangle = |\nu_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle + |\phi'_1\rangle)$  完全转换为  $|\Psi_{GHZ}\rangle$ ,则表明该方案可以实现完美的布居转移. 由表 1 中的量子态布居转移图像可知,LR 不变量方案可以实现完美的布居转移,即可实现纠缠态的有效制备.

表 1 基于 LR 不变量技术制备纠缠态的方案对比

对比内容	文献[24]	文献[25]
$t_f$	$80/g (\epsilon = 0.153)$	$90/g (\epsilon = 0.2561)$
$F(\gamma)$	$F(\gamma) = -2.25\gamma + 0.965, \kappa = 0.02$	$F(\gamma) = -1.441\gamma + 0.999, \kappa = 0.01$
$F(\kappa)$	$F(\kappa) = -1.43\kappa + 0.969, \gamma = 0.02$	$F(\kappa) = -0.482\kappa + 0.999, \gamma = 0.01$
拉比频率形式	$\Omega_1(t) = \frac{\sqrt{5} \arctan \sqrt{2}}{t_f} \cot \epsilon \sin \frac{\arctan \sqrt{2} t}{t_f}$ $\Omega_2(t) = \frac{\sqrt{5} \arctan \sqrt{2}}{t_f} \cot \epsilon \cos \frac{\arctan \sqrt{2} t}{t_f}$	$\Omega_1(t) = \frac{\lambda \pi \cot \epsilon}{2 \nu t_f} \sin \frac{\pi t}{2 t_f}$ $\Omega_2(t) = \frac{\lambda \pi \cot \epsilon}{2 \nu t_f} \cos \frac{\pi t}{2 t_f}$
拉比频率形状		
布居转移图像		

2.2 基于无跃迁量子驱动的纠缠态制备

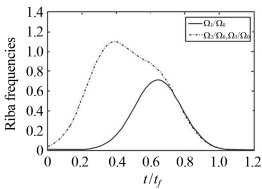
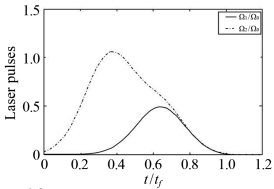
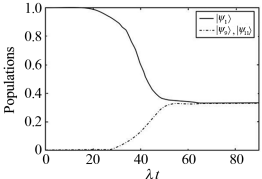
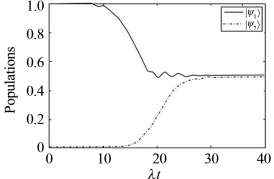
无跃迁量子驱动的关键是如何构造无跃迁哈密顿量  $H_{\text{TQD}}$ ,虽然无跃迁量子驱动技术对激励脉冲没有严苛的要求,但因在当前的实验条件下无法直接构造出无跃迁哈密顿量,因此只能通过引入辅助能级、失谐量等方式才可构建出与无跃迁哈密顿量等效的任意物理可行哈密顿量  $H_{\text{APF}}$ . 本文基于控制变量思想,对比分析了 Huang 等<sup>[27]</sup> 和 Chen 等<sup>[28]</sup> 在腔耦合模型下基于无跃迁量子驱动技术制备纠缠态的方案,如表 2 所示. 在表 2 中:  $t_f$  为纠缠达到最高保真度时系统的演化时间;  $\Omega(t)$  为驱动脉冲的拉比频率;  $\Omega_0$  为驱动脉冲的振幅;  $t_0, t_c$  为设置的参数.  $F(\gamma)$  和  $F(\kappa)$  分别表示保真度  $F$  与原子自发辐射率  $\gamma$ 、腔光子泄漏率  $\kappa$  的关系.

由表 2 中的  $t_f$  和函数  $F(\gamma)$ 、 $F(\kappa)$  可以看出,无跃迁量子驱动方案能快速制备高保真度的纠缠态,同时对原子自发辐射和腔衰减引起的退相干具有良好的鲁棒性;由表 2 中脉冲的拉比频率表达式和形状



可知, Huang 等和 Chen 等使用的激励脉冲  $\Omega_1(t)$  和  $\Omega_2(t)$  均是由高斯函数线性叠加组成的.  $\Omega_1(t)$  和  $\Omega_2(t)$  脉冲在当前实验条件下很容易获得. Huang 等制备的 W 态为:  $|\Psi_W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\Psi_1\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}|\Psi_2\rangle$ , 其中  $|\Psi_1\rangle = |\phi_1\rangle$ ,  $|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_9\rangle + |\phi_{11}\rangle)$ . 该系统演化结束后, 若量子态  $|\phi_1\rangle$  和  $|\phi_{11(12)}\rangle$  的布居均为  $\frac{1}{3}$ , 则表明该方案能实现完美的布居转移. Chen 等理论制备的纠缠态为  $|\Psi_{\text{GHZ}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle - |\phi_7\rangle)$ . 该系统演化结束后, 若  $|\phi_1\rangle$  与  $|\phi_7\rangle$  的布居完全相等, 则表明该方案也可以实现布居的完美转移. 由表 2 中的布居转移图可知, 在任意物理可行的哈密顿量  $H_{\text{APF}}$  的驱动演化下, 量子态布居实现了近似完美的转移, 但其对实验环境要求极高(稍微破坏 Zeno 条件, 量子态布居转移就会发生较大的偏差, 且偏离程度随系统复杂程度的增加而增加).

表 2 基于无跃迁量子驱动技术制备纠缠态的方案对比

对比内容	文献[27]	文献[28]
方法	引入失谐量	引入失谐量
$t_f$	$75/g (\Omega_0 = 0.2g)$	$35/g (\Omega_0 = 0.2g)$
$F(\gamma)$	$F(\gamma) = -2.175\gamma + 0.988, \kappa = 0.01$	$F(\gamma) = -0.135\gamma + 0.866, \kappa = 0.05$
$F(\kappa)$	$F(\kappa) = -0.339\kappa + 0.988, \gamma = 0.01$	$F(\kappa) = -2.394\kappa + 0.999, \gamma = 0.1$
拉比频率形式	$\Omega_1(t) = \Omega_0 \sin \alpha \exp \left[ \frac{-(t - t_0 - t_f/2)^2}{t_c^2} \right]$ $\Omega_2(t) = \Omega_0 \exp \left[ \frac{-(t + t_0 - t_f/2)^2}{t_c^2} \right] + \Omega_0 \cos \alpha \exp \left[ \frac{-(t - t_0 - t_f/2)^2}{t_c^2} \right]$	
拉比频率形状		
布居转移图像		

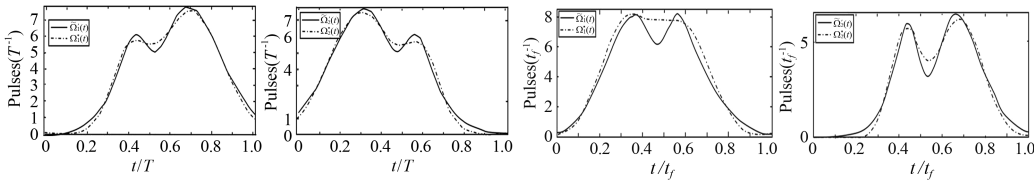

2.3 基于超绝热迭代的纠缠态制备

超绝热迭代技术首先是通过设计迭代相互作用绘景得到一系列的哈密顿函数, 然后再从中选择适用于特定目的的哈密顿函数. 利用该方案构建的超绝热哈密顿量与原始哈密顿量具有相同的形式, 且制备出的目标态与原始哈密顿制备出的目标态也相同, 但系统在演化过程中其激发态的布居很高, 导致系统的耗散较大. 本文基于控制变量的物理思想, 对比分析了 Huang 等<sup>[29]</sup> 和 Wu 等<sup>[30]</sup> 在腔耦合模型下基于超绝热迭代技术制备纠缠态的方案, 如表 3 所示. 表 3 中:  $t_f$  为纠缠达到最高保真度时系统的演化时间;  $\Omega(t)$  为脉冲的拉比频率;  $\tau, \chi$  为相关的参数;  $F(\gamma)$  和  $F(\kappa)$  分别表示保真度  $F$  与原子自发辐射率  $\gamma$ 、腔光子泄漏率  $\kappa$  的关系.

由表 3 的  $t_f$  和函数  $F(\gamma), F(\kappa)$  可以看出, 超绝热迭代技术也能快速制备出具有高保真度和对环境鲁棒的纠缠态. 将超绝热迭代技术的  $F(\gamma)$  和  $F(\kappa)$  与上述两种绝热捷径技术的  $F(\gamma)$  和  $F(\kappa)$  进行对比可知, 超绝热迭代技术对原子的自发辐射更加敏感. 由脉冲的拉比频率表达式和形状可知, Huang 等和 Wu 等所使用的驱动脉冲  $\Omega_1(t)$  和  $\Omega_2(t)$  也均是由高斯函数的线性叠加组成的. Huang 等理论制备的

GHZ 态可以表示为  $|\Psi_{\text{GHZ}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_7\rangle + |\psi_8\rangle)$ . 若该系统经过  $t_f$  时间演化后, 初态  $|\phi_1\rangle$  完全转换为  $|\phi_7\rangle$  和  $|\phi_8\rangle$ , 且  $|\phi_7\rangle$  和  $|\phi_8\rangle$  的布居均为  $\frac{1}{2}$ , 则表明该方案可以有效制备出 GHZ 态. Wu 等制备的纠缠态为  $|\psi_{\text{tree}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|\phi_1\rangle - |\phi_{17}\rangle - |\phi_{18}\rangle - |\phi_{19}\rangle - |\phi_{20}\rangle)$ . 若该系统从初态  $|\phi_1\rangle$  演化到  $|\psi_{\text{tree}}\rangle$  态, 且  $|\phi_1\rangle$ 、 $|\phi_{17}\rangle$ 、 $|\phi_{18}\rangle$ 、 $|\phi_{19}\rangle$ 、 $|\phi_{20}\rangle$  的布居均为  $\frac{1}{5}$ , 则表明该方案能实现树形三维纠缠的制备. 由表 3 中的量子态布居转移图可知, 超绝热迭代技术不需要满足严苛的实验条件就可实现布居的完美转移, 但系统在演化过程中因不能忽略激发态的布居, 因此超绝热迭代技术对原子自发辐射等耗散因素具有敏感性.

表 3 基于超绝热迭代技术制备纠缠态的方案对比

对比内容	文献[29]	文献[30]
$t_f$	$25/g (\Omega_0 = 0.5g)$	$80/g (\Omega_0 = 0.1g)$
$F(\gamma)$	$F(\gamma) = -5.4\gamma + 0.999, \kappa = 0.01$	$F(\gamma) = -2.36\gamma + 0.984, \kappa = 0.01$
$F(\kappa)$	$F(\kappa) \approx 1, \gamma = 0.01$	$F(\kappa) = -1.37\kappa + 0.937, \gamma = 0.01$
拉比频率形式	$\Omega_1(t) = \sum_{m=1}^2 \Omega_{1m} \exp\left[-\frac{(t-\tau_{1m})^2}{\chi_{1m}^2}\right]$ $\Omega_2(t) = \sum_{m=1}^2 \Omega_{2m} \exp\left[-\frac{(t-\tau_{2m})^2}{\chi_{2m}^2}\right]$	
拉比频率形状		
布居转移图像		

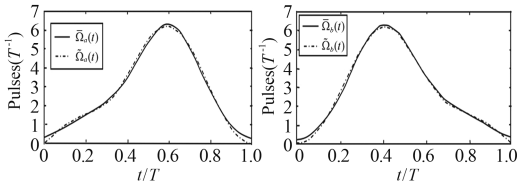
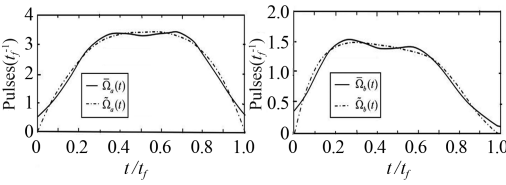
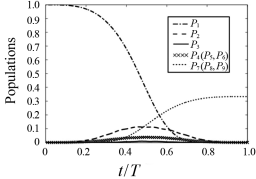
2.4 基于缀饰态的纠缠态制备

缀饰态方案在不需要额外耦合的情况下即可实现对绝热过程的加速, 同时通过选取合适的可控参数可以减少中间态的布居, 从而减少系统的耗散和提高目标态的保真度. 但在实际应用中, 缀饰态方案所应用的系统可能会沿未知路径演化, 由此会使得中间态的布居不受控制, 进而增加系统耗散. 基于控制变量的物理思想, 本文对比分析了 Kang 等<sup>[31]</sup> 和 Zhang 等<sup>[32]</sup> 在超导量子干涉装置中基于缀饰态制备纠缠态的方案, 如表 4 所示. 在表 4 中:  $t_f$  为操作时间;  $\Omega(t)$  为脉冲的拉比频率;  $\zeta$ 、 $\tau$ 、 $\chi$  为设置的参数;  $F(\gamma)$  和  $F(\kappa)$  分别表示保真度  $F$  与原子自发辐射率  $\gamma$ 、腔光子泄漏率  $\kappa$  的关系.

由表 4 中操作时间  $t_f$  可以看出, 缀饰态方案也能快速实现目标纠缠. 将缀饰态方案中  $F(\gamma)$  的斜率与 LR 不变量和无跃迁量子驱动方案中  $F(\gamma)$  的斜率进行对比可知, 缀饰态方案对原子的自发辐射更为敏感, 但当原子自发辐射率和腔衰减率达到较高数值时, 缀饰态方案也能实现高保真度的纠缠. 由表 4 中脉冲的拉比频率表达式和形状可知, Kang 等和 Zhang 等所使用的驱动脉冲  $\Omega_1(t)$  和  $\Omega_2(t)$  也均是由高斯函数的线性叠加组成的, 这表明在当前实验条件下缀饰态方案是可行的. Kang 等理论制备的 W 态为  $|\Psi_w\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\phi_7\rangle + |\phi_8\rangle + |\phi_9\rangle)$ . 在理想情况下, 系统演化  $t_f$  时间后  $|\phi_7\rangle$ 、 $|\phi_8\rangle$  和  $|\phi_9\rangle$  的布居均为  $\frac{1}{3}$ .

Zhang 等理论制备的目标态为  $|\Psi_{\text{GHZ}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle + |\phi_7\rangle)$ . 该系统演化结束后,理论上  $|\phi_1\rangle$  和  $|\phi_7\rangle$  的布居应相等. 由表 4 中的布居转移图像可知,缀饰态方案能有效制备出理想的目标纠缠.

表 4 基于缀饰态技术制备纠缠态的方案对比

对比内容	文献[31]	文献[32]
$t_f$	$30/g (\Omega_0 = 0.33g)$	$40/g (\Omega_0 = 10.3g)$
$F(\gamma)$	$F(\gamma) = -3.5\gamma + 0.99, \kappa = 0.01$	$F(\gamma) = -3.28\gamma + 0.977, \kappa = 0.01$
$F(\kappa)$	$F(\kappa) \approx 0.954, \gamma = 0.01$	$F(\kappa) \approx 0.964, \gamma = 0.01$
拉比频率形式	$\Omega_1(t) = \sum_{m=1}^2 \zeta_{1m} \exp\left[\frac{-(t-\tau_{1m})^2}{\chi_{1m}^2}\right]$ $\Omega_2(t) = \sum_{m=1}^2 \zeta_{2m} \exp\left[\frac{-(t-\tau_{2m})^2}{\chi_{2m}^2}\right]$	$\Omega_1(t) = \sum_{m=1}^2 \zeta_{1m} \exp\left[\frac{-(t-\tau_{1m})^2}{\sigma_{1m}^2}\right]$ $\Omega_2(t) = \sum_{m=1}^2 \zeta_{2m} \exp\left[\frac{-(t-\tau_{2m})^2}{\sigma_{2m}^2}\right]$
拉比频率形状		
布居转移图像		—

3 结论

对基于 LR 不变量、无跃迁量子驱动、超绝热迭代以及缀饰态这 4 种绝热捷径技术制备纠缠态的方案进行对比分析发现,这 4 种绝热捷径技术均能加速系统演化过程,且均能有效地实现高保真度和对环境鲁棒的纠缠. 另外,4 种绝热捷径技术在实现过程中也存在各自的局限性: LR 不变量方案中的脉冲在当前实验条件下难以实现;无跃迁量子驱动方案制备的目标态与由原始哈密顿量驱动制备的目标态相比存在一定偏差;超绝热迭代和缀饰态方案虽具有更高的可行性(不需要耦合系统的初态、末态和引入额外的参数来构建哈密顿量),但因系统演化路径包含激发态和演化路径不可控使得系统对原子自发辐射等耗散因素更加敏感,即其对环境的鲁棒性更弱. 综上,在实际应用中应根据不同的实验条件和精度要求灵活运用上述 4 种绝热捷径技术来实现目标态的制备.

参考文献:

[1] BENNETT C H, WIESNER S J. Communication via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states[J]. Physical Review Letters, 1992,69(20):2881-2884.

[2] BENNETT C H, BRASSARD G, CREPEAU C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. Physical Review Letters, 1993,70(13):1895-1899.

[3] ZHANG Z J, MAN Z X. Multiparty quantum secret sharing of classical messages based on entanglement swapping [J]. Physical Reviews A, 2005,72(3):15-19.

[4] SONG C, SU S L, WU J L, et al. Generation of tree-type three-dimensional entangled states via adiabatic passage [J]. Physical Reviews A, 2016,93(6):062321.

[5] WU J L, SONG C, XU J, et al. Adiabatic passage for one-step generation of  $n$ -qubit Greenberger-Horne-Zeilinger states of superconducting qubits via quantum Zeno dynamics[J]. Quantum Information Processing, 2016,15(9): 3663-3675.

[6] CHEN X, TORRONTAGUI E, MUGA J G. Lewis-Riesenfeld invariants and transitionless quantum driving[J].



- Physical Reviews A, 2011,83(6):062116.
- [7] LEWIS H R, RIESENFELD W B. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field[J]. Journal of Mathematical Physics, 1969,10(8):1458.
  - [8] LIANG Y, SONG C, JI X, et al. Fast CNOT gate between two spatially separated atoms via shortcuts to adiabatic passage[J]. Optics Express, 2015,23(18):23798.
  - [9] BERRY M V. Transitionless quantum driving[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009,42(36):365303(9).
  - [10] ZHANG J, KYAW T H, TONG D M, et al. Fast non-Abelian geometric gates via transitionless quantum driving [J]. Scientific Reports, 2015,5:18414.
  - [11] IBANEZ S, CHEN X, MUGA J G. Improving shortcuts to adiabaticity by iterative interaction pictures[J]. Physical Reviews A, 2013,87(4):043402.
  - [12] HATOMURA T, PAWŁOWSKI K. Superadiabatic generation of cat states in bosonic Josephson junctions under particle losses[J]. Physical Review A, 2019,99(4):043621.
  - [13] BAKSIC A, RIBEIRO H, CLERK A A. Speeding up adiabatic quantum state transfer by using dressed states[J]. Physical Review Letters, 2016,116(23):230503.
  - [14] WU J L, JI X, ZHANG S. Fast adiabatic quantum state transfer and entanglement generation between two atoms via dressed states[J]. Scientific Reports, 2017,7:46255.
  - [15] WU J L, JI X, ZHANG S. Dressed-state scheme for a fast CNOT gate[J]. Quantum Information Processing, 2016,16(12):294.
  - [16] YU L, XU J, WU J L, et al. Fast generating W state of three superconducting qubits via Lewis-Riesenfeld invariants[J]. Chinese Physics B, 2017,26(6):060306.
  - [17] CHEN X, RUSCHHAUPT A, SCHMIDT S, et al. Fast optimal frictionless atom cooling in harmonic traps: Shortcut to adiabaticity[J]. Physical Review Letters, 2010,104(6):063002.
  - [18] TAKAHASHI K. Shortcuts to adiabaticity for quantum annealing[J]. Physical Review A, 2017,95(1):012309.
  - [19] CHEN Y H, SHI Z C, SONG J, et al. Invariant-based inverse engineering for fluctuation transfer between membranes in an optomechanical cavity system[J]. Physical Review A, 2018,97(2):023841.
  - [20] BENDER C M, BRODY D C, JONES H F, et al. Faster than hermitian quantum mechanics[J]. Physical Review Letters, 2007,98(4):040403.
  - [21] CHEN X, MUGA J G. Transient energy excitation in shortcuts to adiabaticity for the time-dependent harmonic oscillator[J]. Physical Reviews A, 2012,82(5):3249-3253.
  - [22] REZEK Y, SALAMON P, HOFFMANN K, et al. The quantum refrigerator: the quest for absolute zero[J]. Europhysics Letters, 2009,85(3):30008.
  - [23] BERRY M V. Quantum phase corrections from adiabatic iteration[J]. Proceedings of the Royal Society A Mathematical Physical & Engineering Sciences, 1987,414(1846):31-46.
  - [24] WU J L, SONG C, JI X, et al. Fast generation of three-dimensional entanglement between two spatially separated atoms via invariant-based shortcut[J]. Journal of the Optical Society of America B, 2016,33(10):2026.
  - [25] HUANG X B, CHEN Y H, WANG Z. Fast generation of three-qubit Greenberger-Horne-Zeilinger state based on the Lewis-Riesenfeld invariants in coupled cavities[J]. Scientific Reports, 2016,6:25707.
  - [26] YU L, XU J, WU J L, et al. Fast generating W state of three superconducting qubits via Lewis-Riesenfeld invariants[J]. Chinese Physics B, 2017,26(6):47-52.
  - [27] HUANG X B, ZHONG Z R, CHEN Y H. Generation of multi-atom entangled states in coupled cavities via transitionless quantum driving[J]. Quantum Information Processing, 2015,14(12):4475-4492.
  - [28] CHEN Y H, XIA Y, SONG J, et al. Shortcuts to adiabatic passage for fast generation of Greenberger-Horne-Zeilinger states by transitionless quantum driving[J]. Scientific Reports, 2015,5(1):15616.
  - [29] HUANG B H, CHEN Y H, WU Q C, et al. Fast generating Greenberger-Horne-Zeilinger state via iterative interaction pictures[J]. Laser Physics Letters, 2016,13(10):105202.
  - [30] WU J L, SU S L, JI X, et al. Superadiabatic scheme for optimizing the fast generation of tree-type 3D entanglement[J]. Annals of Physics, 2017,386:34-43.
  - [31] KANG Y H, CHEN Y H, SHI Z C, et al. Fast preparation of W states with superconducting quantum interference devices by using dressed states[J]. Physical Review A, 2016,94(5):052311.
  - [32] ZHANG X, CHEN Y H, SHI Z C, et al. Generation of three-qubit Greenberger-Horne-Zeilinger states of superconducting qubits by using dressed states[J]. Quantum Information Processing, 2017,16(12):309.