文章编号： 1004-4353(2020)04-0295-07

Navier-Stokes 系统降维模型中线性反馈控制的分析与逼近

赵锦玮，　朴光日*
(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要： 讨论了 Navier-Stokes 系统降维模型的线性反馈控制问题. 首先介绍了特征正交分解方法(proper orthogonal decomposition，POD)，然后利用该方法建立了 Navier-Stokes 系统反馈控制问题的降维模型，最后运用 Ritz-Galerkin 方法估计了线性反馈控制问题的降维模型解与有限元解之间的误差，并给出了计算降维模型解和速度跟踪问题的算法.

关键词： Navier-Stokes 系统；降维模型；线性反馈控制
中图分类号： O242.21　　**文献标识码：** A

Analysis and approximation of linear feedback control in the reduced modeling for Navier-Stokes flows

ZHAO Jinwei，　PIAO Guangri*
(*College of Science*，*Yanbian University*，*Yanji* 133002，*China*)

Abstract：This paper discusses the linear feedback control of Navier-Stokes flows in a reduced-order modeling. Firstly，we introduce the proper orthogonal decomposition method. And then，use the method to establish a reduced-order modeling of the Navier-Stokes flows feedback control problem. Finally，we estimate the error between the finite element solution and the reduced-order modeling solution of the linear feedback control problem with the Ritz-Galerkin method，and propose algorithms for calculating the solution of reduced order modeling and velocity tracking problem.

Keywords：Navier-Stokes flows；reduced-order modeling；linear feedback control

0　引言

本文考虑如下 Navier-Stokes 系统的初边值问题：

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t - \nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f},\ (0,T)\times\Omega; \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0,\ (0,T)\times\Omega; \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0,\ (0,T)\times\partial\Omega; \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0,\ \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中：Ω 是有界开集；$\nu = \mathrm{Re}^{-1}$，Re 为 Reynolds 数；$\boldsymbol{u}$ 表示流体速度向量；p 为压力；$\boldsymbol{f}$ 为体积力.

Navier-Stokes 方程能够反映黏性流体流动的基本力学规律，因此该方程常被用于解决工程技术中

收稿日期： 2020-10-21　　**基金项目：** 吉林省科技发展计划项目(20180101215JC)
* **通信作者：** 朴光日(1968—)，男，博士，教授，研究方向为数值计算.

的流体力学问题.近年来,许多学者研究了 Navier-Stokes 方程最优控制问题的数学逼近理论,并且给出了求解非定常流动控制问题的数值方法[1-4].在对 Navier-Stokes 方程求解时,若采用有限元方法,则会出现一个非常大的非线性代数方程组,计算难度较大,尤其是对于反馈控制或最优化控制的问题.研究表明,利用降维法不仅可以保证计算的精度,节省计算机的内存,而且还可以大幅度提高计算效率.特征正交分解法[5]作为降维方法的一种,其实质是在最小二乘的意义下找到能够代表已知数据的正交基.在对 Navier-Stokes 方程降维模型的相关研究中,目前大多只是对其进行了数值分析,而对其进行理论分析的较少;因此,本文运用 POD 方法讨论 Navier-Stokes 系统降维模型的线性反馈控制问题,估计了线性反馈控制问题的降维模型解与有限元解之间的误差,并给出了计算降维模型解和跟踪速度问题的算法.

1 主要符号和 Navier-Stokes 方程的全离散格式

本文使用的是 Sobolev 空间 $H^m(\Omega)$,$H^m(\Omega)$ 的范数为 $\|\cdot\|_m$,特别地 $H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$,$\|\cdot\|_0=\|\cdot\|$.定义 $H_0^m(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_m$ 之下的闭包,$H^{-m}(\Omega)$ 是 $H_0^m(\Omega)$ 的对偶空间,且定义 $L_0^2(\Omega)=\{p\in L^2(\Omega):\int_\Omega p\mathrm{d}x=0\}$,无散度空间 $V(\Omega)=\{\boldsymbol{u}\in H_0^1(\Omega):\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\}$.

设 X 是 Ω 上的实 Hilbert 空间.对于任意一个 T,本文定义在 $(0;T)\times\Omega$ 上的时空函数空间 $L^p((0,T);X)=\{\boldsymbol{u}\in X;\int_0^T\|\boldsymbol{u}\|_X^p\mathrm{d}t<\infty\}$,它的范数为 $\|\boldsymbol{u}\|_{L^p((0,T);X)}=(\int_0^T\|\boldsymbol{u}\|_X^p\mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}$.为了定义 Navier-Stokes 系统的弱形式,下面给出 2 个双线性形式和 1 个三线性形式.2 个双线性形式为:

$$a_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=2\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega D_{ij}(\boldsymbol{u})D_{ij}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}x,\ \forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in H^1(\Omega);$$

$$a_2(\boldsymbol{v},q)=-\int_\Omega q\nabla\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x,\ \forall\,q\in L_0^2(\Omega),\ \forall\,\boldsymbol{v}\in H^1(\Omega),$$

其中 $D_{ij}(\boldsymbol{u})=(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i)/2$.

为了使给出的三线性形式具有反对称性[6],本文给出如下的三线性形式:

$$a_3(\boldsymbol{w};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\left(w_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}v_j-w_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}u_j\right)\mathrm{d}x,\ \forall\,\boldsymbol{w},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in H^1(\Omega).$$

上述三线性形式具有如下性质[6]:

$$a_3(\boldsymbol{w};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=-a_3(\boldsymbol{w};\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}),\ a_3(\boldsymbol{w};\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0,\tag{2}$$

$$M=\sup_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in X}\frac{|a_3(\boldsymbol{w};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|}{\|\nabla\boldsymbol{u}\|\|\nabla\boldsymbol{v}\|\|\nabla\boldsymbol{w}\|}.\tag{3}$$

当 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}=\{\boldsymbol{v}:\boldsymbol{v}\in C((0,T);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),\partial_t\boldsymbol{v}\in C((0,T);H^1(\Omega))\}$,称 $\boldsymbol{U}$ 为容许目标速度.本文将由 $\boldsymbol{U}$ 产生的体积力定义为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{U}_t(\boldsymbol{x},t)-\nu\Delta\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t).\tag{4}$$

若 $X=H_0^1(\Omega)$,$\boldsymbol{u}\in L^2((0,T);X)$、$p\in L^2(0,T;L_0^2(\Omega))$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\in L^2((0,T);L^2(\Omega))$ 分别表示速度场、压力场的状态变量和分布控制,则状态变量 $\boldsymbol{u}$ 和 p 满足如下约束条件,即 Navier-Stokes 方程的弱形式:

$$\begin{cases}\langle\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t},\boldsymbol{v}\rangle+a_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+a_2(\boldsymbol{u},p)+a_3(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle,\ \forall\,\boldsymbol{v}\in X;\\ a_2(\boldsymbol{u},q)=0,\ \forall\,q\in L_0^2(\Omega).\end{cases}$$

其中初始条件是 $\boldsymbol{u}_0$,边界条件等于零,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 和 $H^{-1}(\Omega)$ 之间的对偶配对.

为了给出 Navier-Stokes 系统的全离散格式,本文根据文献[6-10]分别定义 X 和 $L_0^2(\Omega)$ 的有限维

子空间 X_h 和 S_h：

$$X_h=\{\boldsymbol{v}_h\in C^0(\Omega)\cap X;\boldsymbol{v}_h|_K\in P_2(K),\forall K\in\wp_h\},$$

$$S_h=\{q_h\in C^0(\Omega)\cap L_0^2(\Omega);q_h|_K\in P_1(K),\forall K\in\wp_h\}.$$

其中 $\wp_h$ 是 $\overline{\Omega}$ 的三角剖分，$P_2(K)$ 和 $P_1(K)$ 分别是在 K 上次数不超过 2 和 1 的多项式.

令时间步长 $\Delta t=T/N$，瞬时时间 $t_n=n\Delta t$（N 是正数，$0\leqslant n\leqslant N$）. 给定 T，$\boldsymbol{f}\in X_h$ 和 $\boldsymbol{u}_0\in V(\Omega)$，若 $(\boldsymbol{u}_h^{(n)},p_h^{(n)})\in(X_h\times S_h)$（$n=1,2,\cdots,N$）满足以下系统：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{v}_h)+\Delta t\nu a_1(\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{v}_h)+\Delta t a_2(\boldsymbol{u}_h^{(n)},p_h^{(n)})+\Delta t a_3(\boldsymbol{u}_h^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{v}_h)=\\ \qquad(\Delta t\boldsymbol{f}^{(n)}+\boldsymbol{u}_h^{(n-1)},\boldsymbol{v}_h),\ \boldsymbol{v}_h\in X_h;\\ a_2(\boldsymbol{u}_h^{(n)},q_h)=0,\forall q_h\in S_h,\end{cases}\tag{5}$$

其中初始条件 $\boldsymbol{u}_h^{(0)}=\pi^h\boldsymbol{u}_0$，边界条件等于零，则称 $(\boldsymbol{u}_h^{(n)},p_h^{(n)})$ 为 Navier-Stokes 系统时空全离散的广义解[11].

2　POD 基的构造

构造 POD 基的方法[10] 如下：给定 $\boldsymbol{f}$、时间步长 Δt 和空间步长 h，然后通过求解系统(5)得到解的集合；从集合中取 $L(L\ll N)$ 个样本点 $\boldsymbol{u}_h^{(n_i)}(x)$（$1\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_L\leqslant N$），这些样本点即为 POD 方法中的瞬像. 令 $\boldsymbol{u}_i(x)=\boldsymbol{u}_h^{(n_i)}(x)$（$1\leqslant i\leqslant L$），$\mathscr{W}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_L\}$，并称 $\mathscr{W}$ 是由瞬像张成的空间，其中 $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^L$ 至少有一个非零元. 若定义 $\{\boldsymbol{\phi}_j\}_{j=1}^l$ 是 $\mathscr{W}$ 的标准正交基，则有

$$\boldsymbol{u}_i=\sum_{j=1}^{l}(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{\phi}_j)_X\boldsymbol{\phi}_j,\ i=1,2,\cdots,L,\tag{6}$$

其中 $(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{\phi}_j)_X=(\nabla\boldsymbol{u}_h^{(n_i)},\nabla\boldsymbol{\phi}_j)$，$X=H_0^1(\Omega)$.

构造 POD 方法的目的是通过求标准正交基 $\boldsymbol{\phi}_j$（$j=1,2,\cdots,L$）使元素 $\boldsymbol{u}_i$（$1\leqslant i\leqslant L$）与式(6)的 d 项和之间的均方误差最小，即通过求标准正交基 $\boldsymbol{\phi}_j$（$j=1,2,\cdots,L$）使

$$\min_{\{\boldsymbol{\phi}_j\}_{j=1}^d}\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left\|\boldsymbol{u}_i-\sum_{j=1}^{d}(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{\phi}_j)_X\boldsymbol{\phi}_j\right\|_X^2,\tag{7}$$

满足

$$(\boldsymbol{\phi}_i,\boldsymbol{\phi}_j)_X=\delta_{ij},\ 1\leqslant i\leqslant d,\ 1\leqslant j\leqslant i,\tag{8}$$

其中 $\|\boldsymbol{u}_i\|_X^2=\|\nabla\boldsymbol{u}_h^{(n_i)}\|^2$. 满足式(7)和式(8)的解 $\{\boldsymbol{\phi}_j\}_{j=1}^d$ 称为秩等于 d 的 POD 基.

引入瞬像集 $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^L$ 对应的相关矩阵 $\boldsymbol{A}=(A_{ij})_{L\times L}$，$A_{ij}=\dfrac{1}{L}(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)_X$. 则 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 l 的非负正定矩阵. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_l>0$，特征值对应的标准正交特征向量为 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_l$，则秩为 $d\leqslant l$ 的 POD 基可以写成 $\boldsymbol{\phi}_i=\dfrac{1}{\sqrt{L\lambda_i}}\sum\limits_{j=1}^{L}(\boldsymbol{v}_i)_j\boldsymbol{u}_j$，$1\leqslant j\leqslant d\leqslant l$，其中 $(\boldsymbol{v}_i)_j$ 表示特征向量 $\boldsymbol{v}_i$ 的第 j 个分量.

令 $X^d=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\phi}_1,\boldsymbol{\phi}_2,\cdots,\boldsymbol{\phi}_d\}$，且定义 Ritz 投影 $\pi^h:X\to X_h$（如果 π^h 被限制为是从 X_h 到 X^d 的 Ritz 投影，则将其记为 π^d，即 $\pi^h|_{X_h}=\pi^d:X_h\to X^d$ 和 $\pi^h:X\backslash X_h\to X_h\backslash X^d$），

$$(\nabla\pi^h\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}_h)=(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}_h),\forall\boldsymbol{v}_h\in X_h,\tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{u}\in X$. 线性算子 π^h 具有性质：$\|\nabla(\pi^h\boldsymbol{u})\|\leqslant\|\nabla\boldsymbol{u}\|,\forall\boldsymbol{u}\in X$.

引理 1[10]　对于 d（$1\leqslant d\leqslant l$）投影算子 π^d 有如下不等式成立：

$$\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\|\nabla(\boldsymbol{u}_h^{(n)}-\pi^d\boldsymbol{u}_h^{(n)})\|_0^2\leqslant\sum_{d+1}^{l}\lambda_j,$$

$$\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\|\boldsymbol{u}_h^{(n)}-\pi^d\boldsymbol{u}_h^{(n)}\|_0^2\leqslant Ch^2\sum_{d+1}^{l}\lambda_j,$$

其中 $\boldsymbol{u}_h^{(n)}\in\mathscr{W}$ 是系统(5)的解.

3 线性反馈控制问题的降维模型及其误差估计

将 X^d 和 S^d 分别定义为 X_h 和 S_h 的有限维子空间,并用投影 $\boldsymbol{U}_d=\pi^d\boldsymbol{U}_h(\boldsymbol{x},t_n)\in X^d$ 逼近 $\boldsymbol{U}$. 当 $\boldsymbol{U}\in H^2(\Omega)\cap X$ 时,由近似理论[12]可知,存在一个常数 C_1 使得 $\|\boldsymbol{U}_h^{(n)}-\boldsymbol{U}_d^{(n)}\|\leqslant C_1h^2\|\boldsymbol{U}_h^{(n)}\|_2$. 因此可将由 $\boldsymbol{U}$ 生成的体积力写成如下形式:

$$(\boldsymbol{F}_d^{(n)},\boldsymbol{v}_d)=\frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{U}_d^{(n)}-\boldsymbol{U}_d^{(n-1)},\boldsymbol{v}_d)+\nu a_1(\boldsymbol{U}_d^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+a_3(\boldsymbol{U}_d^{(n)};\boldsymbol{U}_d^{(n)},\boldsymbol{v}_d). \tag{10}$$

给定一个 T,且当 $\boldsymbol{f}^{(n)}\in X^d$ 和 $\boldsymbol{u}_0\in V(\Omega)$ 时,若 $(\boldsymbol{u}_d^{(n)},p_d^{(n)})\in(X^d\times S^d)$ $(1\leqslant n\leqslant N)$ 满足以下系统:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{u}_d^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+\Delta t\nu a_1(\boldsymbol{u}_d^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+\Delta t a_2(\boldsymbol{u}_d^{(n)},p_d^{(n)})+\Delta t a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)};\boldsymbol{u}_d^{(n)},\boldsymbol{v}_d)=\\ \qquad(\Delta t\boldsymbol{f}^{(n)}+\boldsymbol{u}_d^{(n-1)},\boldsymbol{v}_d),\ \forall\,\boldsymbol{v}_d\in X^d;\\ a_2(\boldsymbol{u}_d^{(n)},q_d)=0,\ \forall\,q_d\in S^d,\end{cases} \tag{11}$$

其中初始条件 $\boldsymbol{u}_d^{(0)}=\pi^d\boldsymbol{u}_0$,边界条件等于零,则称 $(\boldsymbol{u}_d^{(n)},p_d^{(n)})$ 为 Navier-Stokes 方程降维模型的广义解(降维解). 本文运用如下的线性反馈控制律

$$\boldsymbol{f}_d^{(n)}=\boldsymbol{F}_d^{(n)}-\gamma(\boldsymbol{u}_d^{(n)}-\boldsymbol{U}_d^{(n)}) \tag{12}$$

追踪速度场 $\boldsymbol{U}$,其中 $\gamma>H$, $H=\max\{0,-C(\nu-M\|\nabla\boldsymbol{U}\|_{L^\infty[(0,T);H^1(\Omega)]})\}$, C 是 Poincaré 常数. 当系统(11)中的 $\boldsymbol{f}_d^{(n)}$ 由式(12)定义时,根据文献[6]可知,使用稳态 Navier-Stokes 方程的标准方法即可证明系统(11)解的存在性.

引理 2[10] 若 $\boldsymbol{f}\in H^{-1}(\Omega)$, $\|\boldsymbol{u}\|_0\leqslant\nu^{-1/2}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(H^{-1})}$, $\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(L^2)}\leqslant\nu^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(H^{-1})}$,则系统(11)有唯一的一组解 $\boldsymbol{u}_d^{(n)}\in X^d$,且 $\|\boldsymbol{u}_d^{(n)}\|_0^2+\Delta t\nu\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\boldsymbol{u}_d^i\|_0^2\leqslant\Delta t\nu^{-1}\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{f}^i\|_{-1}^2$,其中 $\|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}}=\|\boldsymbol{f}\|_{-1}=\sup\limits_{\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)}\dfrac{|(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})|}{\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0}$.

引理 3 对于 $a,b>0$,任意 $\varepsilon>0$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,有 $ab\leqslant\varepsilon a^p+C(\varepsilon,p)b^q$.

引理 4[11] 当系统(5)的解 $\boldsymbol{u}_h^{(n)}\in\boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}$,有 $\|\boldsymbol{u}_h^{(n)}-\boldsymbol{U}_h^{(n)}\|^2\leqslant(1+2\kappa\Delta t)^{-n}\|\pi^h\boldsymbol{u}_0-\pi^h\boldsymbol{U}_0\|^2$,其中 $\kappa=\gamma+C(\nu-M\|\nabla\boldsymbol{U}\|_{L^\infty[(0,T);H^1(\Omega)]})>0$, C 为 Poincaré 常数.

定理 1 若 $\Delta t=O(h)$, $L^2=O(N)$,且均匀选取瞬像,则有限元解与降维模型解的误差估计为 $\|\boldsymbol{u}_h^{(n)}-\boldsymbol{u}_d^{(n)}\|\leqslant C\Delta t+C(h^{1/2}\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j)^{1/2}$, $n=1,2,\cdots,N$.

证明 用式(5)减去式(11),并令 $\boldsymbol{v}_h=\boldsymbol{v}_d\in X^d\subset X_h$ 可得

$$(\boldsymbol{u}_h^{(n)}-\boldsymbol{u}_d^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+\Delta t\nu a_1(\boldsymbol{u}_h^{(n)}-\boldsymbol{u}_d^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+\Delta t a_3(\boldsymbol{u}_h^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{v}_d)-\\ \Delta t a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)};\boldsymbol{u}_d^{(n)},\boldsymbol{v}_d)=(\boldsymbol{u}_h^{(n-1)}-\boldsymbol{u}_d^{(n-1)},\boldsymbol{v}_d).$$

由无散度条件可知,上式中的压力项为 0. 令 $\boldsymbol{u}_h^{(n)}-\boldsymbol{u}_d^{(n)}=(\boldsymbol{u}_h^{(n)}-\pi^d\boldsymbol{u}_h^{(n)})+(\pi^d\boldsymbol{u}_h^{(n)}-\boldsymbol{u}_d^{(n)})=\boldsymbol{\eta}^{(n)}+\boldsymbol{\psi}^{(n)}$,则对于

$$a_3(\boldsymbol{u}_h^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{v}_d)-a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)};\boldsymbol{u}_d^{(n)},\boldsymbol{v}_d)=a_3(\boldsymbol{u}_h^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{v}_d)-a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{v}_d)-\\ a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)};\boldsymbol{u}_d^{(n)},\boldsymbol{v}_d)=a_3(\boldsymbol{\eta}^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+a_3(\boldsymbol{\psi}^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)};\boldsymbol{\eta}^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)};\boldsymbol{\psi}^{(n)},\boldsymbol{v}_d),$$

有

$$(\boldsymbol{\eta}^{(n)}+\boldsymbol{\psi}^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+\Delta t\nu a_1(\boldsymbol{\eta}^{(n)}+\boldsymbol{\psi}^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+\Delta t a_3(\boldsymbol{\eta}^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+\Delta t a_3(\boldsymbol{\psi}^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+\\ \Delta t a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)};\boldsymbol{\eta}^{(n)},\boldsymbol{v}_d)+\Delta t a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)};\boldsymbol{\psi}^{(n)},\boldsymbol{v}_d)=(\boldsymbol{\eta}^{(n-1)}+\boldsymbol{\psi}^{(n-1)},\boldsymbol{v}_d).$$

令 $\boldsymbol{v}_d=\boldsymbol{\psi}^{(n)}$，则由式(9)和 $a_3(\boldsymbol{w};\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0$ 可得

$$(\boldsymbol{\psi}^{(n)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})+\Delta t\nu a_1(\boldsymbol{\psi}^{(n)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})=-(\boldsymbol{\eta}^{(n)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})+(\boldsymbol{\eta}^{(n-1)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})+(\boldsymbol{\psi}^{(n-1)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})-\Delta t[a_3(\boldsymbol{\eta}^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})+a_3(\boldsymbol{\psi}^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})+a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)};\boldsymbol{\eta}^{(n)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})]. \tag{13}$$

由 Schwartz 不等式、Poincaré 不等式、Young 不等式($ab\leqslant\varepsilon a^2+\frac{1}{4\varepsilon}b^2$)以及文献[10]中的结果($\|\pi^d\boldsymbol{u}_h^{(n)}-\boldsymbol{u}_h^{(n)}\|\leqslant Ch\|\nabla(\pi^d\boldsymbol{u}_h^{(n)}-\boldsymbol{u}_h^{(n)})\|$可知，如果令 $\Delta t=O(h)$，$\varepsilon_1=2/\Delta t\nu$，则有

$$(\boldsymbol{\eta}^{(n-1)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})\leqslant\|\boldsymbol{\eta}^{(n-1)}\|\|\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|\leqslant C\|\boldsymbol{\eta}^{(n-1)}\|\|\nabla\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|\leqslant C\varepsilon_1\|\boldsymbol{\eta}^{(n-1)}\|^2+\frac{1}{4\varepsilon_1}\|\nabla\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2\leqslant \frac{Ch^2}{\Delta t\nu}\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{(n-1)}\|^2+\frac{\Delta t\nu}{8}\|\nabla\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2\leqslant Ch\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{(n-1)}\|^2+\frac{\Delta t\nu}{8}\|\nabla\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2. \tag{14}$$

同理可得：

$$(\boldsymbol{\eta}^{(n)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})\leqslant Ch\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{(n)}\|^2+\frac{\Delta t\nu}{8}\|\nabla\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2, \tag{15}$$

$$(\boldsymbol{\psi}^{(n-1)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})\leqslant\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\psi}^{(n-1)}\|^2+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2. \tag{16}$$

再由式(3)和 Young 不等式可得

$$a_3(\boldsymbol{\eta}^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})\leqslant M\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{(n)}\|\|\nabla\boldsymbol{u}_h^{(n)}\|\|\nabla\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|\leqslant\varepsilon\|\nabla\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2+\frac{M^2}{4\varepsilon}\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{(n)}\|^2\|\nabla\boldsymbol{u}_h^{(n)}\|^2. \tag{17}$$

同理可得

$$a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)};\boldsymbol{\eta}^{(n)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})\leqslant\varepsilon\|\nabla\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2+\frac{M^2}{4\varepsilon}\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{(n)}\|^2\|\nabla\boldsymbol{u}_d^{(n)}\|^2. \tag{18}$$

对于三线性形式，本文给出如下加强条件：

$$a_3(\boldsymbol{\psi}^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})\leqslant C\|\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^{1/2}\|\nabla\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^{3/2}\|\nabla\boldsymbol{u}_h^{(n)}\|.$$

对于上式，由 Poincaré 不等式和引理 3(其中 $p=\frac{4}{3}$，$q=\frac{1}{4}$)可得

$$a_3(\boldsymbol{\psi}^{(n)};\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{\psi}^{(n)})\leqslant C\|\nabla\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^{3/2}\|\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^{1/2}\|\nabla\boldsymbol{u}_h^{(n)}\|\leqslant \varepsilon\|\nabla\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2+C(\varepsilon)\|\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2\|\nabla\boldsymbol{u}_h^{(n)}\|^4\leqslant[\varepsilon+C(\varepsilon)\|\nabla\boldsymbol{u}_h^{(n)}\|^4]\|\nabla\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2. \tag{19}$$

根据引理 2，并假设 $\|\nabla\boldsymbol{u}_h^{(n)}\|\leqslant\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{f}^i\|_{-1}\leqslant\nu/\sqrt{3}M$，$\|\nabla\boldsymbol{u}_d^{(n)}\|\leqslant\nu/\sqrt{3}M$，且取 $\varepsilon=\nu/12$，则由式(14)—(19)可得

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2+\left(\frac{\nu\Delta t}{2}-C(\varepsilon)\frac{\nu^4\Delta t}{9M^4}\right)\|\nabla\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2\leqslant (Ch+2\nu\Delta t)\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{(n)}\|^2+Ch\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{(n-1)}\|^2+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\psi}^{(n-1)}\|^2.$$

当上式中的 $C(\varepsilon)$ 充分小时可得 $\frac{\nu\Delta t}{2}-C(\varepsilon)\frac{\nu^4\Delta t}{9M^4}>0$，进而有

$$\|\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2\leqslant Ch\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{(n)}\|^2+Ch\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{(n-1)}\|^2+\|\boldsymbol{\psi}^{(n-1)}\|^2. \tag{20}$$

当 $n_{i-1}\leqslant n\leqslant n_i\leqslant N$ ($i=1,2,\cdots,L$；$1\leqslant n\leqslant N$；$n_0=0$)时，将 $\boldsymbol{u}_h^{(n)}$ 和 $\boldsymbol{u}_d^{(n)}$ 在点 t_{n_i} 处泰勒展开得

$$\boldsymbol{u}_h^{(n)}=\boldsymbol{u}_h^{(n_i)}\pm\theta_i\Delta t\boldsymbol{u}_{th}(\xi_i),\ \boldsymbol{u}_d^{(n)}=\boldsymbol{u}_d^{(n_i)}\pm\theta_i\Delta t\boldsymbol{u}_{td}(\zeta_i),\ t_{n_{i-1}}\leqslant\xi_i,\zeta_i\leqslant t_{n_i}, \tag{21}$$

其中 θ_i 是从 t_n 到 t_{n_i} ($i=1,2,\cdots,L$)的步长. 如果均匀选取瞬像，则 $\theta_i\leqslant N/L$. 对式(20)中的 $n_1,\cdots,n_{i-1},n$ 求和并移项得 $\|\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2\leqslant C(\Delta t)^2h(N/L)^2+Ch\sum_{j=n_i}^{n}\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{(j)}\|^2$. 当 $L^2=O(N)$，$\Delta t=O(h)$ 时，由引理 1 可得

$\|\boldsymbol{\psi}^{(n)}\|^2 \leqslant C(\Delta t)^2 + ChL\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j$. 进而由三角不等式、引理 1，且当 $\Delta t = O(h)$，$L^2 = O(N) = O(h^{-1})$ 时有

$$\|\boldsymbol{u}_h^{(n)} - \boldsymbol{u}_d^{(n)}\| \leqslant C\Delta t + C(h^{1/2}\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j)^{1/2}.$$

定理 2 当系统(11) 的解 $\boldsymbol{u}_d^{(n)} \in \boldsymbol{U}_{ad}$，则对于 $n=1,2,\cdots,N$ 有

$$\|\boldsymbol{u}_d^{(n)} - \boldsymbol{U}_d^{(n)}\| \leqslant C\Delta t + C(h^{1/2}\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j)^{1/2} + (1+2\kappa\Delta t)^{-n/2}\|\pi^h\boldsymbol{u}_0 - \pi^h\boldsymbol{U}_0\|,$$

其中 $\kappa = \gamma + C(\nu - M\|\nabla\boldsymbol{U}\|_{L^\infty[(0,T);H^1(\Omega)]}) > 0$，$C$ 为 Poincaré 常数.

证明 因根据定理 1、引理 4 和三角不等式 $\|\boldsymbol{u}_d^{(n)} - \boldsymbol{U}_d^{(n)}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}_d^{(n)} - \boldsymbol{u}_h^{(n)}\| + \|\boldsymbol{u}_h^{(n)} - \boldsymbol{U}_h^{(n)}\| + \|\boldsymbol{U}_h^{(n)} - \boldsymbol{U}_d^{(n)}\|$ 易证定理 2，故省略证明过程.

4 计算算法

令 $\xi_N = \{t_n\}_{n=0}^N$ 是$(0,T)$ 上的等距分划，$t_0 = 0$，$t_N = T$，时间步长 $\Delta t = T/N$，则系统(1) 的线性反馈控制问题的降维格式可表示为

$$\begin{cases}(\boldsymbol{u}_d^{(n)} - \boldsymbol{u}_d^{(n-1)}, \boldsymbol{v}_d) + \Delta t\nu a_1(\boldsymbol{u}_d^{(n)}, \boldsymbol{v}_d) + \Delta t a_2(\boldsymbol{u}_d^{(n)}, p_d^{(n)}) + \\ \qquad \Delta t a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)}; \boldsymbol{u}_d^{(n)}, \boldsymbol{v}_d) = \Delta t(\boldsymbol{F} - \gamma(\boldsymbol{u}_d^{(n)} - \boldsymbol{U}^{(n)}), \boldsymbol{v}_d),\ \boldsymbol{v}_d \in X^d; \\ a_2(\boldsymbol{u}_d^{(n)}, q_d) = 0, \forall q_d \in S^d.\end{cases} \tag{22}$$

其中 $n=1,2,\cdots,N$，初始条件 $\boldsymbol{u}_d^{(0)} = \pi^d\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$，边界条件等于零. 如果 $\boldsymbol{U}_d^{(n)} = \pi^d\boldsymbol{U}_h^{(n)}$，

$$(\boldsymbol{F}^{(n)}, \boldsymbol{v}_d) = \frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{U}_d^{(n)} - \boldsymbol{U}_d^{(n-1)}, \boldsymbol{v}_d) + \nu a_1(\boldsymbol{U}_d^{(n)}, \boldsymbol{v}_d) + a_3(\boldsymbol{U}_d^{(n)}; \boldsymbol{U}_d^{(n)}, \boldsymbol{v}_d), \tag{23}$$

则系统(22) 可以转化成

$$\begin{cases}(\boldsymbol{w}_d^{(n)} - \boldsymbol{w}_d^{(n-1)}, \boldsymbol{v}_d) + \Delta t\nu a_1(\boldsymbol{w}_d^{(n)}, \boldsymbol{v}_d) + \Delta t a_2(\boldsymbol{u}_d^{(n)}, p_d^{(n)}) + \Delta t a_3(\boldsymbol{w}_d^{(n)}; \boldsymbol{w}_d^{(n)}, \boldsymbol{v}_d) + \\ \qquad \Delta t a_3(\boldsymbol{w}_d^{(n)}; \boldsymbol{U}_d^{(n)}, \boldsymbol{v}_d) + \Delta t a_3(\boldsymbol{U}_d^{(n)}; \boldsymbol{w}_d^{(n)}, \boldsymbol{v}_d) + \Delta t(\gamma\boldsymbol{w}_d^{(n)}, \boldsymbol{v}_d) = 0,\ \boldsymbol{v}_d \in X^d; \\ a_2(\boldsymbol{u}_d^{(n)}, q_d) = 0, \forall q_d \in S^d.\end{cases} \tag{24}$$

其中 $n=1,2,\cdots,N$，初始条件 $\boldsymbol{w}_d^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \pi^d(\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{U}_0)$，边界条件等于零.

为了求问题(22) 的近似解，需将系统(22) 线性化. 系统(22) 经线性化得

$$\begin{cases}(\boldsymbol{u}_d^{(n)}(k), \boldsymbol{v}_d) + \Delta t\nu a_1(\boldsymbol{u}_d^{(n)}(k), \boldsymbol{v}_d) + \sigma\Delta t a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)}(k); \boldsymbol{u}_d^{(n)}(k-1), \boldsymbol{v}_d) + \\ \qquad \Delta t a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)}(k-1); \boldsymbol{u}_d^{(n)}(k), \boldsymbol{v}_d) + \gamma\Delta t(\boldsymbol{u}_d^{(n)}(k), \boldsymbol{v}_d) + \Delta t a_2(\boldsymbol{u}_d^{(n)}, p_d^{(n)}) = (\boldsymbol{u}_d^{(n-1)}(k), \boldsymbol{v}_d) + \\ \qquad \sigma\Delta t a_3(\boldsymbol{u}_d^{(n)}(k-1); \boldsymbol{u}_d^{(n)}(k-1), \boldsymbol{v}_d) + \gamma\Delta t(\boldsymbol{U}^{(n)}, \boldsymbol{v}_d) + \Delta t(\boldsymbol{F}^{(n)}, \boldsymbol{v}_d),\ \boldsymbol{v}_d \in X^d; \\ a_2(\boldsymbol{u}_d^{(n)}, q_d) = 0, \forall q_d \in S^d.\end{cases} \tag{25}$$

其中初始条件 $\boldsymbol{u}_d^{(0)} = \pi^d\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$，边界条件等于零. 如果 $\boldsymbol{U}_d^{(n)} = \pi^d\boldsymbol{U}_h^{(n)}$，且 $\boldsymbol{F}^{(n)}$ 是由式(23) 给定的，则系统(25) 可转化成

$$\begin{cases}(\boldsymbol{w}_d^{(n)}(k), \boldsymbol{v}_d) + \Delta t\nu a_1(\boldsymbol{w}_d^{(n)}(k), \boldsymbol{v}_d) + \sigma\Delta t a_3(\boldsymbol{w}_d^{(n)}(k); \boldsymbol{w}_d^{(n)}(k-1), \boldsymbol{v}_d) + \\ \qquad \Delta t a_3(\boldsymbol{U}_d^{(n)}; \boldsymbol{w}_d^{(n)}(k), \boldsymbol{v}_d) + \gamma\Delta t(\boldsymbol{w}_d^{(n)}(k), \boldsymbol{v}_d) + \Delta t a_2(\boldsymbol{u}_d^{(n)}, p_d^{(n)}) + \\ \qquad \Delta t a_3(\boldsymbol{w}_d^{(n)}(k-1); \boldsymbol{w}_d^{(n)}(k), \boldsymbol{v}_d) + \Delta t a_3(\boldsymbol{w}_d^{(n)}(k); \boldsymbol{U}_d^{(n)}, \boldsymbol{v}_d) = \\ \qquad (\boldsymbol{w}_d^{(n-1)}(k), \boldsymbol{v}_d) + \sigma\Delta t a_3(\boldsymbol{w}_d^{(n)}(k-1); \boldsymbol{w}_d^{(n)}(k-1), \boldsymbol{v}_d),\ \boldsymbol{v}_d \in X^d; \\ a_2(\boldsymbol{u}_d^{(n)}, q_d) = 0, \forall q_d \in S^d.\end{cases} \tag{26}$$

其中初始条件 $\boldsymbol{w}_d^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \pi^d(\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{U}_0)$，边界条件等于零.

由文献[11]可知，将式(22)—(26) 中的 $\boldsymbol{u}_d$、$\boldsymbol{w}_d$、$\boldsymbol{v}_d$、p_d、X^d、S^d 分别用 $\boldsymbol{u}_h$、$\boldsymbol{w}_h$、$\boldsymbol{v}_h$、p_h、X_h、S_h 代替，则其

所得的离散格式与式(22)—(26)相同[11].

给定速度 $\boldsymbol{u}^{(n-1)}$ 和一个整数 m(这里 m 依赖于时间步长 Δt,取 2 或 3).在系统(25)和系统(26)中,当 $k\leqslant m$ 时,取 $\sigma=0$;当 $k>m$ 时,取 $\sigma=1$.通过求解系统(25)可得到序列$\{\boldsymbol{u}^{(n)}(k),p^{(n)}(k)\}(k=1,2,\cdots)$.在 Ω 上,当 $\tau\geqslant\max\{\|\boldsymbol{u}_d^{(n)}(k)-\boldsymbol{u}_d^{(n)}(k-1)\|/|\boldsymbol{u}_d^{(n)}(k)|\}$ 时,即可结束 $[t_{n-1},t_n]$ 时间段的算法(τ 是给定的误差限).重复上述过程 n 次即可得到收敛于正确解的整体近似解.由上述计算过程可知,本文提出的算法结合了简单迭代法的全局收敛性($\sigma=0$)和 Newton 法的快速收敛性($\sigma=1$),因此本文算法具有良好的应用价值.

参考文献:

[1] GUNZBURGER M D, MANSERVISI S. Analysis and approximation of the velocity tracking problem for Navier-Stokes flows with distributed control[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2000,37(5):1481-1512.

[2] SRITHARAN S S. Dynamic programming of the Navier-Stokes equations[J]. Systems & Control Letters, 1991, 16(4):299-307.

[3] GUNZBURGER M D, MANSERVISI S. The velocity tracking problem for Navier-Stokes flows with bounded distributed controls[J]. SIAM Journal on Control & Optimization, 1999,37(6):1913-1945.

[4] HOU L S, RAVINDRAN S S, YAN Y. Numerical solutions of optimal distributed control problems for incompressible flows[J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 1997,8(2):99-114.

[5] 欧秋兰.两类方程基于 POD 的新数值解法[D].北京:华北电力大学,2012.

[6] TEMAM R. Navier-Stokes Equations[M]. Amsterdam: North-Holland, 1979.

[7] BREZZI F, FORTIN M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[8] CIARLET P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1978.

[9] LUO Z D, CHEN J, NAVON I M, et al. Mixed finite element formulation and error estimates based on proper orthogonal decomposition for the nonstationary Navier-Stokes equations[J]. Siam Journal on Numerical Analysis, 2008,47(1):1-19.

[10] LUO Z D, ZHOU Y J, YANG X Z. A reduced finite element formulation based on proper orthogonal decomposition for Burgers equation[J]. Applied Numerical Mathematics, 2009,59(8):1933-1946.

[11] GUNZBURGER M D, MANSERVISI S. Analysis and approximation for linear feedback control for tracking the velocity in Navier-Stokes flows[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2000,189(3):803-823.

[12] ADAMS R A. Sobolev Spaces[M]. London: Academic Press, 1975.