

文章编号: 1004-4353(2020)04-0283-06

一类非线性奇异分数阶微分方程解的存在唯一性

姜聪颖, 侯成敏*

(延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 研究了一类非线性奇异分数阶微分方程的边值问题:

$$\begin{cases} {}^C D_0^\sigma u(t) = f(t, u(t), {}^C D_0^{\sigma_1} u(t), {}^C D_0^{\sigma_2} u(t), \dots, {}^C D_0^{\sigma_{n-1}} u(t)), & 0 < t < 1; \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-3)}(0) = 0, u^{(n-2)}(0) = \eta, u'(1) = {}^C D_0^\sigma u(1). \end{cases}$$

首先利用 Banach 不动点定理和 Schauder 不动点定理得到了此类非线性分数阶微分方程解的存在性和唯一性的相关结论和定理, 然后利用两个实例验证了文中所得的主要结论.

关键词: 边值问题; 奇异分数阶微分方程; Caputo 分数阶导数; Banach 不动点定理; Schauder 不动点定理

中图分类号: O175.6

文献标识码: A

Existence and uniqueness of solutions for a class of nonlinear singular fractional differential equations

JIANG Congying, HOU Chengmin*

(College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: We study a class of boundary value problems of nonlinear singular fractional differential equations:

$$\begin{cases} {}^C D_0^\sigma u(t) = f(t, u(t), {}^C D_0^{\sigma_1} u(t), {}^C D_0^{\sigma_2} u(t), \dots, {}^C D_0^{\sigma_{n-1}} u(t)), & 0 < t < 1; \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-3)}(0) = 0, u^{(n-2)}(0) = \eta, u'(1) = {}^C D_0^\sigma u(1). \end{cases}$$

Firstly, Banach fixed point theorem and Schauder fixed point theorem are used to obtain relevant conclusions and theorems about the existence and uniqueness of solutions of such nonlinear fractional differential equations, and then the main conclusions obtained in this paper are verified by two examples.

Keywords: boundary value problem; singular fractional differential equation; Caputo fractional derivative; Banach fixed point theorem; Schauder fixed point theorem

0 引言

近年来许多学者研究了非线性奇异分数阶微分方程, 并得到了许多较好的研究结果. 例如: 在文献 [1] 中, Agarwal 等研究了奇异分数阶边值问题解的存在性:

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) + f(t, u(t), D^\mu u(t)) = 0, & 0 < t < 1; \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

其中: $1 < \alpha < 2$, 实数 μ 满足 $0 < \mu \leq \alpha - 1$, D^α 为标准 Riemman-Liouville 分数阶导数, f 满足 $[0, 1] \times (0, \infty) \times \mathbf{R}$ 上的 Caratheodory 条件, $f(t, x, y)$ 在 $x = 0$ 处奇异.

收稿日期: 2020-08-30

基金项目: 吉林省教育厅“十三五”科学技术研究项目(JJKH20170454KJ)

* 通信作者: 侯成敏(1963—), 女, 教授, 研究方向为微分方程及其应用.

在文献[2]中, Yan 等研究了一类积分边界条件下分数阶微分方程解的存在唯一性:

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^\alpha x(t) + f(t, x(t), {}^C D_{0^+}^\beta x(t)) = 0, t \in [0, 1]; \\ x(0) = x'(0) = y(x), \int_0^1 x(t) dt = m; \\ x''(0) = x'''(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases}$$

其中: ${}^C D_{0^+}^\alpha$ 和 ${}^C D_{0^+}^\beta$ 为 Caputo 分数阶导数; $f: [0, 1] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续函数; $y: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续函数; m, α 和 β 为实数, 且 $m \in \mathbf{R}, n-1 < \alpha < n (n \geq 2), 0 < \beta < 1$.

在文献[3]中, Guezane-Lakoud 等讨论了带有分数阶导数条件的边值问题解的存在性和唯一性:

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^\sigma u(t) + f(t, u(t), {}^C D_{0^+}^\sigma u(t)) = 0, 0 < t < 1; \\ u(0) = u''(0) = 0, u'(1) = {}^C D_{0^+}^\sigma u(1). \end{cases}$$

其中: $f: [0, 1] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个给定函数, $2 < q < 3, 0 < \sigma < 1, {}^C D_{0^+}^\sigma$ 为标准 Caputo 分数阶导数.

基于上述文献研究, 本文研究一类非线性奇异分数阶微分方程解的存在唯一性:

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^q u(t) = f(t, u(t), {}^C D_{0^+}^{\sigma_1} u(t), {}^C D_{0^+}^{\sigma_2} u(t), \cdots, {}^C D_{0^+}^{\sigma_{n-1}} u(t)), 0 < t < 1; \\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-3)}(0) = 0, u^{(n-2)}(0) = \eta, u'(1) = {}^C D_{0^+}^\sigma u(1). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $n > 2; n-1 < q < n; 0 < \sigma < 1; 0 < \sigma_i < 1, i=1, 2, \cdots, n-2; f: (0, 1) \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续函数, 并且在 $t=0$ 处奇异; ${}^C D_{0^+}^q$ 为标准 Caputo 分数阶导数.

1 预备知识及其原理

令 $E = \{x: x \in C[0, 1], {}^C D_{0^+}^{\sigma_i} x \in C[0, 1], 0 < \sigma_i < 1, i=1, 2, \cdots, n-1\}, 0 < \sigma < 1$, 赋范数 $\|x\| = \max\{\max_{t \in [0, 1]} |x(t)|, \max_{t \in [0, 1]} |{}^C D_{0^+}^q x(t)|\}$, $(E, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

定义 1^[4] 令 $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$. 如果 $g \in AC^n([a, b])$, 则 Caputo 分数阶导数的定义为

$${}^C D_a^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} g^{(n)}(s) ds$$

在 $[a, b]$ 上几乎处处存在 ($[\alpha]$ 表示实数 α 的整数部分).

引理 1^[4] 令 $\alpha, \beta > 0, n = [\alpha] + 1$, 则以下关系成立: ${}^C D_a^\alpha t^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha-1}, \beta > n$.

引理 2^[4] 对于 $\alpha > 0, g(t) \in C[a, b]$, 齐次分数阶微分方程 ${}^C D_{0^+}^\alpha g(t) = 0$ 的解为 $g(t) = C_1 + C_2 t + \cdots + C_n t^{n-1}, C_i$ 为实数, $i=1, 2, \cdots, n, n = [\alpha] + 1$.

引理 3^[4] 令 $p, q \geq 0, f \in L_1([a, b])$, 则 $I_a^p I_a^q f(t) = I_a^{p+q} f(t) = I_a^q I_a^p f(t), {}^C D_a^q I_a^q f(t) = f(t), \forall t \in [a, b]$.

引理 4^[4] 令 $\beta > \alpha > 0, f \in L_1([a, b])$, 则对于所有的 $t \in [a, b]$ 有 ${}^C D_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^{\beta-\alpha} f(t)$.

引理 5 (Schauder 不动点定理) 令 (E, d) 是一个完备空间, U 为一个 E 的闭凸子集, 并且令 $A: U \rightarrow U$ 是一组使 $\{Au: u \in U\}$ 在 E 中是相对紧的映射, 则 A 至少有一个不动点.

引理 6 对于 $y \in C[0, 1], n-1 < q < n, n > 2, 0 < \sigma < 1$, 方程

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^q u(t) = y(t), 0 < t < 1; \\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-3)}(0) = 0, u^{(n-2)}(0) = \eta, u'(1) = {}^C D_{0^+}^\sigma u(1) \end{cases}$$

的唯一解为 $u(t) = \int_0^1 G(t, s) y(s) ds + \zeta_1 t^{n-2} + \zeta_2 t^{n-1}$. 其中 $\zeta_1 = \frac{\eta}{\Gamma(n-1)}, \zeta_2 = \frac{\Gamma(n-\sigma)\eta}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \times$

$\left[\frac{1}{\Gamma(n-1-\sigma)} - \frac{1}{\Gamma(n-2)} \right]$. 此时

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{\Gamma(n-\sigma)t^{n-1}(1-s)^{q-2}}{(n-1)\Gamma(n-\sigma)-\Gamma(n)} \left[\frac{(1-s)^{1-\sigma}}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{1}{\Gamma(q-1)} \right], & 0 \leq s \leq t \leq 1; \\ \frac{\Gamma(n-\sigma)t^{n-1}(1-s)^{q-2}}{(n-1)\Gamma(n-\sigma)-\Gamma(n)} \left[\frac{(1-s)^{1-\sigma}}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{1}{\Gamma(q-1)} \right], & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

证明 由引理2可得 $u(t) = I_0^q y(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1} t^{n-1}$, 由边值条件 $u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-3)}(0) = 0$ 可得 $C_0 = C_1 = \cdots = C_{n-3} = 0$, 因此 $u(t) = I_0^q y(t) + C_{n-2} t^{n-2} + C_{n-1} t^{n-1}$. 对 $u(t)$ 求 $n-2$ 阶导数, 可得 $u^{(n-2)}(t) = I_0^{q-n+2} y(t) + \Gamma(n-1)C_{n-2} + \Gamma(n)C_{n-1}t$. 当 $t=0$ 时, $u^{(n-2)}(0) = \Gamma(n-1) \times C_{n-2} = \eta$, 因此 $C_{n-2} = \frac{\eta}{\Gamma(n-1)}$. 此时有 $u(t) = I_0^q y(t) + \frac{\eta}{\Gamma(n-1)} t^{n-2} + C_{n-1} t^{n-1}$. 对 $u(t)$ 求一阶导数有

$$u'(t) = I_0^{q-1} y(t) + \frac{\eta}{\Gamma(n-2)} t^{n-3} + C_{n-1}(n-1)t^{n-2}. \text{ 当 } t=1 \text{ 时, } u'(1) = I_0^{q-1} y(1) + \frac{\eta}{\Gamma(n-2)} + C_{n-1}(n-1).$$

1). 再由引理4可得 ${}^C D_0^\sigma u(t) = I_0^{q-\sigma} y(t) + \frac{\eta}{\Gamma(n-1)} \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n-1-\sigma)} t^{n-2-\sigma} + \frac{C_{n-1}\Gamma(n)}{\Gamma(n-\sigma)} t^{n-1-\sigma}$, 因此有

$$C_{n-1} = \frac{1}{(n-1) - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\sigma)}} \left\{ I_0^{q-\sigma} y(1) - I_0^{q-1} y(1) + \eta \left[\frac{1}{\Gamma(n-1-\sigma)} - \frac{1}{\Gamma(n-2)} \right] \right\} = \frac{\Gamma(n-\sigma)}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{(1-s)^{q-\sigma-1} y(s)}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{(1-s)^{q-2} y(s)}{\Gamma(q-1)} \right] ds + \eta \left[\frac{1}{\Gamma(n-1-\sigma)} - \frac{1}{\Gamma(n-2)} \right] \right\}.$$

因此, $u(t)$ 可以写为

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) y(s) ds + \frac{\eta}{\Gamma(n-1)} t^{n-2} + \frac{\Gamma(n-\sigma)\eta}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \left[\frac{1}{\Gamma(n-1-\sigma)} - \frac{1}{\Gamma(n-2)} \right] t^{n-1},$$

其中 $G(t,s)$ 为式(2)中所定义的. 证毕.

2 主要结果及其证明

定义运算符 $T: E \rightarrow E$ 为 $Tu(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, u(s), {}^C D_0^{\sigma_1} u(s), \dots, {}^C D_0^{\sigma_{n-1}} u(s)) ds + \zeta_1 t^{n-2} + \zeta_2 t^{n-1}$,

$\forall t \in [0, 1]$, 并令

$$B_0 = \frac{B(q, 1-\delta)}{\Gamma(q)} + \frac{\Gamma(n-\sigma)}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \left(\frac{B(q-\sigma, 1-\delta)}{\Gamma(q-\sigma)} + \frac{B(q-1, 1-\delta)}{\Gamma(q-1)} \right),$$

$$B_i = \frac{B(q-\sigma_i, 1-\delta)}{\Gamma(q-\sigma_i)} + \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\sigma_i)} \times \frac{\Gamma(n)}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \times \left(\frac{B(q-\sigma, 1-\delta)}{\Gamma(q-\sigma)} + \frac{B(q-1, 1-\delta)}{\Gamma(q-1)} \right), \quad i=1, 2, \dots, n-1.$$

定理1 令 $n-1 < q < n$, $0 < \delta < 1$, $F: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ 为连续函数, 且 $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\delta F(t) = \infty$. 假设 $t^\delta F(t)$

在 $[0, 1]$ 上连续, 则函数 $u(t) = \int_0^1 G(t,s) s^{-\delta} s^\delta F(s) ds + \zeta_1 t^{n-2} + \zeta_2 t^{n-1}$ 在 $[0, 1]$ 上连续.

证明 由 $t^\delta F(t)$ 和 $u(t) = \int_0^1 G(t,s) s^{-\delta} s^\delta F(s) ds + \zeta_1 t^{n-2} + \zeta_2 t^{n-1}$ 的连续性可知 $u(0) = 0$. 当 $t_0 = 0$,

$\forall t \in (0, 1)$ 时, 由 $t^\delta F(t)$ 的连续性可知, 存在一个恒定的 $M > 0$, 使得 $|t^\delta F(t)| \leq M$, $t \in [0, 1]$, 并且有

$$|u(t) - u(0)| = \left| \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} s^{-\delta} s^\delta F(s) ds + \frac{\Gamma(n-\sigma)t^{n-1}}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \times \int_0^1 \left(\frac{(1-s)^{q-\sigma-1}}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right) s^{-\delta} s^\delta F(s) ds + \zeta_1 t^{n-2} + \zeta_2 t^{n-1} \right| \leq \frac{Mt^{q-\delta}}{\Gamma(q)} B(q, 1-\delta) + \frac{\Gamma(n-\sigma)t^{n-1}M}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \times \left(\frac{B(q-\sigma, 1-\delta)}{\Gamma(q-\sigma)} + \frac{B(q-1, 1-\delta)}{\Gamma(q-1)} \right) + \zeta_1 t^{n-2} + \zeta_2 t^{n-1} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.$$

当 $t_0 \in (0, 1)$, $\forall t \in (t_0, 1]$ 时, 有

$$\begin{aligned} |u(t) - u(t_0)| &= \left| \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} s^{-\delta} s^{\delta} F(s) ds - \int_0^{t_0} \frac{(t_0-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} s^{-\delta} s^{\delta} F(s) ds + \right. \\ &\quad \frac{\Gamma(n-\sigma)t^{n-1}}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \int_0^1 \left(\frac{(1-s)^{q-\sigma-1}}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right) s^{-\delta} s^{\delta} F(s) ds - \\ &\quad \frac{\Gamma(n-\sigma)t_0^{n-1}}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \int_0^1 \left(\frac{(1-s)^{q-\sigma-1}}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right) s^{-\delta} s^{\delta} F(s) ds + \zeta_1 (t^{n-2} - t_0^{n-2}) + \\ &\quad \left. \zeta_2 (t^{n-1} - t_0^{n-1}) \right| \leq \left| \frac{M(t^{q-\delta} - t_0^{q-\delta}) B(q-1, 1-\delta)}{\Gamma(q)} + \frac{\Gamma(n-\sigma)(t^{n-1} - t_0^{n-1}) M}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \times \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{B(q-\sigma, 1-\delta)}{\Gamma(q-\sigma)} + \frac{B(q-1, 1-\sigma)}{\Gamma(q-1)} \right) + \zeta_1 (t^{n-2} - t_0^{n-2}) + \zeta_2 (t^{n-1} - t_0^{n-1}) \right| \rightarrow 0, t \rightarrow t_0. \end{aligned}$$

当 $t_0 \in (0, 1)$, $t \in (0, t_0]$ 时, 其证明过程与 $t_0 \in (0, 1)$ 和 $\forall t \in (t_0, 1]$ 的情况类似, 故略.

定理 2 令 $n-1 < q < n$, $0 < \delta < 1$, $0 < \sigma_i < 1$, $i=1, 2, \dots, n-1$, $f: (0, 1] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续的, 同时 $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, \cdot, \dots, \cdot) = \infty$. 假设 $t^{\delta} f(t, \cdot, \dots, \cdot)$ 在 $[0, 1] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 上连续, 则 ${}^c D_0^{\sigma_i} Tu(t) = {}^c D_0^{\sigma_i} \left(\int_0^1 G(t, s) f(s, u(s), {}^c D_0^{\sigma_1} u(s), \dots, {}^c D_0^{\sigma_{n-1}} u(s)) ds \right) + \zeta_1 \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n-1-\sigma)} t^{n-2-\sigma_i} + \zeta_2 \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\sigma)} t^{n-1-\sigma_i}$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $i=1, 2, \dots, n-1$.

证明 由 $u \in E$ 得 $u(t) \in C[0, 1]$, ${}^c D_0^{\sigma_i} u(t) \in C[0, 1]$, $i=1, 2, \dots, n-1$. 因此存在两个常数 $L_1 > 0$ 和 $L_2 > 0$, 使得 $|u(t)| \leq L_1$, $|{}^c D_0^{\sigma_i} u(t)| \leq L_2$, 其中 $i=1, 2, \dots, n-1$, $t \in [0, 1]$. 由于 $t^{\delta} f(t, \cdot, \dots, \cdot)$ 在 $[0, 1] \times \mathbf{R}^n$ 上连续, 因此有 $M_0 = \max_{t \in [0, 1]} |t^{\delta} f(t, u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1})|$, 此时 $-L_1 \leq u \leq L_1$, $-L_2 \leq v_i \leq L_2$. 下面证明 ${}^c D_0^{\sigma_i} Tu(t)$ 的连续性.

$$\begin{aligned} |{}^c D_0^{\sigma_i} Tu(t)| &= \left| {}^c D_0^{\sigma_i} (I_0^q f(t, u(t), {}^c D_0^{\sigma_1} u(t), {}^c D_0^{\sigma_2} u(t), \dots, {}^c D_0^{\sigma_{n-1}} u(t))) + \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n-1-\sigma_i)} \times \right. \\ &\quad \frac{\eta}{\Gamma(n-1)} t^{n-2-\sigma_i} + \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\sigma_i)} \frac{\Gamma(n-\sigma) t^{n-1-\sigma_i}}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \times \left\{ \int_0^1 \left[\frac{(1-s)^{q-\sigma-1}}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right] \times \right. \\ &\quad \left. f(s, u(s), {}^c D_0^{\sigma_1} u(s), {}^c D_0^{\sigma_2} u(s), \dots, {}^c D_0^{\sigma_{n-1}} u(s)) ds + \eta \left[\frac{1}{\Gamma(n-1-\sigma)} - \frac{1}{\Gamma(n-2)} \right] \right\} \Big| \leq \\ &\quad \frac{M_0 t^{q-\sigma_i-\delta} B(q-\sigma_i, 1-\delta)}{\Gamma(q-\sigma_i)} + \frac{\eta t^{n-2-\sigma_i}}{\Gamma(n-1-\sigma_i)} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\sigma_i)} \frac{\Gamma(n-\sigma) t^{n-1-\sigma_i}}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \times \\ &\quad \left\{ M_0 \left[\frac{B(q-\sigma, 1-\delta)}{\Gamma(q-\sigma)} + \frac{B(q-1, 1-\delta)}{\Gamma(q-1)} \right] + \eta \left[\frac{1}{\Gamma(n-1-\sigma)} - \frac{1}{\Gamma(n-2)} \right] \right\}, i=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

由幂函数的连续性可知 $t^{q-\sigma_i-\delta}$ 、 $t^{n-2-\sigma_i}$ 、 $t^{n-1-\sigma_i}$ 在 $[0, 1]$ 上连续. 利用与证明定理 1 相同的方式可得 ${}^c D_0^{\sigma_i} Tu(t)$ 在 $[0, 1]$ 上连续. 证毕.

定理 3 令 $n-1 < q < n$, $0 < \delta < 1$, $f: (0, 1] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续的, 同时 $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, \cdot, \dots, \cdot) = \infty$. 假设 $t^{\delta} f(t, \cdot, \dots, \cdot)$ 在 $[0, 1] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 上连续, 则 $T: E \rightarrow E$ 是完全连续算子.

证明 因 $\forall u \in E$, $Tu(t) = \int_0^1 G(s, t) f(s, u(s), {}^c D_0^{\sigma_1} u(s), {}^c D_0^{\sigma_2} u(s), \dots, {}^c D_0^{\sigma_{n-1}} u(s)) ds + \zeta_1 t^{n-2} + \zeta_2 t^{n-1}$, 所以由定理 1 和定理 2 的证明可知 $T: E \rightarrow E$. 首先证明 $T: E \rightarrow E$ 是连续的. 令 $u_0 \in E$, $\|u_0\| = C_0$. 若 $u \in E$, $\|u - u_0\| < 1$, 则 $\|u\| < 1 + C_0 = C$. 根据 $t^{\delta} f(t, u(t), {}^c D_0^{\sigma_1} u(t), {}^c D_0^{\sigma_2} u(t), \dots, {}^c D_0^{\sigma_{n-1}} u(t))$ 的连续性可知, $t^{\delta} f(t, u(t), {}^c D_0^{\sigma_1} u(t), {}^c D_0^{\sigma_2} u(t), \dots, {}^c D_0^{\sigma_{n-1}} u(t))$ 在 $[0, 1] \times [-C, C]^n$ 上一致连续. 因此对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\lambda > 0$ ($\lambda < 1$), 使得 $|t^{\delta} f(t, u(t), {}^c D_0^{\sigma_1} u(t), {}^c D_0^{\sigma_2} u(t), \dots, {}^c D_0^{\sigma_{n-1}} u(t)) - t^{\delta} f(t, u_0(t), {}^c D_0^{\sigma_1} u_0(t), {}^c D_0^{\sigma_2} u_0(t), \dots, {}^c D_0^{\sigma_{n-1}} u_0(t))| < \varepsilon$, $\forall t \in [0, 1]$, $u \in E$, $\|u - u_0\| < \lambda$, 并有以下不等式成立:

$$\begin{aligned}
|Tu(t) - Tu_0(t)| &\leq \int_0^1 |G(t,s)s^{-\delta}| |s^\delta f(s, u(s), {}^cD_{0^+}^{\sigma_1}u(s), {}^cD_{0^+}^{\sigma_2}u(s), \dots, {}^cD_{0^+}^{\sigma_{n-1}}u(s)) - \\
&\quad s^\delta f(s, u_0(s), {}^cD_{0^+}^{\sigma_1}u_0(s), {}^cD_{0^+}^{\sigma_2}u_0(s), \dots, {}^cD_{0^+}^{\sigma_{n-1}}u_0(s))| ds \leq \\
&\quad \epsilon \left[\frac{t^{q-\delta}B(q, 1-\delta)}{\Gamma(q)} + \frac{\Gamma(n-\sigma)t^{n-1}}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \left(\frac{B(q-\sigma, 1-\delta)}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{B(q-1, 1-\delta)}{\Gamma(q-1)} \right) \right] \leq \epsilon B_0. \quad (3)
\end{aligned}$$

另外,由定理1还可得

$$\begin{aligned}
|{}^cD_{0^+}^{\sigma_i}Tu(t) - {}^cD_{0^+}^{\sigma_i}Tu_0(t)| &= |{}^cD_{0^+}^{\sigma_i}(Tu(t) - Tu_0(t))| \leq \epsilon \left[\frac{B(q-\sigma_i, 1-\delta)t^{q-\delta-\sigma_i}}{\Gamma(q-\sigma_i)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\sigma_i)} \frac{\Gamma(n-\sigma)t^{n-1-\sigma_i}}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \left(\frac{B(q-\sigma, 1-\delta)}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{B(q-1, 1-\delta)}{\Gamma(q-1)} \right) \right] \leq \epsilon B_i. \quad (4)
\end{aligned}$$

因此,当 $\|u - u_0\| \rightarrow 0$ 时, $\|Tu - Tu_0\| \rightarrow 0$, 即 $T: E \rightarrow E$ 是连续的. 其次, 对于 E 中的有界集 Ω , 下面证明 $T(\Omega)$ 是有界的. 因 $\forall u \in \Omega$, 所以在 $\Omega \in E$ 时存在一个常数 b 使得 $\|u\| \leq b$. 由于 $t^\delta f(t, u(t), {}^cD_{0^+}^{\sigma_1}u(t), {}^cD_{0^+}^{\sigma_2}u(t), \dots, {}^cD_{0^+}^{\sigma_{n-1}}u(t))$ 在 $[0, 1] \times [-b, b]^n$ 连续, 因此可知 $\forall u \in \Omega$, 且存在一个常数 L 使得 $|t^\delta f(t, u(t), {}^cD_{0^+}^{\sigma_1}u(t), {}^cD_{0^+}^{\sigma_2}u(t), \dots, {}^cD_{0^+}^{\sigma_{n-1}}u(t))| \leq L, \forall t \in [0, 1]$. 进而由式(3)和式(4)可得:

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &\leq \int_0^1 |G(t,s)s^{-\delta}| |s^\delta f(s, u(s), {}^cD_{0^+}^{\sigma_1}u(s), {}^cD_{0^+}^{\sigma_2}u(s), \dots, {}^cD_{0^+}^{\sigma_{n-1}}u(s))| ds + |\zeta_1 t^{n-2}| + \\
&\quad |\zeta_2 t^{n-1}| \leq LB_0 + |\zeta_1| + |\zeta_2|; \\
|{}^cD_{0^+}^{\sigma_i}Tu(t)| &\leq LB_i + \left| \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n-1-\sigma_i)} \xi_1 \right| + \left| \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\sigma_i)} \xi_2 \right|.
\end{aligned}$$

下面证明 $T(\Omega)$ 是等度连续的. 对于所有的 $t_1, t_2 \in [0, 1], t_1 < t_2, u \in \Omega$ 有:

$$\begin{aligned}
|Tu(t_2) - Tu(t_1)| &= \frac{L}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} [(t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}] s^{-\delta} ds + \frac{L}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} s^{-\delta} ds + \\
&\quad \frac{L\Gamma(n-\sigma)(t_2^{n-1} - t_1^{n-1})}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \left(\frac{B(q-\sigma, 1-\delta)}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{B(q-1, 1-\delta)}{\Gamma(q-1)} \right) + \zeta_1 (t_2^{n-2} - t_1^{n-2}) + \zeta_2 (t_2^{n-1} - t_1^{n-1}); \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|{}^cD_{0^+}^{\sigma_i}Tu(t_2) - {}^cD_{0^+}^{\sigma_i}Tu(t_1)| &= \frac{L(t_2^{q-\sigma_i-\delta} - t_1^{q-\sigma_i-\delta})B(q-\sigma_i, 1-\delta)}{\Gamma(q-\sigma_i)} + \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\sigma_i)} \times \\
&\quad \frac{L\Gamma(n-\sigma)(t_2^{n-1-\sigma_i} - t_1^{n-1-\sigma_i})}{(n-1)\Gamma(n-\sigma) - \Gamma(n)} \left(\frac{B(q-\sigma, 1-\delta)}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{B(q-1, 1-\delta)}{\Gamma(q-1)} \right) + \\
&\quad \zeta_1 \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n-1-\sigma)} (t_2^{n-2-\sigma} - t_1^{n-2-\sigma}) + \zeta_2 \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\sigma)} (t_2^{n-1-\sigma} - t_1^{n-1-\sigma}). \quad (6)
\end{aligned}$$

当 $t_1 \rightarrow t_2$ 时, 可以发现不等式(5)和不等式(6)的右边均趋近于0, 因此 $\|Tu(t_2) - Tu(t_1)\| \rightarrow 0$, $T(\Omega)$ 是等度连续的. 证毕.

综合定理1、定理2和定理3,再由Arzela-Ascoli理论可得 T 是完全连续的.

定理4 假设 (H_1) 和 (H_2) 成立, 那么边值问题(1)有唯一解.

(H_1) 存在常数 $l > 0$ 及 $0 < \delta < 1$ 使得 $t^\delta |f(t, x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) - f(t, x^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)})| \leq l(|x - x^{(0)}| + |x_1 - x_1^{(0)}| + \dots + |x_{n-1} - x_{n-1}^{(0)}|)$, 其中 $t \in [0, 1], x, x_i, x^{(0)}, x_i^{(0)} \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n-1$.

(H_2) $\theta = \max\{nlB_0, nlB_1, \dots, nlB_i, \dots, nlB_{n-1}\} < 1, i = 1, 2, \dots, n-1$.

证明 首先证明 T 是一个压缩算子. 令 $u, v \in E$, 则由 (H_1) 以及式(3)和式(4)可得

$$\begin{aligned}
|Tu(t) - Tv(t)| &= \left| \int_0^1 G(t,s) (f(s, u(s), {}^cD_{0^+}^{\sigma_1}u(s), {}^cD_{0^+}^{\sigma_2}u(s), \dots, {}^cD_{0^+}^{\sigma_{n-1}}u(s)) - \right. \\
&\quad \left. f(s, v(s), {}^cD_{0^+}^{\sigma_1}v(s), {}^cD_{0^+}^{\sigma_2}v(s), \dots, {}^cD_{0^+}^{\sigma_{n-1}}v(s))) ds \right| \leq nl \|u - v\| B_0, \quad (7)
\end{aligned}$$

$$|{}^cD_{0^+}^{\sigma_i}Tu(t) - {}^cD_{0^+}^{\sigma_i}Tv(t)| \leq nl \|u - v\| B_i. \quad (8)$$

由式(7)和式(8)可得 $\|Tu - Tv\| \leq \theta \|u - v\|$, 因此 T 是一个压缩算子. 再根据 Banach 不动点定理可推导出 T 有一个不动点, 且该不动点即为边值问题(1) 的唯一解, 证毕.

为了证明方便, 以下规定 $L_0 = \max_{t \in [0,1]} t^\delta |f(t, u(t), {}^C D_{0^+}^{\sigma_1} u(t), {}^C D_{0^+}^{\sigma_2} u(t), \dots, {}^C D_{0^+}^{\sigma_{n-1}} u(t))|$.

定理 5 假设 $n-1 < q < n$, $0 < \delta < 1$, $f: (0, 1] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续的, 且 $r = \max\{L_0 B_1 + |\xi_1| + |\xi_2|, L_0 B_i + |(n-2)\xi_1| + |(n-1)\xi_2|, i = 1, 2, \dots, n-1\}$ 时 $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, \cdot, \dots, \cdot) = \infty$. 若 $t^\delta f(t, \cdot, \dots, \cdot)$ 在 $[0, 1] \times \mathbf{R}^n$ 上是连续的, 则边值问题(1) 有一个解.

证明 令 $U = \{u: u \in E: \|u\| \leq r\}$. 首先证明 $T: U \rightarrow U$. 事实上, 对于每一个 $t \in [0, 1]$, 有:

$$|Tu(t)| \leq L_0 B_1 + |\xi_1| + |\xi_2|; |{}^C D_{0^+}^{\sigma_i} Tu(t)| \leq L_0 B_2 + |(n-2)\xi_1| + |(n-1)\xi_2|.$$

由此可得出结论 $\|Tu\| = \max\{\max_{t \in [0,1]} |Tu(t)|, \max_{t \in [0,1]} |{}^C D_{0^+}^{\sigma_i} Tu(t)|, i = 1, 2, \dots, n-1\} \leq r$. 根据定理 1 和定理 2 可知 $Tu(t) \in C[0, 1]$, ${}^C D_{0^+}^{\sigma_i} Tu(t) \in C[0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, 所以 $T: U \rightarrow U$. 再根据定理 3 可知, $T: U \rightarrow U$ 是完全连续的. 最后根据引理 5 可推导出问题(1) 存在一个解, 证毕.

3 例子

例 1 考虑如下分数阶边值问题:

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^{\frac{19}{5}} u(t) = t^{-\frac{1}{2}} (0.029u(t) + 0.028 {}^C D_{0^+}^{\frac{1}{5}} u(t) + 0.030 {}^C D_{0^+}^{\frac{2}{5}} u(t) + \cos t), & 0 < t < 1; \\ u(0) = u'(0) = 0, u''(0) = 1, u'(1) = {}^C D_{0^+}^{\frac{1}{5}} u(1). \end{cases} \quad (9)$$

其中 $f(t, x, y, z) = t^{-\frac{1}{2}} (0.029x + 0.028y + 0.030z + \cos t)$, $3 < q = \frac{19}{5} < 4$, $\sigma = \frac{1}{5} < 1$, $0 < \sigma_1 = \frac{1}{5} < \sigma_2 = \frac{2}{5} < 1$, $t^{\frac{1}{2}} |f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2)| < 0.030(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)$, $\delta = \frac{1}{2} < 1$, $l = 0.030$. 根据贝塔函数和伽马函数的定义可得 $B_0 = 1.3410$, $B_1 = 1.6211$, $B_2 = 1.9305$. 因此, $\theta = \max\{nlB_0, nlB_1, \dots, nlB_{n-1}\} = 0.1737 < 1$. 再由定理 4 知问题(9) 有唯一解.

例 2 考虑如下分数阶边值问题:

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^{\frac{19}{5}} u(t) = t^{-\frac{1}{2}} (e^{-t} u^2 + ({}^C D_{0^+}^{\frac{1}{5}} u)^3 + ({}^C D_{0^+}^{\frac{2}{5}} u)^3 + (1-t)^2), & 0 < t < 1; \\ u(0) = u'(0) = 0, u''(0) = 1, u'(1) = {}^C D_{0^+}^{\frac{1}{5}} u(1). \end{cases} \quad (10)$$

令 $\delta = \frac{1}{2}$, 则问题(10) 满足定理 5 中的所有条件, 由此可知问题(10) 有解.

参考文献:

- [1] AGARWAL R P, O'REGAN D, STANEK S. Positive solutions for dirichlet problem of singular nonlinear fractional differential equation[J]. Electron J Math Anal, 2011, 371:57-68.
- [2] YAN R, SUN S, LU H, et al. Existence of solutions for fractional differential equations with integral boundary conditions[J]. Adv Differ Equ, 2014(1):1-13.
- [3] GUEZANE-LAKOUD A, BENSEBAA S. Solvability of a fractional boundary value problem with fractional derivative condition[J]. Arab J Math, 2014, 3:39-48.
- [4] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations [J]. Elsevier Amsterdam, 2006, 204:91-99.
- [5] 葛琦, 侯成敏. 一类分数阶差分方程边值问题递增正解的存在性[J]. 吉林大学学报(理学版), 2013, 51(1):47-52.
- [6] 刘欢. 带 P -拉普拉斯算子的 δ -nabla 分数阶差分边值问题正解的存在性[D]. 延吉: 延边大学, 2017.
- [7] LI R G. Existence of solutions for nonlinear singular fractional differential equations with fractional derivative condition[J]. Department of Mathematics, 2014, 214(1):1-12.