第 46 卷 第 3 期
2020 年 9 月
延边大学学报(自然科学版)
Journal of Yanbian University (Natural Science)
Vol. 46 No. 3
Sep. 2020

文章编号: 1004-4353(2020)03-0189-09

基于前景理论的改进灰色关联多属性群决策方法

刘 畅

(安徽财经大学 国际经济贸易学院, 安徽 蚌埠 233030)

摘要: 针对属性指标权重未知、决策者权重已知,且属性值为区间二元语义变量的多属性群决策问题,提出了一种基于前景理论的改进灰色关联分析方法. 首先,根据区间二元语义变量之间的广义距离对灰色关联度公式进行了改进,并定义了基于改进灰色关联度的前景价值函数;其次,构建了方案综合前景值最大化的非线性规划模型,并通过模型的最优权重确定各方案的排序;最后,通过数值模拟说明了该方法的有效性和可行性.

关键词: 多属性群决策; 前景理论; 区间二元语义变量; 灰色关联度

中图分类号: C934 **文献标识码**: A

An improved grey relational multi-attribute group decision-making method based on prospect theory

LIU Chang

(*School of International Trade and Economics, Anhui University of Finance and Economics, Bengbu* 233030, *China*)

Abstract: An improved grey relational analysis method based on the prospect theory is proposed to solve the multi-attribute group decision-making problem in which the weights of attributes are unknown, the weights of decision-makers are known, and the attribute values are interval-valued 2-tuple linguistic variables. Firstly, the grey relational degree formula is improved according to the generalized distance between the interval-valued 2-tuple linguistic variables, and the prospect value function is redefined based on the improved grey relational degree. Secondly, a nonlinear programming model is constructed to maximize the comprehensive prospect value of alternatives, and the optimal weights of the model are used to determine the ranking of the alternatives. Finally, the effectiveness and feasibility of the method are illustrated by numerical simulation.

Keywords: multi-attribute group decision making; prospect theory; interval-valued 2-tuple linguistic variable; grey relational degree

0 引言

传统的多属性决策方法多以精确数作为指标值,但当决策问题较为复杂或数据存在缺失时,决策者在实际决策时一般很难给出精确的评价信息[1-2]. 为此,林健等[3]于 2009 年提出了区间二元语义变量的概念. 随后,一些学者将其应用到多属性决策中,并取得了很好的效果. 例如:在区间二元语义变量的环境下,为解决属性指标权重未知的多属性决策问题,王晓等[4]通过拓展区间二元语义变量之间的距离公

收稿日期: 2020-08-03

作者简介: 刘畅(1991—),男,硕士研究生,研究方向为决策科学、流通经济理论与政策.

式构建了一种基于极大熵的优化模型；You 等[6]基于拓展的多准则妥协解排序(VIKOR)方法，解决了区间二元语义环境下的绿色供应商选择问题；Lu 等[7]将区间二元语义变量引入到医疗废物处理的技术选择的问题中，并基于逼近于理想解的排序(TOPSIS)方法有效地解决了该多属性决策问题；Liu 等[8]提出了一些区间二元语义 Bonferroni 平均算子，并将其应用到公司选择最优投资方案的多属性决策问题中；朱江洪等[9]通过利用区间二元语义变量表示决策者的评价信息，较好地解决了地铁车门故障风险评估的多属性决策问题.

传统的期望效用理论是假设决策者为“完全理性人”，但在进行决策时可能会出现与现实相违背的结果，如 Allais 悖论和 Ellsberg 悖论. 1979 年，Kahneman 等[10]首次提出了前景理论，该理论认为人们在面对损失和收益时其风险态度是不同的，即人们在实际决策过程中是有限理性的. 近些年，一些学者基于前景理论对多属性决策问题进行了较多研究. 例如：针对属性值为梯形模糊数的多属性决策问题，王坚强等[11]通过定义基于模糊数距离的前景价值函数，构建了一种基于前景理论的梯形模糊多属性决策方法；针对属性值为实数的多属性决策问题，王正新等[12]利用[−1,1]线性变换算子对属性值进行了标准化处理，并选取正、负理想方案作为参考方案构建了一种基于前景理论的灰色关联多属性决策方法；针对属性值为直觉模糊数的多属性决策问题，李鹏等[13]提出了一种基于前景理论的直觉模糊多属性决策方法；针对属性值为区间直觉模糊数的多属性决策问题，高建伟等[14]通过定义一种新的区间直觉模糊得分函数，构建了一种基于前景理论的区间直觉模糊多属性决策方法. 然而，目前将前景理论应用在区间直觉二元语义环境中的研究相对较少；为此，本文将前景理论拓展到区间二元语义环境中，提出一种基于前景理论的改进灰色关联多属性群决策方法，并通过数值模拟验证本文方法的有效性和可行性.

1 基本概念

1.1 区间二元语义变量

定义 1[15] 设 $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_g\}$ 是一个由语言变量组成的集合，$g+1$ 是集合 S 的粒度，且 g 为正偶数. 如果集合 S 满足下列条件，则称 S 为语言评价集：

1) 有序性. 若 $i>j$，则有 $s_i>s_j$.

2) 逆算子 neg. 若 $i+j=g+1$，则 $neg(s_i)=s_j$.

3) 最大值运算. 若 $s_i\geqslant s_j$，则 $\max\{s_i,s_j\}=s_i$.

4) 最小值运算. 若 $s_i\leqslant s_j$，则 $\min\{s_i,s_j\}=s_i$.

定义 2[16] 设 $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_g\}$ 是一个粒度为 $g+1$ 的语言评价集，实数 $\beta\in[0,g]$ 为语言变量的下标，则与 β 等价的二元语义变量可通过转化函数 Δ 得到，具体转化过程为：

$$\Delta:[0,g]\to S\times[-0.5,0.5),$$

$$\Delta(\beta)=(s_i,\alpha),$$

$$\begin{cases}s_i,\ i=round(\beta);\\ \alpha=\beta-i,\ \alpha\in[-0.5,0.5).\end{cases}$$

其中，$round(\cdot)$ 为四舍五入取整函数，(s_i,α) 为二元语义变量，$s_i\in S$.

定义 3[3] 设 $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_g\}$ 是一个粒度为 $g+1$ 的语言评价集，实数 $\beta_1\in[0,g]$ 和 $\beta_2\in[0,g]$ 为语言变量的下标，则与$[\beta_1,\beta_2]$等价的区间二元语义变量可通过转化函数 Δ 得到，具体转化过程为：

$$\Delta:[0,g]\to S\times[-0.5,0.5),$$

$$\Delta[\beta_1,\beta_2]=[(s_i,\alpha_i),(s_j,\alpha_j)],$$

$$\begin{cases}s_i,\ i=round(\beta_1);\\ s_j,\ j=round(\beta_2);\\ \alpha_i=\beta_1-i,\ \alpha_i\in[-0.5,0.5);\\ \alpha_j=\beta_2-j,\ \alpha_j\in[-0.5,0.5).\end{cases}$$

其中，$round(\cdot)$ 为四舍五入取整函数，$[(s_i,\alpha_i),(s_j,\alpha_j)]$ 为区间二元语义变量，$s_i,s_j\in S$.

定义 4[17]　对于区间二元语义变量 $V=[(s_i,\alpha_i),(s_j,\alpha_j)]$，总存在一个逆转化函数 Δ^{-1}，使得 $[(s_i,\alpha_i),(s_j,\alpha_j)]$ 可以还原成其等价的区间数 $[\beta_1,\beta_2]\subseteq[0,g]$，具体还原过程为：

$$\Delta^{-1}:S\times[-0.5,0.5)\to[0,g],$$

$$\Delta^{-1}[(s_i,\alpha_i),(s_j,\alpha_j)]=[\Delta^{-1}(s_i,\alpha_i),\Delta^{-1}(s_j,\alpha_j)]=[\beta_1,\beta_2].$$

其中，$s_i,s_j\in S$，$\alpha_i,\alpha_j\in[-0.5,0.5)$.

1.2　前景理论

定义 5[18]　方案的前景值是由价值函数 $v(\Delta x)$ 和前景权重函数 $\pi(w)$ 共同决定的，即：

$$V=\sum_{i=1}^{n}v(\Delta x_i)\pi(w_i).$$

价值函数反映的是决策者的主观感受价值，其具体表达式为：

$$v(\Delta x)=\begin{cases}(\Delta x)^{\alpha},\ x\geqslant X,\\ -\theta(\Delta x)^{\beta},\ x<X.\end{cases}$$

其中，X 表示参考方案，Δx 表示方案 x 到参考方案 X 的距离，参数 α 和 β 分别表示收益和损失区域价值函数的凹凸程度，参数 θ 表示损失厌恶系数，$\alpha=\beta=0.88$，$\theta=2.25$.

前景权重函数 $\pi(w)$ 由概率 w 确定，其具体表达式为：

$$\pi^{+}(w)=\frac{w^{\gamma}}{(w^{\gamma}+(1-w)^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}},\ \pi^{-}(w)=\frac{w^{\delta}}{(w^{\delta}+(1-w)^{\delta})^{\frac{1}{\delta}}}.$$

其中，$\gamma=0.61$，$\delta=0.69$.

2　方法构建

对某一多属性群决策问题，设 $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_g\}$ 是一个语言评价集，$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 为方案集，$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 为属性指标集，$D=\{D_1,D_2,\cdots,D_t\}$ 为决策者集. 其中，属性指标集的权重向量未知，设其为 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，并满足条件 $w_j\in[0,1]$，$\sum\limits_{j=1}^{n}w_j=1$. 决策者集的权重向量已知，设其为 $\boldsymbol{l}=\{l_1,l_2,\cdots,l_t\}^{\mathrm{T}}$，并满足条件 $l_k\in[0,1]$，$\sum\limits_{k=1}^{t}l_k=1$. 用区间二元语义变量 $\tilde{r}_{ij}^{k}=[(r_{ij}^{k},\theta_{ij}^{k}),(t_{ij}^{k},\delta_{ij}^{k})]$ 表示决策者 D_k 的评价值，用 $\widetilde{\boldsymbol{R}}^{k}=(\tilde{r}_{ij}^{k})_{m\times n}$ 表示决策者 D_k 的决策矩阵. 其中，$r_{ij}^{k},t_{ij}^{k}\in S$；$\theta_{ij}^{k},\delta_{ij}^{k}\in[-0.5,0.5)$；$k=1,2,\cdots,t$；$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$. 试对方案集 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 进行排序，并确定最优方案.

定义 6　设任意两个区间二元语义变量 $\tilde{r}_i=[(r_i,\theta_i),(t_i,\delta_i)]\ (i=1,2)$，则 $\tilde{r}_1$ 和 $\tilde{r}_2$ 之间标准化的汉明距离、欧几里得距离和广义距离分别为：

$$d_{\mathrm{H}}(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\Delta^{-1}(r_1,\theta_1)}{g}-\frac{\Delta^{-1}(r_2,\theta_2)}{g}\right|+\left|\frac{\Delta^{-1}(t_1,\delta_1)}{g}-\frac{\Delta^{-1}(t_2,\delta_2)}{g}\right|\right);$$

$$d_{\mathrm{E}}(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)=\left[\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\Delta^{-1}(r_1,\theta_1)}{g}-\frac{\Delta^{-1}(r_2,\theta_2)}{g}\right|^{2}+\left|\frac{\Delta^{-1}(t_1,\delta_1)}{g}-\frac{\Delta^{-1}(t_2,\delta_2)}{g}\right|^{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$d_{\mathrm{G}}(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)=\left[\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\Delta^{-1}(r_1,\theta_1)}{g}-\frac{\Delta^{-1}(r_2,\theta_2)}{g}\right|^{\lambda}+\left|\frac{\Delta^{-1}(t_1,\delta_1)}{g}-\frac{\Delta^{-1}(t_2,\delta_2)}{g}\right|^{\lambda}\right)\right]^{\frac{1}{\lambda}},\ \lambda>0.$$

定义 7 方案集 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 的正理想方案 A^+ 和负理想方案 A^- 分别为：

$$\begin{aligned}A^+=\{\tilde r_1^+,\tilde r_2^+,\cdots,\tilde r_n^+\}=\{&[\max_{1\leqslant k\leqslant t}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta^{-1}(r_{i1}^k,\theta_{i1}^k),\max_{1\leqslant k\leqslant t}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta^{-1}(t_{i1}^k,\delta_{i1}^k)],\\&[\max_{1\leqslant k\leqslant t}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta^{-1}(r_{i2}^k,\theta_{i2}^k),\max_{1\leqslant k\leqslant t}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta^{-1}(t_{i2}^k,\delta_{i2}^k)],\cdots,\\&[\max_{1\leqslant k\leqslant t}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta^{-1}(r_{in}^k,\theta_{in}^k),\max_{1\leqslant k\leqslant t}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta^{-1}(t_{in}^k,\delta_{in}^k)]\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^-=\{\tilde r_1^-,\tilde r_2^-,\cdots,\tilde r_n^-\}=\{&[\min_{1\leqslant k\leqslant t}\min_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta^{-1}(r_{i1}^k,\theta_{i1}^k),\min_{1\leqslant k\leqslant t}\min_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta^{-1}(t_{i1}^k,\delta_{i1}^k)],\\&[\min_{1\leqslant k\leqslant t}\min_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta^{-1}(r_{i2}^k,\theta_{i2}^k),\min_{1\leqslant k\leqslant t}\min_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta^{-1}(t_{i2}^k,\delta_{i2}^k)],\cdots,\\&[\min_{1\leqslant k\leqslant t}\min_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta^{-1}(r_{in}^k,\theta_{in}^k),\min_{1\leqslant k\leqslant t}\min_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta^{-1}(t_{in}^k,\delta_{in}^k)]\}.\end{aligned}$$

定义 8 评价值 $\tilde r_{ij}^k$ 和正理想点 $\tilde r_j^+$、负理想点 $\tilde r_j^-$ 之间的改进灰色关联度分别为：

$$\xi_{ij,k}^+=\frac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}d_{\mathrm G}(\tilde r_{ij}^k,\tilde r_j^+)+\rho\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}d_{\mathrm G}(\tilde r_{ij}^k,\tilde r_j^+)}{d_{\mathrm G}(\tilde r_{ij}^k,\tilde r_j^+)+\rho\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}d_{\mathrm G}(\tilde r_{ij}^k,\tilde r_j^+)},$$

$$\xi_{ij,k}^-=\frac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}d_{\mathrm G}(\tilde r_{ij}^k,\tilde r_j^-)+\rho\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}d_{\mathrm G}(\tilde r_{ij}^k,\tilde r_j^-)}{d_{\mathrm G}(\tilde r_{ij}^k,\tilde r_j^-)+\rho\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}d_{\mathrm G}(\tilde r_{ij}^k,\tilde r_j^-)}.$$

其中：$d_{\mathrm G}(\tilde r_{ij}^k,\tilde r_j^+)$ 和 $d_{\mathrm G}(\tilde r_{ij}^k,\tilde r_j^-)$ 分别表示评价值 $\tilde r_{ij}^k$ 到正理想点 $\tilde r_j^+$ 和负理想点 $\tilde r_j^-$ 的广义距离；$k=1,2,\cdots,t$；$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$；$\rho\in[0,1]$ 为分辨系数，取 $\rho=0.5$.

定义 9 设 w_j 为属性指标 C_j 的权重，则方案 A_i 的综合前景值 V_i 可以表示为：

$$V_i=V_i^++V_i^-;$$

$$V_i^+=\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{m}l_k\pi^+(w_j)v^+(\tilde r_{ij}^k);\ V_i^-=\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}l_k\pi^-(w_j)v^-(\tilde r_{ij}^k);$$

$$\pi^+(w_j)=\frac{w_j^\gamma}{(w_j^\gamma+(1-w_j)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}};\ \pi^-(w_j)=\frac{w_j^\delta}{(w_j^\delta+(1-w_j)^\delta)^{\frac{1}{\delta}}};$$

$$v(\tilde r_{ij}^k)=\begin{cases}(1-\xi_{ij,k}^-)^\alpha,\ \text{以负理想方案为参考点；}\\-\theta(1-\xi_{ij,k}^+)^\beta,\ \text{以正理想方案为参考点.}\end{cases}$$

其中：$\pi^+(w_j)$ 和 $\pi^-(w_j)$ 分别为指标 C_j 的正、负前景权重；$v^+(\tilde r_{ij}^k)=(1-\xi_{ij,k}^-)^\alpha$ 和 $v^-(\tilde r_{ij}^k)=-\theta(1-\xi_{ij,k}^+)^\beta$ 分别表示决策者 D_k 对方案 A_i 的正、负前景值；$k=1,2,\cdots,t$；$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$.

针对上述多属性群决策问题，本文构建一种基于前景理论的改进灰色关联多属性群决策方法，具体步骤为：

步骤 1 构建决策者 D_k 的区间二元语义决策矩阵 $\tilde{\boldsymbol R}^k$，$\tilde{\boldsymbol R}^k=(\tilde r_{ij}^k)_{m\times n}$. 其中，$k=1,2,\cdots,t$；$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$.

步骤 2 选取正理想方案 A^+ 和负理想方案 A^- 作为参考方案，并分别计算决策者 D_k 的改进正灰色关联度矩阵 ξ_k^+ 和负灰色关联度矩阵 ξ_k^-.

$$\xi_k^+=\begin{bmatrix}\xi_{11,k}^+&\xi_{12,k}^+&\cdots&\xi_{1n,k}^+\\\xi_{21,k}^+&\xi_{22,k}^+&\cdots&\xi_{2n,k}^+\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\xi_{m1,k}^+&\xi_{m2,k}^+&\cdots&\xi_{mn,k}^+\end{bmatrix},\quad\xi_k^-=\begin{bmatrix}\xi_{11,k}^-&\xi_{12,k}^-&\cdots&\xi_{1n,k}^-\\\xi_{21,k}^-&\xi_{22,k}^-&\cdots&\xi_{2n,k}^-\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\xi_{m1,k}^-&\xi_{m2,k}^-&\cdots&\xi_{mn,k}^-\end{bmatrix}.$$

其中，$k=1,2,\cdots,t$.

步骤 3 基于改进的正、负灰色关联度矩阵，分别计算决策者 D_k 的正前景矩阵 $\boldsymbol M_k^+$ 和负前景矩阵 $\boldsymbol M_k^-$.

$$
\boldsymbol{M}_k^{+}=\begin{bmatrix} v^{+}(\tilde{r}_{11}^{k}) & v^{+}(\tilde{r}_{12}^{k}) & \cdots & v^{+}(\tilde{r}_{1n}^{k}) \\ v^{+}(\tilde{r}_{21}^{k}) & v^{+}(\tilde{r}_{22}^{k}) & \cdots & v^{+}(\tilde{r}_{2n}^{k}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^{+}(\tilde{r}_{m1}^{k}) & v^{+}(\tilde{r}_{m2}^{k}) & \cdots & v^{+}(\tilde{r}_{mn}^{k}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (1-\xi_{11,k}^{-})^{\alpha} & (1-\xi_{12,k}^{-})^{\alpha} & \cdots & (1-\xi_{1n,k}^{-})^{\alpha} \\ (1-\xi_{21,k}^{-})^{\alpha} & (1-\xi_{22,k}^{-})^{\alpha} & \cdots & (1-\xi_{2n,k}^{-})^{\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1-\xi_{m1,k}^{-})^{\alpha} & (1-\xi_{m2,k}^{-})^{\alpha} & \cdots & (1-\xi_{mn,k}^{-})^{\alpha} \end{bmatrix};
$$

$$
\boldsymbol{M}_k^{-}=\begin{bmatrix} v^{-}(\tilde{r}_{11}^{k}) & v^{-}(\tilde{r}_{12}^{k}) & \cdots & v^{-}(\tilde{r}_{1n}^{k}) \\ v^{-}(\tilde{r}_{21}^{k}) & v^{-}(\tilde{r}_{22}^{k}) & \cdots & v^{-}(\tilde{r}_{2n}^{k}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^{-}(\tilde{r}_{m1}^{k}) & v^{-}(\tilde{r}_{m2}^{k}) & \cdots & v^{-}(\tilde{r}_{mn}^{k}) \end{bmatrix}=
$$

$$
\begin{bmatrix} -\theta(1-\xi_{11,k}^{+})^{\beta} & -\theta(1-\xi_{12,k}^{+})^{\beta} & \cdots & -\theta(1-\xi_{1n,k}^{+})^{\beta} \\ -\theta(1-\xi_{21,k}^{+})^{\beta} & -\theta(1-\xi_{22,k}^{+})^{\beta} & \cdots & -\theta(1-\xi_{2n,k}^{+})^{\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\theta(1-\xi_{m1,k}^{+})^{\beta} & -\theta(1-\xi_{m2,k}^{+})^{\beta} & \cdots & -\theta(1-\xi_{mn,k}^{+})^{\beta} \end{bmatrix}.
$$

其中，$\alpha=\beta=0.88$，$\theta=2.25$，$k=1,2,\cdots,t$.

步骤 4　构建各方案综合前景值最大化的非线性规划模型，并求解指标的最优加权向量. 所构建的优化模型为：

$$
\max V=\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} l_k \pi_j^{+}(w_j) v^{+}(\tilde{r}_{ij})+\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} l_k \pi_j^{-}(w_j) v^{-}(\tilde{r}_{ij});
$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases} w_j \geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n; \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j=1. \end{cases}
$$

使用 Lingo 或 Matlab 等软件即可求解上述模型.

步骤 5　计算方案 A_i 的综合前景值 V_i，并根据 V_i 的大小对各方案进行排序，以此选出最优方案（V_i 越大，方案越优）. 根据定义 9 可得综合前景值的计算公式为：

$$
V_i=\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} l_k \pi_j^{+}(w_j^{*}) v^{+}(\tilde{r}_{ij})+\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} l_k \pi_j^{-}(w_j^{*}) v^{-}(\tilde{r}_{ij}),\ i=1,2,\cdots,m.
$$

其中 $\boldsymbol{w}^{*}$ 为指标的最优加权向量，$\boldsymbol{w}^{*}=(w_1^{*},w_2^{*},\cdots,w_n^{*})^{\mathrm{T}}$.

图 1 为基于前景理论的改进灰色关联多属性群决策方法的决策流程图.

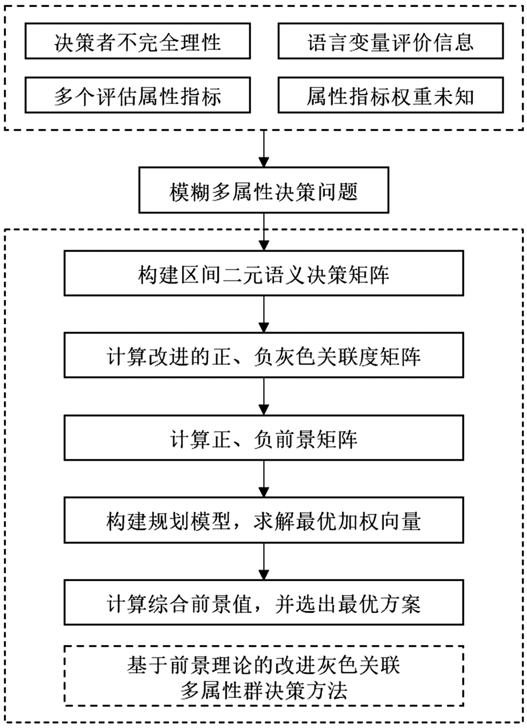

图 1　决策流程图

3　数值模拟

3.1　实例分析

某公司准备投资某项节能环保产品，现有 4 个绿色供应商 $A_i(i=1,2,3,4)$ 可供选择. 公司决策者拟从产品竞争力（C_1）、合作发展潜力（C_2）、企业竞争力（C_3）和绿色绩效（C_4）这 4 个属性指标对各绿色供应商进行评价. 属性指标的权重未知，设其为 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,w_3,w_4)^{\mathrm{T}}$，并满足条件：$0.2\leqslant w_1\leqslant 0.4$，

$0.1 \leqslant w_2 \leqslant 0.2$，$0.15 \leqslant w_3 \leqslant 0.25$，$0.25 \leqslant w_4 \leqslant 0.45$，$\sum_{j=1}^{4} w_j = 1$. 现有 3 名相关领域的决策者 $D_k(k=1,2,3)$ 对各绿色供应商进行评价，且决策者的权重向量为 $\boldsymbol{l}=\{0.25,0.5,0.25\}^{\mathrm{T}}$. 决策者均采用语言评价集 $S=\{s_0$：极差，s_1：很差，s_2：差，s_3：稍差，s_4：中等，s_5：稍好，s_6：好，s_7：很好，s_8：极好$\}$，并允许给出非整数的语言变量评价信息. 由于区间型数据能更好地刻画事物的模糊性，因此决策者给出的是区间语言评价信息. 决策者 D_k 对绿色供应商 A_i 的初始区间语言评价信息已知，如表 1— 表 3 所示.

表 1　决策者 D_1 的初始区间语言评价信息

绿色供应商	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$[s_{4.6},s_{5.5}]$	$[s_{6.1},s_{7.0}]$	$[s_{5.8},s_{7.0}]$	$[s_{4.1},s_{4.6}]$
A_2	$[s_{5.5},s_{6.7}]$	$[s_{4.1},s_{5.0}]$	$[s_{5.0},s_{5.5}]$	$[s_{5.4},s_{6.5}]$
A_3	$[s_{4.8},s_{6.9}]$	$[s_{5.8},s_{7.0}]$	$[s_{4.7},s_{6.1}]$	$[s_{6.2},s_{6.6}]$
A_4	$[s_{5.3},s_{6.5}]$	$[s_{2.7},s_{3.4}]$	$[s_{5.4},s_{6.0}]$	$[s_{3.5},s_{5.3}]$

表 2　决策者 D_2 的初始区间语言评价信息

绿色供应商	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$[s_{4.8},s_{5.8}]$	$[s_{6.1},s_{7.0}]$	$[s_{5.2},s_{6.8}]$	$[s_{3.8},s_{4.6}]$
A_2	$[s_{5.5},s_{6.9}]$	$[s_{2.7},s_{6.0}]$	$[s_{5.1},s_{5.5}]$	$[s_{5.0},s_{6.6}]$
A_3	$[s_{4.6},s_{6.0}]$	$[s_{5.8},s_{6.8}]$	$[s_{5.8},s_{7.0}]$	$[s_{6.2},s_{6.4}]$
A_4	$[s_{5.4},s_{5.5}]$	$[s_{3.2},s_{3.4}]$	$[s_{4.7},s_{7.0}]$	$[s_{3.5},s_{5.1}]$

表 3　决策者 D_3 的初始区间语言评价信息

绿色供应商	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$[s_{4.6},s_{5.5}]$	$[s_{5.6},s_{6.7}]$	$[s_{5.7},s_{6.5}]$	$[s_{4.0},s_{5.1}]$
A_2	$[s_{5.5},s_{6.9}]$	$[s_{2.7},s_{4.7}]$	$[s_{4.7},s_{5.5}]$	$[s_{5.3},s_{6.4}]$
A_3	$[s_{4.6},s_{6.4}]$	$[s_{6.1},s_{7.0}]$	$[s_{5.6},s_{7.0}]$	$[s_{6.2},s_{6.6}]$
A_4	$[s_{5.0},s_{6.7}]$	$[s_{3.1},s_{3.4}]$	$[s_{5.8},s_{6.0}]$	$[s_{3.5},s_{4.6}]$

以下运用基于前景理论的改进灰色关联多属性群决策方法对上述 4 个绿色供应商进行综合评价，并选出最优的绿色供应商，具体步骤为：

步骤 1　构建决策者 D_k 的区间二元语义决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}^k(\widetilde{\boldsymbol{R}}^k=(\tilde{r}_{ij}^k)_{4\times 4})$：

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}^1=$$

$$\begin{bmatrix}
[(s_5,-0.4),(s_6,-0.5)] & [(s_6,0.1),(s_7,0.0)] & [(s_6,-0.2),(s_7,0.0)] & [(s_4,0.1),(s_5,-0.4)] \\
[(s_6,-0.5),(s_7,-0.3)] & [(s_4,0.1),(s_5,0.0)] & [(s_5,0.0),(s_6,-0.5)] & [(s_5,0.4),(s_7,-0.5)] \\
[(s_5,-0.2),(s_7,-0.1)] & [(s_6,-0.2),(s_7,0.0)] & [(s_5,-0.3),(s_6,0.1)] & [(s_6,0.2),(s_7,-0.4)] \\
[(s_5,0.3),(s_7,-0.5)] & [(s_3,-0.3),(s_3,0.4)] & [(s_5,0.4),(s_6,0.0)] & [(s_4,-0.5),(s_5,0.3)]
\end{bmatrix};$$

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}^2=$$

$$\begin{bmatrix}
[(s_5,-0.2),(s_6,-0.2)] & [(s_6,0.1),(s_7,0.0)] & [(s_5,0.2),(s_7,-0.2)] & [(s_4,-0.2),(s_5,-0.4)] \\
[(s_6,-0.5),(s_7,-0.1)] & [(s_3,-0.3),(s_6,0.0)] & [(s_5,0.1),(s_6,-0.5)] & [(s_5,0.0),(s_7,-0.4)] \\
[(s_5,-0.4),(s_6,0.0)] & [(s_6,-0.2),(s_7,-0.2)] & [(s_6,-0.2),(s_7,0.0)] & [(s_6,0.2),(s_7,-0.6)] \\
[(s_5,0.4),(s_6,-0.5)] & [(s_3,0.2),(s_3,0.4)] & [(s_5,-0.3),(s_7,0.0)] & [(s_4,-0.5),(s_5,0.1)]
\end{bmatrix};$$

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}^3=$$

$$\begin{bmatrix}
[(s_5,-0.4),(s_6,-0.5)] & [(s_6,-0.4),(s_7,-0.3)] & [(s_6,-0.3),(s_7,-0.5)] & [(s_4,0.0),(s_5,0.1)] \\
[(s_6,-0.5),(s_7,-0.1)] & [(s_3,-0.3),(s_5,-0.3)] & [(s_5,-0.3),(s_6,-0.5)] & [(s_5,0.3),(s_7,-0.6)] \\
[(s_5,-0.4),(s_7,-0.6)] & [(s_6,0.1),(s_7,0.0)] & [(s_6,-0.4),(s_7,0.0)] & [(s_6,0.2),(s_7,-0.4)] \\
[(s_5,0.0),(s_7,-0.3)] & [(s_3,0.1),(s_3,0.4)] & [(s_6,-0.2),(s_6,0.0)] & [(s_4,-0.5),(s_5,-0.4)]
\end{bmatrix}.$$

步骤 2　首先选取正理想方案 A^+ 和负理想方案 A^- 作为参考方案，正理想方案 A^+ 和负理想方案 A^- 分别为：

$$A^+=\{[(s_6,-0.5),(s_7,-0.1)],[(s_6,0.1),(s_7,0.0)],[(s_6,-0.2),(s_7,0.0)],[(s_6,0.2),(s_7,-0.4)]\};$$

$$A^-=\{[(s_5,-0.4),(s_6,-0.5)],[(s_3,-0.3),(s_3,0.4)],[(s_5,-0.3),(s_6,-0.5)],[(s_4,-0.5),(s_5,-0.4)]\}.$$

然后计算 D_k 的改进正灰色关联度矩阵 ξ_k^+ 和负灰色关联度矩阵 ξ_k^-. 为了方便计算，取 $\lambda=1$，于是有：

$$\xi_1^+=\begin{bmatrix}0.6034 & 1.0000 & 1.0000 & 0.4605\\ 0.9459 & 0.4667 & 0.6034 & 0.7955\\ 0.8333 & 0.9211 & 0.6364 & 1.0000\\ 0.8537 & 0.3333 & 0.7143 & 0.4667\end{bmatrix};\ \xi_1^-=\begin{bmatrix}1.0000 & 0.3333 & 0.5738 & 0.8537\\ 0.6250 & 0.5385 & 0.9211 & 0.4795\\ 0.6863 & 0.3431 & 0.8537 & 0.4268\\ 0.6731 & 1.0000 & 0.7447 & 0.8333\end{bmatrix};$$

$$\xi_2^+=\begin{bmatrix}0.6436 & 1.0000 & 0.8025 & 0.4248\\ 1.0000 & 0.4248 & 0.5963 & 0.7303\\ 0.6436 & 0.8667 & 1.0000 & 0.9420\\ 0.6842 & 0.3333 & 0.7471 & 0.4362\end{bmatrix};\ \xi_2^-=\begin{bmatrix}0.9500 & 0.3619 & 0.7170 & 1.0000\\ 0.6552 & 0.6230 & 0.9744 & 0.5429\\ 0.9500 & 0.3800 & 0.6230 & 0.4750\\ 0.8837 & 0.9500 & 0.7600 & 0.9500\end{bmatrix};$$

$$\xi_3^+=\begin{bmatrix}0.5893 & 0.8049 & 0.8462 & 0.4714\\ 1.0000 & 0.3667 & 0.5593 & 0.7500\\ 0.7021 & 1.0000 & 0.9429 & 1.0000\\ 0.8250 & 0.3333 & 0.7674 & 0.4125\end{bmatrix};\ \xi_3^-=\begin{bmatrix}1.0000 & 0.3608 & 0.6364 & 0.7778\\ 0.6034 & 0.7292 & 1.0000 & 0.4930\\ 0.7955 & 0.3333 & 0.5932 & 0.4268\\ 0.6863 & 0.8974 & 0.6863 & 1.0000\end{bmatrix}.$$

步骤 3　基于改进的正、负灰色关联度矩阵，分别计算决策者 D_k 的正前景矩阵 $\boldsymbol{M}_k^+$ 和负前景矩阵 $\boldsymbol{M}_k^-$，得：

$$\boldsymbol{M}_1^+=\begin{bmatrix}0.0000 & 0.6999 & 0.4722 & 0.1843\\ 0.4218 & 0.5064 & 0.1071 & 0.5630\\ 0.3605 & 0.6908 & 0.1843 & 0.6128\\ 0.3739 & 0.0000 & 0.3008 & 0.2066\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{M}_1^-=\begin{bmatrix}-0.9970 & 0.0000 & 0.0000 & -1.3071\\ -0.1726 & -1.2940 & -0.9970 & -0.5568\\ -0.4650 & -0.2409 & -0.9238 & 0.0000\\ -0.4147 & -1.5748 & -0.7471 & -1.2940\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{M}_2^+=\begin{bmatrix}0.0716 & 0.6734 & 0.3293 & 0.0000\\ 0.3918 & 0.4239 & 0.0398 & 0.5022\\ 0.0716 & 0.6566 & 0.4239 & 0.5672\\ 0.1505 & 0.0716 & 0.2848 & 0.0716\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{M}_2^-=\begin{bmatrix}-0.9077 & 0.0000 & -0.5399 & -1.3829\\ 0.0000 & -1.3829 & -1.0127 & -0.7101\\ -0.9077 & -0.3821 & 0.0000 & -0.1836\\ -0.8159 & -1.5748 & -0.6710 & -1.3588\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{M}_3^+=\begin{bmatrix}0.0000 & 0.6744 & 0.4106 & 0.2662\\ 0.4431 & 0.3168 & 0.0000 & 0.5501\\ 0.2475 & 0.6999 & 0.4531 & 0.6128\\ 0.3605 & 0.1348 & 0.3605 & 0.0000\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{M}_3^- = \begin{bmatrix} -1.0282 & -0.5341 & -0.4333 & -1.2838 \\ 0.0000 & -1.5053 & -1.0940 & -0.6643 \\ -0.7750 & 0.0000 & -0.1813 & 0.0000 \\ -0.4854 & -1.5748 & -0.6233 & -1.4090 \end{bmatrix}.$$

步骤4　首先构建各方案的综合前景值最大化的非线性规划模型:

$$\max V = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} l_k \pi_j^+(w_j) v^+(\tilde{r}_{ij}) + \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} l_k \pi_j^-(w_j) v^-(\tilde{r}_{ij})$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 0.2 \leqslant w_1 \leqslant 0.4, \\ 0.1 \leqslant w_2 \leqslant 0.2, \\ 0.15 \leqslant w_3 \leqslant 0.25, \\ 0.25 \leqslant w_4 \leqslant 0.45, \\ \sum_{j=1}^{4} w_j = 1. \end{cases}$$

然后利用Lingo11.0软件求解出最优加权向量 $\boldsymbol{w}^*$, $\boldsymbol{w}^* = (0.4, 0.1, 0.25, 0.25)^{\mathrm{T}}$.

步骤5　根据定义9计算绿色供应商 A_i 的综合前景值 V_i,得:

$$V_1 = -0.6181,\ V_2 = -0.3517,\ V_3 = 0.0250,\ V_4 = -0.8890.$$

由上述计算结果可知,4个绿色供应商的排序结果为 $V_3 > V_2 > V_1 > V_4$.

3.2　比较分析

为了进一步验证本文方法的有效性和可行性,将本文方法、文献[7](基于TOPSIS的多属性决策方法)、文献[8](基于区间二元语义几何Bonferroni平均算子的多属性决策方法)和文献[17](基于区间二元语义加权平均算子的多属性决策方法)中的方法对上述4个绿色供应商的排序结果进行了比较,结果如表4所示.为了消除指标和决策者权重差异对决策结果的影响,在文献[7]、文献[8]和文献[17]的方法中指标和决策者的权重向量分别采用 $\boldsymbol{w}^* = (0.4, 0.1, 0.25, 0.25)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{l} = \{0.25, 0.5, 0.25\}^{\mathrm{T}}$ 进行计算.

由表4可知,上述4种多属性决策方法得到的最优绿色供应商都为 V_3,且具体排序基本一致,这说明本文提出的基于前景理论的改进灰色关联多属性群决策方法具有一定的有效性和可行性.但由于文献[7]、文献[8]和文献[17]中的方法没有考虑决策者风险态度对实际决策结果的影响,且属性指标权重的确定主要是根据决策者的主观判断,因此本文方法的决策过程和结果更具说服力.

表4　4种多属性决策方法的排序结果

多属性决策方法	排序结果
本文方法	$V_3 > V_2 > V_1 > V_4$
文献[7]的方法	$V_3 > V_2 > V_1 > V_4$
文献[8]的方法	$V_3 > V_1 > V_2 > V_4$
文献[17]的方法	$V_3 > V_2 > V_1 > V_4$

4　结束语

研究表明,本文提出的基于前景理论的改进灰色关联多属性群决策方法,其决策效果比文献[7]、文献[8]和文献[17]的方法更为合理、有效,因此该方法可应用到风险评估和投资方案的选择等实际问题中.值得注意的是,本文方法中选取不同的参考方案和构建不同的前景价值函数都会影响方案综合前景值的大小,进而对决策结果产生影响,因此如何更加有效地选择参考方案和构建前景价值函数仍需进一步研究.

参考文献:

[1]　徐泽水.多属性决策的两种方差最大化方法[J].管理工程学报,2001,15(2):11-13.

[2] 徐泽水,达庆利.多属性决策的组合赋权方法研究[J].中国管理科学,2002,10(2):84-87.
[3] 林健,兰继斌,林耀海.基于区间二元语义集结算子的多属性群决策方法[J].吉林师范大学学报(自然科学版),2009,30(1):5-9.
[4] 王晓,陈华友,刘兮.基于离差的区间二元语义多属性群决策方法[J].管理学报,2011,8(2):301-305.
[5] 张娜,方志耕,朱建军,等.基于等信息量转换的区间二元语义多属性群决策方法[J].控制与决策,2015,30(3):403-409.
[6] YOU X Y, YOU J X, LIU H C, et al. Group multi-criteria supplier selection using an extended VIKOR method with interval 2-tuple linguistic information[J]. Expert Systems with Applications, 2015,42(4):1906-1916.
[7] LU C, YOU J X, LIU H C, et al. Health-Care waste treatment technology selection using the interval 2-tuple induced TOPSIS method[J]. International Journal of Environmental Research and Public Health, 2016,13(6):562.
[8] LIU X, TAO Z F, CHEN H Y, et al. A new interval-valued 2-tuple linguistic bonferroni mean operator and its application to multiattribute group decision making[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2017,19(1):86-108.
[9] 朱江洪,李延来.基于区间二元语义与故障模式及影响分析的地铁车门故障风险评估[J].计算机集成制造系统,2019,25(7):1630-1638.
[10] KAHNEMAN D, TVERSKY A. Prospect Theory: an analysis of decision under risk[J]. Econometrica, 1979,47(2):263-292.
[11] 王坚强,孙腾,陈晓红.基于前景理论的信息不完全的模糊多准则决策方法[J].控制与决策,2009,24(8):1198-1202.
[12] 王正新,党耀国,裴玲玲,等.基于累积前景理论的多指标灰关联决策方法[J].控制与决策,2010,25(2):232-236.
[13] 李鹏,刘思峰,朱建军.基于前景理论的随机直觉模糊决策方法[J].控制与决策,2012,27(11):1601-1606.
[14] 高建伟,刘慧晖,谷云东.基于前景理论的区间直觉模糊多准则决策方法[J].系统工程理论与实践,2014,34(12):3175-3181.
[15] HERRERA F, HERRERA-VIEDMA E. Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000,115(1):67-82.
[16] HERRERA F, MARTINEZ L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000,8(6):746-752.
[17] ZHANG H M. The multiattribute group decision making method based on aggregation operators with interval-valued 2-tuple linguistic information[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2012,56(1/2):27-35.
[18] TVERSKY A, KAHNEMAN D. Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty[J]. Journal of Risk and Uncertainty, 1992,5(4):297-323.