

文章编号: 1004-4353(2020)02-0129-05

双腔光力学系统的稳态纠缠

杨智博, 明莹, 刘洪雨*

(延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 为了提高耦合腔光力学系统的稳态纠缠, 将光学参量放大器放置到光学腔中并研究了其纠缠状. 首先利用量子朗之万方程和线性化处理, 求出系统的稳态解; 然后将纠缠负对数作为纠缠判据, 对系统的量子纠缠进行数值模拟. 研究表明, 含有光学参量放大器的系统不但可以显著增强稳态力学纠缠, 而且可使纠缠不受热库环境温度的影响; 因此, 本文方案可为操控力学系统间的量子纠缠提供参考.

关键词: 腔光力学系统; 稳态纠缠; 光学参量放大器

中图分类号: O431

文献标志码: A

The steady-state entanglement in a two-cavity optomechanical system

YANG Zhibo, MING Ying, LIU Hongyu*

(College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: In order to improve the steady-state entanglement of the coupled cavity photomechanical system, one selected a cascade cavity optomechanical system for the study. First, the steady-state solution of the system is obtained by using the Langevin equation and linear processing. Then the entanglement negative logarithm is used as the entanglement criterion to simulate the quantum entanglement of the system. The results show that the system with an optical parametric amplifier can significantly enhance the steady-state mechanical entanglement, and the entanglement can not be affected by the ambient temperature of the heat reservoir. Therefore, this scheme provides an effective method for improving and manipulating quantum entanglement between mechanical systems.

Keywords: cavity optomechanical system; steady-state entanglement; optical parametric amplifiers

0 引言

研究量子纠缠对实现量子信息处理和量子通讯具有重要作用. 目前, 量子纠缠在人造量子比特^[1]、量子蒸馏^[2]、双原子系综^[3]、腔光力学系统^[4]等方面的研究虽已取得一定的进展, 但在常温下实验制备和操纵量子纠缠仍未得到明显进展^[5-6], 仅在低温环境下得以实现^[7]. 2014 年 Chen 等^[8]研究发现, 将一个周期性调节的泵浦激光器作为驱动源能够显著增强纠缠, 但实验过程中需要精准把控激光器的频率啁啾, 并且该实验对环境的噪声很敏感. Lü X Y 等^[9]研究发现, 将一个光学参量放大器(OPA)放置在腔中, 能够显著增强光力系统的有效耦合. 基于此现象, 本文在两个耦合的光力腔中放置两个光学参量放大器系统, 以此探讨该状况下 OPA 对腔光力学系统中纠缠的影响.

收稿日期: 2019-11-06

* 通信作者: 刘洪雨(1982—), 男, 讲师, 研究方向为量子光学.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11647069); 吉林省科技厅项目(20180520223JH)

1 系统模型与哈密顿

首先建立由两个相同的法布里-珀罗腔组成的物理模型,该模型包含 1 个固定腔镜和 1 个可移动腔镜,其中固定腔镜为部分透射,可移动腔镜为全反射.每个腔中均放置 1 个 OPA,并由相同的泵浦激光驱动.每个腔中只有 1 个共振模,并且该腔模通过 1 个光子跃迁的相互作用实现耦合,如图 1 所示.

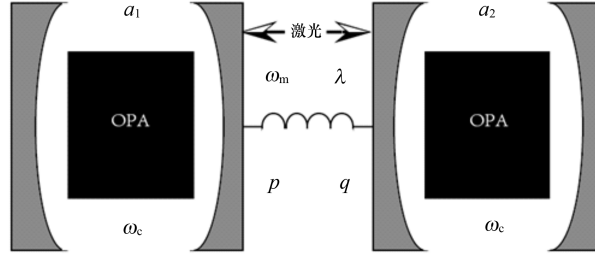


图 1 级联光学系统装置示意图

图 1 中,两束驱动光的频率为 ω_1 , 振幅为 E ; 腔模的频率为 ω_c ; 可移动镜可看作为量子力学的谐振子,其质量为 m , 频率为 ω_m , 阻尼率为 γ_m . 在腔-光子诱导的辐射压作用下,可移动的腔镜会使振子在平衡位置附近振动.此外,对于简并的 OPA,本文假设频率为 $2\omega_1$ 的泵浦场与 OPA 相互作用,其中 OPA 的增益系数为 Λ , OPA 与泵浦场的相位差为 θ . 为了方便计算,设 $\hbar=1$, 则系统总的哈密顿为

$$H = \omega_c a_1^\dagger a_1 + \omega_c a_2^\dagger a_2 + \frac{\omega_m}{2} (p^2 + q^2) - g a_1^\dagger a_1 q - g a_2^\dagger a_2 q + iE(a_1^\dagger e^{-i\omega_1 t} - a_1 e^{i\omega_1 t}) + iE(a_2^\dagger e^{-i\omega_1 t} - a_2 e^{i\omega_1 t}) + i\Lambda(a_1^{+2} e^{-i\theta} e^{-2i\omega_1 t} - a_1^2 e^{i\theta} e^{2i\omega_1 t}) + i\Lambda(a_2^{+2} e^{-i\theta} e^{-2i\omega_1 t} - a_2^2 e^{i\theta} e^{2i\omega_1 t}). \quad (1)$$

式(1)中: ω_c 为腔场频率; a_j 和 a_j^\dagger 是腔 j 模的湮灭算符和产生算符($j=1,2$); q 和 p 分别是可移动镜的无量纲位置和动量,满足标准的对易关系 $[q, p] = i$; $g = \omega_c x_{ZPF}/L$ 是腔和振子之间的耦合强度,其由辐射压作用所导致,其中 x_{ZPF} 是振子的零点涨落($x_{ZPF} = \sqrt{\hbar/(2m\omega_m)}$), L 为腔长; E 为驱动强度($E = \sqrt{2\kappa P/\hbar\omega_1}$, κ 为腔的损耗),其与输入功率 P 有关.在激光频率 ω_1 的旋转框架($U = e^{-i\omega_1 t(a_1^\dagger + a_1 + a_2^\dagger + a_2)}$)下,系统的哈密顿可写成

$$H = \Delta_0 a_1^\dagger a_1 + \Delta_0 a_2^\dagger a_2 + \frac{\omega_m}{2} (p^2 + q^2) - g a_1^\dagger a_1 q - g a_2^\dagger a_2 q + iE(a_1^\dagger - a_1) + iE(a_2^\dagger - a_2) + i\Lambda(a_1^{+2} e^{-i\theta} - a_1^2 e^{i\theta}) + i\Lambda(a_2^{+2} e^{-i\theta} - a_2^2 e^{i\theta}). \quad (2)$$

式中 Δ_0 是腔场频率 ω_c 与激光频率 ω_1 的频率失谐,即 $\Delta_0 = \omega_c - \omega_1$.

分析双腔光力系统时,需将腔的衰减和力学耗散考虑在内.根据海森堡运动方程,系统的耗散动力学可描述成如下一组非线性量子朗之万方程组^[10]:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \omega_m p, \\ \frac{dp}{dt} = -\omega_m q - \gamma_m p + g a_1^\dagger a_1 + g a_2^\dagger a_2 + \xi(t), \\ \frac{da_1}{dt} = -(\kappa + i\Delta_0) a_1 + i g a_1 q + E + 2\Lambda e^{-i\theta} a_1^\dagger + \sqrt{2\kappa} a_1^{\text{in}}(t), \\ \frac{da_2}{dt} = -(\kappa + i\Delta_0) a_2 + i g a_2 q + E + 2\Lambda e^{-i\theta} a_2^\dagger + \sqrt{2\kappa} a_2^{\text{in}}(t). \end{cases} \quad (3)$$

方程(3)中 $a_j^{\text{in}}(j=1,2)$ 是零平均值的独立输入量子噪声算符,其对应的非零关联函数为:

$$\begin{aligned} \langle a_j^{\text{in}}(t) a_j^{\text{in}}(t') \rangle &= n_a \delta(t - t'), \\ \langle a_j^{\text{in}}(t) a_j^{\text{in}\dagger}(t') \rangle &= (n_a + 1) \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (4)$$

其中 n_a 为光学模的平均热激发数, $n_a = [\exp(\hbar\omega_c/k_B T) - 1]^{-1}$, k_B 是玻尔兹曼常数, T 为环境温度. $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 是由谐振子热库产生的随机布朗噪声算符,满足非马尔科夫关联函数:

$$\langle \xi_1(t) \rangle = \langle \xi_2(t) \rangle = 0,$$

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \frac{\gamma_m}{\omega_m} \int \frac{d\omega_m}{2\pi} e^{-i\omega_m(t-t')} \omega_m \left[1 + \coth\left(\frac{\hbar\omega_m}{2k_B T}\right) \right] \delta_{ij}. \quad (5)$$

其中 δ_{ij} 是克尔 delta 函数, $i, j=1, 2$. 假设机械品质因子 $Q_m = \omega_m/\gamma_m \gg 1$, 则噪声的关联函数可以改写为

$$\langle \xi_j(t) \xi_j(t') + \xi_j(t') \xi_j(t) \rangle / 2 = \gamma_m (2n_m + 1) \delta(t - t'), \quad (6)$$

式中 n_m 是力学振子的平均热激发数, $n_m = [\exp(\hbar\omega_m/k_B T) - 1]^{-1}$.

在强激光驱动条件下, 海森堡算符可写成平均值和量子涨落算符的形式 ($A = A_s + \delta A$, $A = (p, q, a_1, a_2)$), 且在稳态条件 ($\langle \delta A \rangle = 0$) 下可得如下稳态平均值:

$$p_s = 0, \quad q_s = \frac{2g|a_s|^2}{\omega_m}, \quad a_{1s} = a_{2s} = a_s = \frac{E}{\kappa + i\Delta - 2\Lambda e^{-i\theta}}. \quad (7)$$

其中 Δ 为腔场共振的有效输入激光失谐, $\Delta = \Delta_0 - gq_s$. 量子涨落算符的线性化朗之万方程为:

$$\begin{cases} \frac{d\delta q}{dt} = \omega_1 \delta p, \\ \frac{d\delta p}{dt} = -\omega_m \delta q - \gamma_m \delta p + g(a_s^* \delta a_1 + a_s \delta a_1^\dagger) + g(a_s^* \delta a_2 + a_s \delta a_2^\dagger) + \xi(t), \\ \frac{d\delta a_1}{dt} = -(\kappa + i\Delta) \delta a_1 + ig a_s \delta q + E + 2\Lambda e^{-i\theta} \delta a_1^\dagger + \sqrt{2\kappa} a_1^{\text{in}}(t), \\ \frac{d\delta a_2}{dt} = -(\kappa + i\Delta) \delta a_2 + ig a_s \delta q + E + 2\Lambda e^{-i\theta} \delta a_2^\dagger + \sqrt{2\kappa} a_2^{\text{in}}(t). \end{cases} \quad (8)$$

因强相干驱动条件, 本文在上式中忽略了二阶小项 $\delta a_1 \delta q$ 、 $\delta a_2 \delta q$ 、 $\delta a_1^\dagger \delta a_1$ 和 $\delta a_2^\dagger \delta a_2$.

2 两个腔模间的纠缠测量

测量两个力学模之间的稳态纠缠需引入腔模的涨落振幅正交分量 ($\delta x_j = (\delta a_j^\dagger + \delta a_j)/\sqrt{2}$) 和正交分量相位 ($\delta y_j = i(\delta a_j^\dagger - \delta a_j)/\sqrt{2}$), 同时系统中腔场输入的量子噪声也采用相同的形式, 即 $x_j^{\text{in}}(t) = (a_j^{\text{in}+}(t) + a_j^{\text{in}}(t))/\sqrt{2}$, $y_j^{\text{in}}(t) = i(a_j^{\text{in}+}(t) - a_j^{\text{in}}(t))/\sqrt{2}$, $j=1, 2$. 上述量子涨落的线性化朗之万方程可写成如下矩阵形式:

$$d\mathbf{U}(t)/dt = \mathbf{M}\mathbf{U}(t) + \mathbf{N}(t).$$

其中: $\mathbf{U}(t) = (\delta q, \delta p, \delta x_1, \delta y_1, \delta x_2, \delta y_2)^\top$ 是连续变量涨落算符的列矩阵; $\mathbf{N}(t) = (0, \xi(t), \sqrt{2\kappa} \delta x_1^{\text{in}}(t), \sqrt{2\kappa} \delta y_1^{\text{in}}(t), \sqrt{2\kappa} \delta x_2^{\text{in}}(t), \sqrt{2\kappa} \delta y_2^{\text{in}}(t))^\top$ 是噪声来源的列矢量; \mathbf{M} 为漂移矩阵, 其表达式为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_m & -\gamma_m & G_x & G_y & G_x & G_y \\ -G_y & 0 & R_1 & R_2 & 0 & 0 \\ G_x & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 \\ -G_y & 0 & 0 & 0 & R_1 & R_2 \\ G_x & 0 & 0 & 0 & R_3 & R_4 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

式中: G_x 和 G_y 分别为有效耦合系数 G ($G = \sqrt{2} g a_s$) 的实部和虚部, $R_1 = 2\Lambda \cos \theta - \kappa$, $R_2 = 2\Lambda \sin \theta + \Delta$, $R_3 = 2\Lambda \sin \theta - \Delta$, $R_4 = -(\kappa + 2\Lambda \cos \theta)$. 因为腔场的稳态振幅 a_s 与激光驱动振幅 E 成正比, 所以漂移矩阵 \mathbf{M} 中的 G 因子取决于驱动振幅 E 和单光子耦合强度 g 的乘积, 即 $G \propto gE$. 本文利用对数负值对纠缠态进行数值模拟度量, 实验参数为 $E/\omega_m = 0.35 \times 10^4$, $g/\omega_m = 5 \times 10^{-3}$ ^[11]. 根据 Routh-Hurwitz 判据^[12], 若保持系统稳定, 漂移矩阵 \mathbf{M} 所有的本征值的实数部分必须都小于 0. 量子涨落的协方差矩阵 (CM) 为 $\mathbf{V}_{ij} = \langle \mathbf{U}_i(\infty) \mathbf{U}_j(\infty) + \mathbf{U}_j(\infty) \mathbf{U}_i(\infty) \rangle / 2$, 其中 $\mathbf{U}^\top(\infty) = (\delta q(\infty), \delta p(\infty), \delta x_1(\infty), \delta y_1(\infty),$

$\delta x_2(\infty), \delta y_2(\infty)$) 表示稳态($t \rightarrow \infty$) 下涨落算符的列矢量. 在稳态下, CM 中的矩阵元素可表示为

$$V_{ij} = \sum_{k,l} \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' W_{ik}(t) W_{jl}(t') \Phi_{kl}(t-t'). \quad (10)$$

上式中 $W = \exp(\mathbf{M}t)$, $\Phi_{kl}(t-t') = \langle N_k(t) N_l(t') + N_l(t') N_k(t) \rangle / 2$ 为稳态噪声关联函数的矩阵. 当腔场的质量因子 $Q_m = \omega_m / \gamma_m \gg 1$ 时, 量子布朗噪声可表示成 δ 函数:

$$\Phi_{kl}(t-t') = D_{kl} \delta(t-t') = \text{diag}[0, \gamma_m(2n_m+1), \kappa(2n_a+1), \kappa(2n_a+1), \kappa(2n_a+1), \kappa(2n_a+1)] \times \delta(t-t'). \quad (11)$$

简化方程(11)得 $\mathbf{V} = \int_0^\infty dt \mathbf{W}(t) \mathbf{D} \mathbf{W}^T(t)$. 当系统满足稳态条件时, 量子涨落关联矩阵 \mathbf{V} 满足李雅普诺夫方程^[13] $\mathbf{M}\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{M}^T = -\mathbf{D}$.

为了度量移动镜子与腔 1 之间的稳态宏观纠缠, 需要得到关联矩阵的子矩阵 $\mathbf{V}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 均为 \mathbf{V}_m 的 2×2 子矩阵. 利用负度纠缠的定义^[14] 可以得出纠缠度 E_N 的计算公式为

$$E_N = \max[0, -\ln 2\eta^-],$$

$$\text{其中 } \eta^- = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\Sigma} - \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}^2 - 4 \det \mathbf{V}_m}}{2}}, \boldsymbol{\Sigma} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} - 2 \det \mathbf{C}.$$

3 数值分析和讨论

为在双腔光力系统中产生纠缠, 本文选取如下数值模拟参数: 驱动振幅 $E/\omega_m = 2 \times 10^4$, 腔损耗 $\kappa/\omega_m = 0.01$, 振子损耗 $\gamma_m/\omega_m = 10^{-3}$, 光学模的平均热激发数 $n_a = 0$, 机械振子的平均热激发数 $n_m = 0$, 腔和振子的耦合强度 $g/\omega_m = 4 \times 10^{-3}$, 驱动光波长 $\lambda/\omega_m = 20$, 腔频和激光频率的失谐 $\Delta/\omega_m = 3$. 图 2 为腔场间纠缠度 E_N 随 OPA 的相位 θ 和增益系数 Λ 的变化关系, 其中深色区域代表非稳态区域. 由图 2 可以看出: 当参量增益 Λ 的数值较小时, 力学系统达不到稳定状态; 明显的稳态力学纠缠仅存在于 $0.95 > \Lambda/\omega_m > 0.6$ 的范围内, 且相位 θ 需在 $0.1\pi > \theta > 0.65\pi$ 范围内. 由图 2 同时还可以看出, 当相位 θ 取适当的值时(如 $\theta = \pi/2$), 系统产生的力学纠缠随着 OPA 增益系数的不断增强会出现先增大后减小的现象. 这表明, 通过选取适当的增益系数, 可较为容易地观察到移动镜子与腔 1 间的宏观纠缠现象.

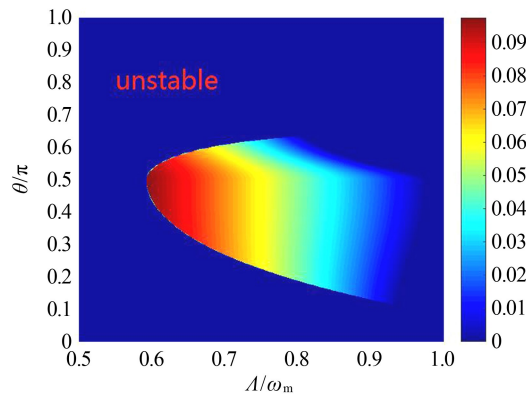


图 2 纠缠度 E_N 随 OPA 的相位 θ 和增益系数 Λ 的变化

图 3 为纠缠度 E_N 与腔-振子耦合强度 g 的变化关系. 图 3 中 $\Lambda/\omega_m = 2.1$, $\theta = 0.5\pi$, 其他参数与图 2 中的参数相同. 由图 3 可以看出, 当 g 在 $0.0002 \sim 0.0005$ 范围时, 纠缠度 E_N 随 g 的增大而显著增强; 当 g 大于 0.0005 时, 力学纠缠度 E_N 的变化趋于平缓.

图 4 为纠缠度 E_N 与腔场失谐 Δ 的变化关系. 图 4 中 $g = 2 \times 10^{-4} \omega_m$, $\theta = 0.5\pi$, 其他参数与图 2 中的参数相同. 由图 4 可以看出, 在有效失谐 Δ 范围内, 腔 1 与移动镜子之间均存在纠缠, 且纠缠随着失谐

的增加而减小. 由此可以看出, 在双腔光力系统中引入 OPA 可增强腔与移动镜子之间的纠缠效应.

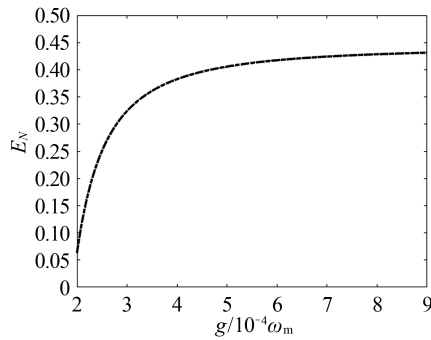


图 3 纠缠度 E_N 与腔-振子耦合强度 g 的变化关系

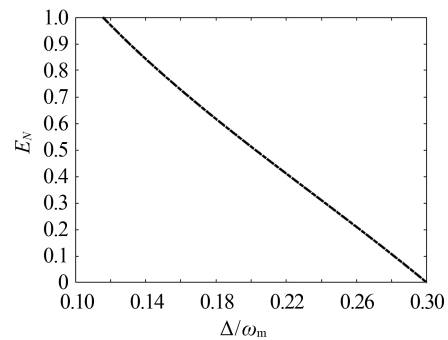


图 4 纠缠度 E_N 与腔场失谐 Δ 的变化关系

4 结论

本文在放置光学参量放大器的腔光力系统中通过选取适合的参数值模拟了可移动镜子与腔纠缠的情况, 并使用负对数值对纠缠效果进行了度量. 研究表明, 调节参量放大器的增益系数和腔场的有效失谐可有效增强腔场与可移动镜子的纠缠效果, 从而减弱热噪声对纠缠带来的影响. 本文方案可对量子信息处理和超高精度测量等提供理论参考.

参考文献:

- [1] MANDEL O, GREINER M, WIDER A, et al. Controlled collisions for multi-particle entanglement of optically trapped atoms[J]. Nature, 2003, 425(6961): 937-940.
- [2] DAISS S, WELTE S, HACKER B, et al. Single-photon distillation via a photonic parity measurement using cavity QED[J]. Physical Review Letters, 2019, 122: 133603.
- [3] KRAUTER H, MUSCHIK C A, JENSEN K, et al. Entanglement generated by dissipation and steady state entanglement of two macroscopic objects[J]. Physical Review Letters, 2011, 107(8): 080503.
- [4] ASPELMEYER M, KIPPENBERG T J, MARQUARDT F. Cavity optomechanics[J]. Reviews of Modern Physics, 2013, 86(4): 1391-1452.
- [5] KRUPA K, TONELLO A, COUDERC V, et al. Spatiotemporal light-beam compression from nonlinear mode coupling[J]. Physical Review A, 2018, 97: 043836.
- [6] SCHMITZ A T, HUANG S J, PREM A, et al. Entanglement spectra of stabilizer codes: a window into gapped quantum phases of matter[J]. Physical Review B, 2019, 99: 205109.
- [7] JOSHI C, LARSON J, JONSON M, et al. Entanglement of distant optomechanical systems[J]. Physical Review A, 2012, 85(3): 033805.
- [8] CHEN R X, SHEN L T, YANG Z B, et al. Enhancement of entanglement in distant mechanical vibrations via modulation in a coupled optomechanical system[J]. Physical Review A, 2014, 89(2): 023843.
- [9] LÜ X Y, WU Y, JOHANSSON J R, et al. Squeezed optomechanics with phase-matched amplification and dissipation[J]. Phys Rev Lett, 2015, 114(9): 093602.
- [10] GARDINER C, ZOLLER P. Quantum Noise: A handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics[M]. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2004.
- [11] MUNDAY J N, CAPASSO F, PARSEGAN V A. Measured long-range repulsive Casimir-Lifshitz forces[J]. Nature, 2009, 457(7226): 170-173.
- [12] HURWITZ A. On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts[J]. Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory, 1964, 65: 273-284.
- [13] MANCINI S, GIOVANNETTI V, VITALI D, et al. Entangling macroscopic oscillators exploiting radiation pressure[J]. Physical Review Letters, 2002, 88(22): 120401.
- [14] VIDAL G, WERNER R F. Computable measure of entanglement[J]. Physical Review A, 2002, 65(3): 032314.