

文章编号: 1004-4353(2020)02-0115-07

一类矩阵迹方程正交解的一些研究

林志兴, 杨忠鹏*, 陈梅香, 晏瑜敏

(莆田学院 数学与金融学院, 福建 莆田 351100)

摘要: 应用正交矩阵标准形及其不变性得到了 n 阶矩阵迹方程 $(\text{tr} \mathbf{A} - 1)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2 = n + 1$ 有正交解 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 的充要条件, 以及该方程的特征值都为实数或纯虚数的所有正交解的显示表达. 由上述结果得到了相应迹方程的对称正交解的通解, 并证明了其不存在反对称正交解.

关键词: 正交矩阵; 矩阵迹方程; 解的显示表达; 正交标准形; 特征值

中图分类号: O151.21

文献标识码: A

Some researches on orthogonal solutions to a class of matrix trace equations

LIN Zhixing, YANG Zhongpeng*, CHEN Meixiang, YAN Yumin

(School of Mathematics and Finance, Putian University, Putian 351100, China)

Abstract: By the canonical form of orthogonal matrix and its invariance, we obtain the necessary and sufficient conditions for the orthogonal solutions $\mathbf{A} = (a_{ij})$ to an n order matrix trace equation $(\text{tr} \mathbf{A} - 1)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2 = n + 1$, and show the explicit expression of all general orthogonal solutions with the eigenvalues be all real or pure imaginary. Then we get the general symmetric orthogonal solutions to the corresponding trace equation, and prove that there is no antisymmetric orthogonal solution.

Keywords: orthogonal matrix; matrix trace equation; explicit expression of solution; orthogonal canonical form; eigenvalue

0 引言

由于正交矩阵具有良好的运算性质, 所以一直受到学者们的关注. 文献[1] 研究了用两个未知的正交矩阵求解线性系统的问题, 文献[2-8] 的作者分别研究了 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ 和 $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$ 等矩阵方程的对称正交解和反对称正交解问题, 文献[9-10] 给出了如下一个 3 阶的行列式为 1 的正交矩阵迹等式:

命题 1 设 \mathbf{A} 为 3 阶正交矩阵(记 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{O}^{3 \times 3}$), 行列式 $|\mathbf{A}| = 1$, 则

$$(\text{tr} \mathbf{A} - 1)^2 + \sum_{i < j} (a_{ij} - a_{ji})^2 = 4.$$

受命题 1 启发, 本文从矩阵迹方程角度出发给出如下迹方程:

$$(\text{tr} \mathbf{A} - 1)^2 + \sum_{i < j} (a_{ij} - a_{ji})^2 = 4, \text{ 未知矩阵 } \mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{O}^{3 \times 3}. \quad (1)$$

例 1 设 $\mathbf{A} = \text{diag} \left(-1, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \right) \in \mathbf{O}^{3 \times 3}$, 由此知命题 1 结论成立, 此时 $|\mathbf{A}| = -1$.

收稿日期: 2020-04-15

* 通信作者: 杨忠鹏(1947—), 男, 教授, 研究方向为代数学.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61772292); 福建省自然科学基金资助项目(2017J01565, 2018J01426)

由例 1 可知命题 1 未包括迹方程(1)的全部正交解. 以下本文将考虑更有意义的一般迹方程:

$$(\operatorname{tr} \mathbf{A} - 1)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2 = n + 1, \text{ 未知矩阵 } \mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{O}^{n \times n}. \quad (2)$$

例 2 设 $\mathbf{A}_1 = \operatorname{diag}\left(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\mathbf{A}_2 = \operatorname{diag}\left(1, -1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\mathbf{A}_3 = \operatorname{diag}\left(-1, -1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\mathbf{A}_4 = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathbf{O}^{4 \times 4}$. 因 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ 使方程(2)右边分别为 5, 5, 13, 9, 所以 \mathbf{A}_1 与 \mathbf{A}_2 是迹方程(2)的正交解, 而 \mathbf{A}_3 和 \mathbf{A}_4 都不是方程(2)的正交解. 显然 $|\mathbf{A}_1| = |\mathbf{A}_3| = |\mathbf{A}_4| = 1$, $|\mathbf{A}_2| = -1$.

由例 2 可知 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{O}^{4 \times 4}$ 是否为迹方程(2)的正交解与 $|\mathbf{A}| = 1$ 没有关系. 基于上述问题, 本文应用正交矩阵的标准形和不变性, 给出迹方程(2)有正交解的充分必要条件及其对称正交解的通解的显式表达, 并指出不存在反对称正交解. 为了讨论方便, 下面给出各记号的说明.

设 \mathbf{C} 为复数域, \mathbf{R} 为实数域, \mathbf{Z} 为所有整数的集合. $\mathbf{E}(\mathbf{E}_n)$ 为 (n) 阶单位矩阵, $r(\mathbf{A})$ 、 \mathbf{A}^T 、 $|\mathbf{A}|$ 、 $\operatorname{tr} \mathbf{A}$ 分别表示矩阵 \mathbf{A} 的秩、转置、行列式、迹. 复数 $i \in \mathbf{C}$ 满足 $i^2 = -1$, 记 $|a|$ 为 $a \in \mathbf{C}$ 的模. 实矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 的特征多项式 $p_{\mathbf{A}}(x) = |x\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ 在 \mathbf{C} 上的 n 个根 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 为其特征值, 且记 $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. 如果 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E}$, 称 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为正交矩阵. $\mathbf{O}^{n \times n}$ 、 $\mathbf{SO}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{ISO}^{n \times n}$ 分别为 n 阶正交矩阵、对称正交矩阵和特征值全为实数或纯虚数正交矩阵的集合. 当 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 满足 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$ 时, 称其为反对称正交矩阵, 类似于文献[2]用 $\mathbf{ASO}^{n \times n}$ 表示 n 阶反对称正交矩阵的集合. 以下总假设 t, s 分别为 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{O}^{n \times n}$ 的特征值 1 和 -1 的重数, k 为 \mathbf{A} 两两共轭的非实特征值的对数.

1 正交矩阵为迹方程(2)的正交解的充要条件

引理 1 设 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{O}^{n \times n}$, $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 则

$$|\lambda_j| = 1, \lambda_j \in \sigma(\mathbf{A}), \text{ 且 } |\mathbf{A}| = (-1)^s, -1 \text{ 为 } \mathbf{A} \text{ 的 } s \text{ 重特征值}. \quad (3)$$

证明 由文献[9]和[11]知 $|\lambda_j| = 1$, 进而由行列式性质可知式(3)成立.

引理 2 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{O}^{n \times n}$, 则有 $\mathbf{Q} \in \mathbf{O}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{W}_j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{bmatrix}$, $-1 < a_j < 1$, $a_j^2 + b_j^2 = 1$, $j = 1, 2, \dots, k$ 使

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \operatorname{diag}(\mathbf{E}_t, -\mathbf{E}_s, \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_k) = \mathbf{O}_A, t + s + 2k = n, \quad (4)$$

且 $\mathbf{A} \in \mathbf{SO}^{n \times n} \Leftrightarrow$ 式(4)中 $k = 0$, $\mathbf{A} \in \mathbf{ASO}^{n \times n} \Leftrightarrow$ 式(4)中 $t = s = 0$, 其中 $a_j = 0$, $b_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, k$.

证明 由文献[12-14]可得到正交标准形(4). 由式(4)知 $\mathbf{A} \in \mathbf{SO}^{n \times n} \Leftrightarrow$ 式(4)中 $k = 0$, $\mathbf{A} \in \mathbf{ASO}^{n \times n} \Leftrightarrow$ 式(4)中 $t = s = 0$, 其中 $a_j = 0$, $b_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, k$.

引理 3 [14] 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 则 $\operatorname{tr} \mathbf{A} = -\operatorname{tr}(-\mathbf{A})$, $\sigma(-\mathbf{A}) = \{-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n\}$, 且 $\mathbf{A} \in \mathbf{O}^{n \times n} \Leftrightarrow -\mathbf{A} \in \mathbf{O}^{n \times n}$.

引理 4 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 如果 $p_{\mathbf{A}}(x) = |x\mathbf{E} - \mathbf{A}| = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-1} x + c_n$, 则 $c_1 = -\operatorname{tr} \mathbf{A}$, $c_2 = \frac{1}{2}((\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2)$, $c_n = (-1)^n |\mathbf{A}|$.

证明 当 $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 时, 从特征多项式的根与系数的关系知 $c_1 = -\operatorname{tr} \mathbf{A} = -\sum_{i=1}^n \lambda_i$, $c_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right] = \frac{1}{2} [(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2]$, $c_n = (-1)^n |\mathbf{A}| = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

下面考虑迹方程(2)的“对偶”方程:

$$(\operatorname{tr} \mathbf{A} + 1)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2 = n + 1, \text{ 未知矩阵 } \mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{O}^{n \times n}. \quad (5)$$

定理 1 设 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{O}^{n \times n}$, 则:

$$(\operatorname{tr} \mathbf{A} - 1)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2 = (n+1) - 2 \operatorname{tr} \mathbf{A} + [(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2], \quad (6)$$

$$(\operatorname{tr} \mathbf{A} + 1)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2 = (n+1) + 2 \operatorname{tr} \mathbf{A} + [(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2], \quad (7)$$

$$\mathbf{A} \text{ 为矩阵迹方程(2)的正交解} \Leftrightarrow (\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - 2 \operatorname{tr} \mathbf{A} = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2, \quad (8)$$

$$\mathbf{A} \text{ 为矩阵迹方程(5)的正交解} \Leftrightarrow 2 \operatorname{tr} \mathbf{A} + (\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2. \quad (9)$$

证明 因 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} - a_{ji})^2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)^T = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 - (\mathbf{A}^T)^2) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(2\mathbf{E} - \mathbf{A}^2 - (\mathbf{A}^2)^T) = n - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{A}^2)^T = n - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2$, 进而应用引理4可得 $(\operatorname{tr} \mathbf{A} - 1)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2 = (\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - 2 \operatorname{tr} \mathbf{A} + 1 + n - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2$, 由此知式(6)成立.

由 $-\mathbf{A} \in \mathbf{O}^{n \times n}$ 和引理3可得 $\frac{1}{2}[(\operatorname{tr}(-\mathbf{A}))^2 - \operatorname{tr}(-\mathbf{A})^2] = \frac{1}{2}[(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2]$. 再由式(6)可得 $(\operatorname{tr} \mathbf{A} + 1)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2 = (\operatorname{tr}(-\mathbf{A}) - 1)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-a_{ij} - (-a_{ji}))^2 = (n+1) - 2 \operatorname{tr}(-\mathbf{A}) + [(\operatorname{tr}(-\mathbf{A}))^2 - \operatorname{tr}(-\mathbf{A})^2]$, 由此知式(7)成立.

由式(6)即可得到式(8), 由式(5)和式(7)即可得到式(9).

式(6)和式(7)不仅给出了迹方程(2)和方程(5)有正交解 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{O}^{n \times n}$ 的充要条件, 而且还表明求解迹方程(2)和方程(5)的正交解就是确定矩阵迹方程 $(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - 2 \operatorname{tr} \mathbf{A} = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2$ 和 $(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 + 2 \operatorname{tr} \mathbf{A} = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2$ 的正交解. 因 \mathbf{A} 和 \mathbf{A}^2 在迹相似下不变, 所以求迹方程(2)和方程(5)的正交解可转化为对正交矩阵的正交标准形的研究. 由定理1和引理3可得以下推论:

推论1 设 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{O}^{n \times n}$, 则 \mathbf{A} 是迹方程(2)或方程(5)的正交解 $\Leftrightarrow \mathbf{O}_\mathbf{A}$ 是迹方程(2)或方程(5)的正交解, 且 \mathbf{A} 满足迹方程(2) $\Leftrightarrow \mathbf{B} = -\mathbf{A}$ 满足迹方程(5).

推论1说明迹方程(2)和方程(5)的正交解是互为确定的, 因此本文只讨论迹方程(2)的正交解.

2 迹方程(2)的所有特征值为实数或纯虚数的正交通解的显示表达式

设 $\mathbf{UO}^{n \times n}$ 是迹方程(2)的正交解集合, 且 $\mathbf{H}_{2k} = \operatorname{diag}(\underbrace{\mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_2}_k) \in \mathbf{IO}^{2k \times 2k}$, 其中:

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{IO}^{n \times n} = \{\mathbf{A} \in \mathbf{O}^{n \times n} \mid \mathbf{O}_\mathbf{A} = \operatorname{diag}(\mathbf{E}_t, -\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{2k})\}, t + s + 2k = n. \quad (10)$$

引理5 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{IO}^{n \times n}$, 则:

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = t - s \in \mathbf{Z}, 0 \leq t, s \leq n, \mathbf{A} \in \mathbf{IO}^{n \times n}; \quad (11)$$

$$\mathbf{O}_{\mathbf{A}^2} = \operatorname{diag}(\mathbf{E}_t, \mathbf{E}_s, -\mathbf{E}_{2k}), t + s + 2k = n, k = \frac{1}{4}(n - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2), \mathbf{A} \in \mathbf{IO}^{n \times n}; \quad (12)$$

$$s = \frac{1}{4}(n + \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 - 2 \operatorname{tr} \mathbf{A}), t = \frac{1}{4}(n + \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 + 2 \operatorname{tr} \mathbf{A}), \mathbf{A} \in \mathbf{IO}^{n \times n}. \quad (13)$$

证明 由式(10)知式(11)成立, 且 $\mathbf{O}_{\mathbf{A}^2} = \operatorname{diag}(\mathbf{E}_t, \mathbf{E}_s, -\mathbf{E}_{2k})$, 所以 $\operatorname{tr} \mathbf{A}^2 = t + s - 2k = n - 4k$, 由此得式(12)成立. 同时因 $\operatorname{tr} \mathbf{A} = (t + s + 2k) - 2s - 2k = n - 2s - \frac{1}{2}(n - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2) = \frac{1}{2}(n + \operatorname{tr} \mathbf{A}^2) - 2s$, 所以由式(11)可得式(13)成立.

引理6 设任意 $\mathbf{A} \in \mathbf{IO}^{2 \times 2}$, 则 \mathbf{A} 不满足迹方程(2).

证明 由式(10)知此时 \mathbf{A} 的正交标准形只有4种情况: $\mathbf{E}_2, -\mathbf{E}_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 经计算知

这 4 种情况都不满足式(8),再由定理 1 和推论 1 知任意的 $\mathbf{A} \in \mathbf{IO}^{2 \times 2}$ 都不满足迹方程(2).

由引理 6 可知,讨论 $\mathbf{IO}^{n \times n}$ 的迹方程(2)的正交解时设 $n \geq 3$ 是合理的. 以下用 $\mathbf{UIO}^{n \times n}$ 表示迹方程(2)的 $\mathbf{IO}^{n \times n}$ 正交解集合.

定理 2 设 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{IO}^{n \times n}$, $n \geq 3$, 则 $\mathbf{A} \in \mathbf{UIO}^{n \times n}$, 即 \mathbf{A} 为迹方程(2)的正交解 \Leftrightarrow

$$\sqrt{n-4k+1} \in \mathbf{Z}, \text{ 且 } \mathbf{O}_A = \text{diag}(\mathbf{E}_t, -\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{2k}), k = \frac{1}{4}(n - \text{tr} \mathbf{A}^2). \quad (14)$$

式中 s, t 都是非负的,同时

$$t = \frac{1}{2}(n - 2k + 1 + \sqrt{n-4k+1}), s = \frac{1}{2}(n - 2k - 1 - \sqrt{n-4k+1})$$

或

$$t = \frac{1}{2}(n - 2k + 1 - \sqrt{n-4k+1}), s = \frac{1}{2}(n - 2k - 1 + \sqrt{n-4k+1}). \quad (15)$$

证明 首先证明必要性. 由定理 1 的证明可知 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2 = n - \text{tr} \mathbf{A}^2$, 因此由式(2)和式(8)

可得 $(\text{tr} \mathbf{A})^2 - 2\text{tr} \mathbf{A} + 1 + n - \text{tr} \mathbf{A}^2 = n + 1$, 即

$$(\text{tr} \mathbf{A} - 1)^2 = \text{tr} \mathbf{A}^2 + 1, \text{ 当 } \mathbf{A} \in \mathbf{UIO}^{n \times n} \text{ 时}. \quad (16)$$

由式(11)、(12)和式(16)得 $(\text{tr} \mathbf{A} - 1)^2 = (t - s - 1)^2 = (n - s - 2k - s - 1)^2 = (n - 2s - 2k - 1)^2 = (\sqrt{n-4k+1}^2 - 2(s-k) - 2)^2 = \text{tr} \mathbf{A}^2 + 1 = n - 4k + 1$, 由此可知 $\sqrt{n-4k+1} \in \mathbf{Z}$, 且

$$2s = n - 2k - 1 \pm \sqrt{n-4k+1} = \sqrt{n-4k+1}^2 \pm \sqrt{n-4k+1} + 2k - 2 \text{ 是偶数}. \quad (17)$$

由式(17)知

$$s = \frac{1}{2}(n - 2k - 1 - \sqrt{n-4k+1}) = \frac{1}{2}(n - 4k + 1 - \sqrt{n-4k+1} - 2) + k \quad (18)$$

或

$$s = \frac{1}{2}(n - 2k - 1 + \sqrt{n-4k+1}) = \frac{1}{2}(n - 4k + 1 + \sqrt{n-4k+1} - 2) + k. \quad (19)$$

当式(18)成立时,如果 $k=0$,则由 $n \geq 3$ 和式(18)得

$$s = \frac{1}{2}(n - 1 - \sqrt{n+1}) = \frac{1}{2}[(n+1) - \sqrt{n+1} - 2] = \frac{1}{2}(\sqrt{n+1} + 1)(\sqrt{n+1} - 2) \geq 0.$$

如果 $k \geq 1$, 则 $\sqrt{n-4k+1} = 0$ 或 $\sqrt{n-4k+1} \geq 1$. 进而由式(18)得

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}(n - 2k - 1 - \sqrt{n-4k+1}) = \frac{1}{2}(n - 4k + 1 - \sqrt{n-4k+1}) + (k-1) = \\ &\frac{1}{2}\sqrt{n-4k+1}(\sqrt{n-4k+1} - 1) + (k-1) \geq k-1 \geq 0. \end{aligned}$$

由以上知必有 $s = \frac{1}{2}(n - 2k - 1 - \sqrt{n-4k+1}) (\geq 0) \in \mathbf{Z}$, 进而应用式(12)知此时

$$t = n - s - 2k = \frac{1}{2}(n - 2k + 1 + \sqrt{n-4k+1}) = \frac{1}{2}(n - 4k + 1 + \sqrt{n-4k+1}) + k \geq 0.$$

当式(19)成立时,如果 $k=0$,则由 $n \geq 3$ 和式(19)得 $s = \frac{1}{2}(n - 1 + \sqrt{n+1}) \geq 0$; 如果 $k \geq 1$, 则

$\sqrt{n-4k+1} = 0$ 或 $\sqrt{n-4k+1} \geq 1$, 进而由式(19)得 $s = \frac{1}{2}(n - 4k + 1 + \sqrt{n-4k+1} - 2) + k =$

$\frac{1}{2}(\sqrt{n-4k+1} + 2)(\sqrt{n-4k+1} - 1) + k \geq 0$. 由此证明当式(19)成立时,必有 $s = \frac{1}{2}(n - 2k - 1 +$

$\sqrt{n-4k+1})$. 再由式(12)和式(19)知,此时 $t = n - s - 2k = \frac{1}{2}(n - 2k + 1 - \sqrt{n-4k+1}) = \frac{1}{2} \cdot$

$\sqrt{n-4k+1}(\sqrt{n-4k+1}-1)+k \geq 0$, 式(15) 得证.

其次证明充分性. 当式(14) 成立且非负的 t, s 取式(15) 的第1组数时, 由式(11) 得

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = t - s = \frac{1}{2}[(n-2k+1+\sqrt{n-4k+1}) - (n-2k-1-\sqrt{n-4k+1})] = 1 + \sqrt{n-4k+1}.$$

再由式(12) 得 $(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - 2\operatorname{tr} \mathbf{A} = (1 + \sqrt{n-4k+1})^2 - 2(1 + \sqrt{n-4k+1}) = n - 4k = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2$. 进而由式(8) 知 $\mathbf{A} \in \mathbf{UIO}^{n \times n}$. 当非负的 t, s 取式(15) 的第2组数时, 由式(11) 得

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = t - s = \frac{1}{2}[(n-2k+1-\sqrt{n-4k+1}) - (n-2k-1+\sqrt{n-4k+1})] = 1 - \sqrt{n-4k+1}.$$

再由式(12) 得 $(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - 2\operatorname{tr} \mathbf{A} = (1 - \sqrt{n-4k+1})^2 - 2(1 - \sqrt{n-4k+1}) = n - 4k = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2$. 进而由式(8) 知 $\mathbf{A} \in \mathbf{UIO}^{n \times n}$. 定理2 得证.

例3 由文献[15] 中的第572习题知 $\mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{O}^{3 \times 3}$. 由文献[14] 中的例3 知

$\sigma(\mathbf{B}) = \{1, i, -i\}$, 即 $\mathbf{B} \in \mathbf{IO}^{3 \times 3}$.

由例3 可以看出, 用式(10) 中的正交标准形无法判定是否 $\mathbf{A} \in \mathbf{IO}^{n \times n}$, 因此本文给出以下实用的判别方法.

引理7 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{O}^{n \times n}$, 则 $\mathbf{A} \in \mathbf{IO}^{n \times n} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 \in \mathbf{SO}^{n \times n}$.

证明 当 $\mathbf{A} \in \mathbf{IO}^{n \times n}$ 时, 由式(10) 和式(12) 知 $\mathbf{A}^2 \in \mathbf{SO}^{n \times n}$. 当 $\mathbf{A}^2 \in \mathbf{SO}^{n \times n}$ 时, 如果 $\mathbf{A} \in \mathbf{SO}^{n \times n}$, 显然 $\mathbf{A} \in \mathbf{IO}^{n \times n}$. 如果 $\mathbf{A} \notin \mathbf{SO}^{n \times n}$, 则由引理1 知 $|\mathbf{A}^2| = |\mathbf{A}|^2 = 1$. 由 $\mathbf{A} \in \mathbf{O}^{n \times n}$ 和式(3)、式(4) 知, -1 为 \mathbf{A}^2 的偶数重特征值. 根据正交标准形的唯一性有 $\mathbf{O}_{\mathbf{A}^2} = \operatorname{diag}(\mathbf{E}_t, \mathbf{E}_s, -\mathbf{E}_2, \dots, -\mathbf{E}_2) = (\mathbf{O}_{\mathbf{A}})^2 = \operatorname{diag}(\mathbf{E}_t, \mathbf{E}_s, \mathbf{W}_1^2, \dots, \mathbf{W}_k^2)$, 因此

$$\mathbf{W}_j^2 = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a_j^2 - b_j^2 & 2a_j b_j \\ -2a_j b_j & a_j^2 - b_j^2 \end{bmatrix} = -\mathbf{E}_2, \quad 1 \leq j \leq k. \quad (20)$$

由 $b_j \neq 0$ 和式(20) 中的 $2a_j b_j = 0$ 可知 $a_j = 0$, 进而可知 $b_j = \pm 1$. 于是由引理2 可知 \mathbf{A} 的特征值为实数或纯虚数, 即 $\mathbf{A} \in \mathbf{IO}^{n \times n}$.

由引理7 知 $\mathbf{IO}^{n \times n} = \{\mathbf{A} \in \mathbf{O}^{n \times n} \mid \mathbf{A}^2 \in \mathbf{SO}^{n \times n}\}$ 与式(10) 等价, 因此由定理2、引理8 和推论1 可得如下定理3 成立.

定理3 设 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{O}^{n \times n}$, $n \geq 3$, $\mathbf{A}^2 \in \mathbf{SO}^{n \times n}$, t 和 s 由式(15) 确定, 则

$$\mathbf{UIO}^{n \times n} = \{\mathbf{Q}^{-1} \operatorname{diag}(\mathbf{E}_t, -\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{2k}) \mathbf{Q} \mid \sqrt{\operatorname{tr} \mathbf{A}^2 + 1} \in \mathbf{Z}, k = \frac{1}{4}(n - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2), \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{O}^{n \times n}\}. \quad (21)$$

定理3 给出了迹方程(2) 的所有特征值为实数或纯虚数的正交解的简单实用的判定方法. 设 $\mathbf{USO}^{n \times n}$ 、 $\mathbf{UASO}^{n \times n}$ 分别是迹方程(2) 的对称正交解、反对称正交解的集合, 则由引理2 和引理7、式(10)、定理2 和定理3、推论1 可得如下定理4 成立.

定理4 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{SO}^{n \times n}$, 则 $\mathbf{A} \in \mathbf{USO}^{n \times n} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} \in \mathbf{Z}$ 且 $t = \frac{1}{2}(n+1+\sqrt{n+1})$, $s = \frac{1}{2}(n-1-\sqrt{n+1})$ 或 $t = \frac{1}{2}(n+1-\sqrt{n+1})$, $s = \frac{1}{2}(n-1+\sqrt{n+1})$, 且 $\mathbf{USO}^{n \times n} = \{\mathbf{Q}^{-1} \operatorname{diag}(\mathbf{E}_t, -\mathbf{E}_s) \mathbf{Q} \mid \sqrt{n+1} \in \mathbf{Z}, \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{O}^{n \times n}\}$.

定理4 不仅给出了迹方程(2) 存在对称正交解的等价描述, 还给出了迹方程(2) 的对称正交解的通解表达. 由引理2 的结论和定理2 可得定理5.

定理 5 不存在 $A \in \mathbf{ASO}^{n \times n}$ 满足迹方程(2), 即迹方程(2) 的反对称正交解的集合 $\mathbf{UASO}^{n \times n} = \emptyset$.

证明 因实反对称矩阵的特征值只能是 0 或纯虚数, 所以当 $A \in \mathbf{ASO}^{n \times n}$ 时, 由引理 2 的式(4) 可设 $O_A = \text{diag}(O, H_{2k})$, $H_{2k} = \text{diag}(H, \dots, H)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 由此可得 $O_{A^2} = \text{diag}(O, -E_{2k})$, 且 $\text{tr} A = 0$, $\text{tr} A^2 = -2k$. 因 $A \neq 0$, 所以 $k \neq 0$, 由此可知 $(\text{tr} A)^2 - 2\text{tr} A - \text{tr} A^2 = 2k \neq 0$. 再由定理 1 的式(8) 知 $\mathbf{UASO}^{n \times n} = \emptyset$.

定理 6 设 $A = (a_{ij}) \in O^{n \times n}$, $n \geq 3$, 且 $A^2 \in \mathbf{SO}^{n \times n}$, 则 $A \in \mathbf{UO}^{n \times n} \Leftrightarrow 4 \mid n$ 或 $4 \mid n-3$ (4 整除 n 或 4 整除 $n-3$).

证明 由 $A^2 \in \mathbf{SO}^{n \times n}$ 和引理 7 知 $A \in \mathbf{IO}^{n \times n}$. 首先证明充分性. 当 $n = 4q$, $q (\geq 1) \in \mathbf{Z}$ 时, 取 $k = q$ 即 $\sqrt{n-4k+1} = 1$. 由式(14) 和式(15) 可知, 满足 $O_A = \text{diag}(E_q, -E_q, H_{2q})$ 或 $O_A = \text{diag}(E_{q+1}, -E_{q-1}, H_{2q})$ 的正交矩阵 $A \in \mathbf{UIO}^{n \times n} \subseteq \mathbf{UO}^{n \times n}$. 当 $n = 4q+3$ 时, 取 $k = q$ 即 $n-4q+1 = 2^2$, 由式(14) 和式(15) 可知, 存在 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{IO}^{n \times n}$ 使得 $O_A = \text{diag}(E_{q+3}, -E_q, H_{2q})$ 或 $O_A = \text{diag}(E_{q+1}, -E_{q+2}, H_{2q})$, 即 $A \in \mathbf{UIO}^{n \times n} \subseteq \mathbf{UO}^{n \times n}$. 充分性得证.

其次证明必要性. 当 $n \geq 3$ 时, 如果对某个 n 有 $\mathbf{UIO}^{n \times n} \neq \emptyset$ 且 $4 \nmid n$, $4 \nmid n-3$, 则必有 $4 \mid n-1$ 或 $4 \mid n-2$. 当存在正整数 q 使得 $n = 4q+1$, 且 $A \in \mathbf{UIO}^{n \times n}$ 时, 由式(14) 知有整数 $l \in \mathbf{Z}$ 使得 $n-4k+1 = 4(q-k)+2 = l^2$, 因此存在 $t \in \mathbf{Z}$ 使得 $l = 2t \in \mathbf{Z}$. 于是可知有 $4(q-k)+2 = 4t^2$, 进而得到矛盾式 $1 = 2(t^2 - q + k)$. 当存在正整数 q 使得 $n = 4q+2$, 且 $A \in \mathbf{UIO}^{n \times n}$ 时, 由式(14) 知有整数 $l \in \mathbf{Z}$ 使得 $n-4k+1 = 4(q-k)+3 = l^2$, 因此存在 $t \in \mathbf{Z}$ 使得 $l = 2t+1 \in \mathbf{Z}$. 于是可知有 $4(q-k)+3 = 4t^2 + 4t + 1$, 进而得到矛盾式 $2 = 4(t^2 + t - q + k)$. 必要性得证.

当 $n \geq 3$ 且 $4 \mid n$ 或 $4 \mid n-3$ 时, 由引理 7、定理 3 和定理 6 知, 如果 $A^2 \in \mathbf{SO}^{n \times n}$, 则一定有 $A \in \mathbf{IO}^{n \times n}$. 由此应用定理 3 和定理 6 即可求出所有满足 $\sqrt{n-4k+1} \in \mathbf{Z}$ 的非负整数 k , 然后再根据式(15) 计算出满足式(21) 的正交标准形, 得到相似意义下的 $\mathbf{UIO}^{n \times n}$ 全部元素. 表 1 为采用该方法得到的结果.

表 1 满足 $\sqrt{n-4k+1} \in \mathbf{Z}$ 的非负整数 k 及其对应的正交标准形

n	k	t	s	正交标准形	n	k	t	s	正交标准形
3	0	3	0	(3,0,0)	15	0	10	5	(10,5,0)
		1	2	(1,2,0)			6	9	(6,9,0)
	1	1	0	(1,0,1)		3	6	3	(6,3,3)
4	1	2	0	(2,0,1)			4	5	(4,5,3)
		1	1	(1,1,1)		4	4	3	(4,3,4)
7	1	4	1	(4,1,1)	16	2	8	4	(8,4,2)
		2	3	(2,3,1)			5	7	(5,7,2)
	2	2	1	(2,1,2)		4	5	3	(5,3,4)
8	0	6	2	(6,2,0)			4	4	(4,4,4)
		3	5	(3,5,0)		19	1	11	6
2	3	1	(3,1,2)	7	10			(7,10,1)	
	2	2	2	(2,2,2)	4		7	4	(7,4,4)
11	2	5	2	(5,2,2)			5	6	(5,6,4)
		3	4	(3,4,2)	5		5	4	(5,4,5)
	3	3	2	(3,2,3)	20	3	9	5	(9,5,3)
12	1	7	3	(7,3,1)			6	8	(6,8,3)
		4	6	(4,6,1)		6	4	(6,4,5)	
	3	4	2	(4,2,3)		4	5	5	(5,5,5)

表1中数组 (t, s, k) 是正交标准形 $\text{diag}(\mathbf{E}_t, -\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{2k})$ 的简单记法. 由定理3和定理4知, 当 $n=5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18$ 时, 相应的 $\mathbf{UIO}^{n \times n}$ 为空集, 依此可列出 $3 \leq n \leq 20$ 时矩阵迹方程(2)在相似意义下的 $\mathbf{UIO}^{n \times n}$ 的全部元素.

例4 设 $\mathbf{A} = \text{diag}\left(1, 1, 1, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{15} \\ -\sqrt{15} & -1 \end{pmatrix}\right) \in \mathbf{O}^{5 \times 5}$. 由 $\mathbf{A}^2 = \text{diag}\left(1, 1, 1, \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -14 & -2\sqrt{15} \\ 2\sqrt{15} & -14 \end{pmatrix}\right)$ 知 $\text{tr}\mathbf{A} = \frac{5}{2}$, $\text{tr}\mathbf{A}^2 = \frac{5}{4}$, 因此 $(\text{tr}\mathbf{A})^2 - 2\text{tr}\mathbf{A} = \frac{5}{4} = \text{tr}\mathbf{A}^2$, 即式(8)成立, $\mathbf{A} \in \mathbf{UO}^{5 \times 5}$. 但由定理4知, $\mathbf{UIO}^{5 \times 5} = \emptyset$.

由例4知, 当 $\mathbf{UIO}^{n \times n} = \emptyset$ 时, $\mathbf{UO}^{n \times n} = \emptyset$ 不一定成立.

参考文献:

- [1] ZHANG T, SINGER A. Disentangling orthogonal matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2017, 524: 159-181.
- [2] MENG C J, HU X H, ZHANG L. The skew-symmetric orthogonal solutions of the matrix equation $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2005, 402: 303-318.
- [3] 张磊. 正交变换及其反问题[J]. 湖南数学年刊, 1985, 5(1): 87-93.
- [4] 张磊. 正交矩阵的反问题及其最佳逼近[J]. 湖南数学年刊, 1990, 10(1/2): 122-127.
- [5] 孟纯军, 胡锡炎. 对称正交矩阵反问题及其最佳逼近[J]. 计算数学, 2006, 27(3): 269-280.
- [6] 龚涛. 两类矩阵方程的正交解研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2011.
- [7] 于娟. 几类约束矩阵方程(组)的解及其最小二乘问题[D]. 上海: 上海大学, 2014.
- [8] 赵冰艳. 矩阵方程的特殊解及其最佳逼近问题的研究[D]. 长沙: 湖南科技大学, 2015.
- [9] ZHANG F Z. Matrix Theory Basic Results and Techniques[M]. 2nd. New York: Springer, 2011.
- [10] ZHANG F Z. Matrix Theory Basic Results and Techniques[M]. New York: Springer, 1999.
- [11] BERNSTEIN D S. Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas[M]. 2nd. Princeton: Princeton University Press, 2009.
- [12] HORN R A, JOHNSON C R. Matrix Analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1985.
- [13] GOODSON G R. The inverse-similarity problem for real orthogonal matrices[J]. Amer Math Monthly, 1997 (104): 223-230.
- [14] 陈梅香, 杨忠鹏, 晏瑜敏, 等. 迹为整数的 3×3 阶正交矩阵的谱[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2018, 19(2): 158-163.
- [15] 普罗斯库烈柯夫 И. Б. 线性代数习题集解答: 第一册[M]. 周晓钟, 译. 北京: 人民教育出版社, 1983.