文章编号: 1004-4353(2020)02-0095-06

一类 Hilfer 型分数阶微分方程解的存在和唯一性

甘亦苗,　侯成敏*
(延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 用 Banach 不动点定理和上下解方法研究了 $\alpha(1<\alpha<2)$ 阶数和 $\beta(0\leqslant\beta\leqslant1)$ 类型 Hilfer 分数阶微分方程的解,给出了方程解的存在和唯一性,并通过例证验证了本文所得结果的有效性.

关键词: Hilfer 分数阶微分方程; 上下解方法; Banach 不动点定理; 唯一性
中图分类号: O175.6　　**文献标识码:** A

The existence and uniqueness of the solutions of a class of Hilfer fractional differential equations

GAN Yimiao,　HOU Chengmin*
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: The Banach fixed point theorem and upper and lower solution methods are used to study the solutions of the order α $(1<\alpha<2)$ and type β $(0\leqslant\beta\leqslant1)$ of Hilfer fractional differential equations. The existence and uniqueness of the solutions of the equations are given. The validity of the results obtained in this paper is proved by examples.

Keywords: Hilfer fractional differential equation; upper and lower solution methods; Banach fixed point theorem; uniqueness

0　引言

Hilfer 型分数阶导数被称为 α 阶和 β 型的广义分数阶导数,它包含 Riemann-Liouville 和 Caputo 分数阶导数(分别作 $\beta=0$ 和 $\beta=1$ 的特例). 与经典微积分相比,因 Hilfer 型分数阶导数具有独特的性质,尤其在描述对象的"记忆性""遗传性"等方面,因此它被广范应用于众多学科领域中[1]. 2012 年, K.M. Furati 等[2]利用 Banach 不动点定理研究了如下积分边值问题:

$$\begin{cases} D_{a^+}^{\alpha;\beta}y(x)=f(x,y),\ x>a,\ 0<\alpha<1,\ 0\leqslant\beta\leqslant1; \\ I_{a^+}^{1-\gamma}y(a^+)=y_a,\ \gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta, \end{cases}$$

并证明了其解的存在唯一性. 其中 $D_{a^+}^{\alpha;\beta}$ 是含有 $\alpha(1<\alpha<2)$ 阶 $\beta(0\leqslant\beta\leqslant1)$ 型的 Hilfer 分数阶导数, $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

2019 年, J.Anjali 等[3] 使用 Schauder 不动点定理和 Banach 压缩映射定理研究了如下方程:

收稿日期: 2020－04－15
* **通信作者:** 侯成敏(1963—),女,教授,研究方向为微分理论及其应用.

$$\begin{cases} D_0^{\alpha,\beta}u(t)=Au(t)+f(t,u(t)), \\ (g^{(1-\beta)(2-\alpha)}\times u)(0)=u_1,\ (g^{(1-\beta)(2-\alpha)}\times u)'(0)=u_2, \end{cases}$$

并证明了其解的存在性和唯一性. 其中 $D_{a+}^{\alpha;\beta}$ 是含有 $\alpha(1<\alpha<2)$ 阶 $\beta(0\leqslant\beta\leqslant1)$ 型的 Hilfer 分数阶导数, A 是闭的线性算子.

受到以上文献的启发,本文讨论如下连续函数加权空间中具有积分边界条件的非线性 Hilfer 分数阶微分方程解的存在性和唯一性:

$$D_{0+}^{\alpha;\beta}y(t)=f(t,y(t)),\ t\in I; \tag{1}$$

$$I_{0+}^{2-\gamma}y(0)=\lambda\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s+d; \tag{2}$$

$$D_{0+}^{\gamma-1}y(0)=\int_0^1 f(s,y(s))\mathrm{d}s. \tag{3}$$

其中 $D_{0+}^{\alpha;\beta}$ 是含有 $\alpha(1<\alpha<2)$ 阶 $\beta(0\leqslant\beta\leqslant1)$ 型的 Hilfer 分数阶导数, $\lambda,d\in\mathbf{R}$, $I=(0,1]$, $\gamma=1+2\beta-\alpha\beta$, $I_{0+}^{2-\gamma}$ 和 $D_{0+}^{\gamma-1}$ 分别是 Riemann-Liouville 分数阶积分和导数.

1 预备知识和相关引理

定义 1[4] 令 $\alpha\in(n-1,n)$, $n\in\mathbf{Z}^+$, $\beta\in[0,1]$, 则 Hilfer 的分数阶导数为

$$D_{a+}^{\alpha;\beta}y(t)=I_{a+}^{\beta(n-\alpha)}D^n I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha)}y(t),\ t\in[a,b]. \tag{4}$$

公式(4) 的另一形式为

$$D_{a+}^{\alpha;\beta}y(t)=I_{a+}^{\beta(n-\alpha)}D_{a+}^{\alpha+n\beta-\alpha\beta}y(t)=I_{a+}^{\theta-\alpha}D_{a+}^{\theta}y(t),\ t\in[a,b]. \tag{5}$$

性质 1 令 $\theta=\alpha+n\beta-\alpha\beta$. 如果 $y\in C^n[a,b]$, 则 $I_{a+}^{\theta}D_{a+}^{\theta}y=I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha;\beta}y$.

性质 2 $I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha;\beta}y(t)=y(t)-\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{D^{\theta-j}y(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(t-a)^{\theta-j}$, $n=[\theta]+1$. 特别的,如果 $0<\alpha<1$, 则有 $I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha;\beta}y(t)=y(t)-\dfrac{I_{a+}^{1-\alpha-\beta+\alpha\beta}y(a)}{\Gamma(\alpha+\beta-\alpha\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-\alpha\beta-1}$.

引理 1 令 $\theta=\alpha+n\beta-\alpha\beta$, 如果 $y(t)\in C^n[a,b]$, 方程 $D_{a+}^{\alpha;\beta}y(t)=h(t)$ 的解是

$$y(t)=I_{a+}^{\alpha}h(t)+\sum_{j=1}^{n}\frac{D^{\theta-j}y(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(t-a)^{\theta-j},\ n=[\theta]+1. \tag{6}$$

特别的,当 $j\geqslant\theta$ 时,有 $D^{\theta-j}y=I_{0+}^{j-\theta}y$.

以下讨论阶数为 $\alpha(1<\alpha<2)$ 和类型为 $\beta(0\leqslant\beta\leqslant1)$ 的 Hilfer 分数阶微分方程. 令 $C_{2-\gamma}[0,1]$ 是定义在区间 $(0,1]$ 上的所有连续函数的一个加权空间

$$C_{2-\gamma}[0,1]=\{y:(0,1]\to\mathbf{R};t^{2-\gamma}y(t)\in C[0,1]\},\ 0\leqslant2-\gamma\leqslant1.$$

定义范数 $\|y\|_{C_{2-\gamma}}=\max\limits_{t\in[0,1]}|t^{2-\gamma}y(t)|$. 令 $E\subset C[0,1]$, $E=C_{2-\gamma}^{\gamma}[0,1]=\{y\in C_{2-\gamma}[0,1]:D_{0+}^{\gamma}y\in C_{2-\gamma}[0,1]\}$. 显然,定义上述的范数后, $C_{2-\gamma}^{\gamma}[0,1]$ 是 Banana 空间.

引理 2 令 $\mu=1-\dfrac{\lambda}{\Gamma(\gamma)}$, $\Lambda=\left(1+\dfrac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma)}\right)\dfrac{d}{\Gamma(\gamma-1)}$, $f\in C_{2-\gamma}[0,1]$. 设 y 是问题(1)—(3) 的解, $y\in E$, $t\in I$, 当且仅当 $y(t)$ 满足以下的积分方程:

$$\begin{aligned} y(t)=&I_{0+}^{\alpha}f(t,y(t))+\frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\int_0^1 f(s,y(s))\mathrm{d}s+\Lambda t^{\gamma-2}+\frac{t^{\gamma-2}}{\Gamma(\gamma-1)}\times \\ &\left[\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma+1)}\int_0^1 f(s,y(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

证明 设 $y(t)$ 是问题(1)—(3) 的解. 在方程(1) 的两端同时作用 I_{0+}^{α} 得

$$I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha,\beta}y(t)=I_{0+}^{\alpha}(I_{0+}^{\beta(2-\alpha)}D^{2}I_{0+}^{(1-\beta)(2-\alpha)})y(t)=I_{0+}^{\alpha+2\beta-\alpha\beta}D_{0+}^{\alpha+2\beta-\alpha\beta}y(t)=I_{0+}^{\alpha}f(t,y(t)).$$

令 $\gamma=\alpha+2\beta-\alpha\beta$. 因为 $1<\alpha<2$, $0\leqslant\beta\leqslant1$, 由此可得 $1<\gamma\leqslant2$. 由引理 1 知,问题(1)—(3) 的基本解可以写成如下形式:

$$y(t)=\frac{D^{\gamma-1}y(0)}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}+\frac{I^{2-\gamma}y(0)}{\Gamma(\gamma-1)}t^{\gamma-2}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s. \tag{8}$$

将边值条件(2) 和(3) 代入式(8),得

$$y(t)=\frac{\int_{0}^{1}f(s,y(s))\mathrm{d}s}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}+\frac{\lambda\int_{0}^{1}y(s)\mathrm{d}s+d}{\Gamma(\gamma-1)}t^{\gamma-2}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s. \tag{9}$$

对方程(9) 的两端进行从 0 到 1 的积分,得

$$\int_{0}^{1}y(s)\mathrm{d}s=\frac{\int_{0}^{1}f(s,y(s))\mathrm{d}s}{\mu\Gamma(\gamma+1)}+\frac{d}{\mu\Gamma(\gamma)}+\frac{1}{\mu\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau. \tag{10}$$

将式(10) 代入式(9) 即可得到方程(7).

本文假设如下条件对问题(1)—(3) 中的 $f(x,y)$ 和 $y(t)$, $t\in I$ 成立:

(H_1) $f: I\times E\to\mathbf{R}$ 是连续的,使得对所有的 $y(t)\in E$, 都有 $f(t,y(t))\in C_{2-\gamma}[0,1]$.

(H_2) 存在一个正数 L_f, 使得 $|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant L_f\|x-y\|_{C_{2-\gamma}}$.

2　主要结果及其证明

本文使用上下解的方法和带有 Lipschitz 条件的 Banach 不动点定理讨论问题(1)—(3) 解的存在性和唯一性.

定理 1　设 $f(t,y(t))$ 连续,条件(H_2) 和方程(1) 都成立,且

$$\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma)}+\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\gamma+1)}+\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\alpha+2)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\right]L_f<1, \tag{11}$$

则问题(1)—(3) 在 E 中有唯一的解.

证明　构造如下算子 $T: E\to E$:

$$Ty(t)=I_{0+}^{\alpha}f(t,y(t))+\frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\int_{0}^{1}f(s,y(s))\mathrm{d}s+\Lambda t^{\gamma-2}+\frac{t^{\gamma-2}}{\Gamma(\gamma-1)}\times$$
$$\left[\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma+1)}\int_{0}^{1}f(s,y(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right].$$

由 Banach 不动点定理可知,仅需证明 T 是压缩映射即可证得 T 在 E 中有 1 个不动点. 实际上,$\forall\, y_1$, $y_1\in E$, 因此有

$$|t^{2-\gamma}Ty_1(t)-t^{2-\gamma}Ty_2(t)|\leqslant$$
$$\frac{t}{\Gamma(\gamma)}\int_{0}^{1}|f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))|\mathrm{d}s+\frac{\lambda\int_{0}^{1}|f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))|\mathrm{d}s}{\mu\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\gamma+1)}+$$
$$\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-1}|f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))|\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+$$
$$\frac{t^{2-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}|f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma)}+\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\gamma+1)}+\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\alpha+2)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\right]L_f\|y_1-y_2\|_{C_{2-\gamma}}.$$

由式(11) 可知,T 是压缩映射. 再根据 Banach 不动点定理知,问题(1)—(3) 有唯一的解 $y(t)\in E$.

下面讨论问题(1)—(3) 解的存在性.

定义 2 $\bar{y},\underline{y}\in E$ 分别为问题(1)—(3)的上解和下解,如果对所有的 $t\in I$ 满足

$$\underline{y}(t)\leqslant I_{0+}^{\alpha}\int_0^1 f(t,y(t))+\frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\int_0^1 f(s,y(s))\mathrm{d}s+\Lambda t^{\gamma-2}+\frac{t^{\gamma-2}}{\Gamma(\gamma-1)}\times$$
$$\left[\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma+1)}\int_0^1 f(s,y(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right],$$
$$\bar{y}(t)\geqslant I_{0+}^{\alpha}f(t,y(t))+\frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\int_0^1 f(s,y(s))\mathrm{d}s+\Lambda t^{\gamma-2}+\frac{t^{\gamma-2}}{\Gamma(\gamma-1)}\times$$
$$\left[\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma+1)}\int_0^1 f(s,y(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right].$$

设集合 $[\underline{y},\bar{y}]=\{y\in E:\underline{y}(t)\leqslant y(t)\leqslant\bar{y}(t),\ t\in I,\ y$ 是问题(1)—(3)的解$\}$.

定理 2 令 $f(s,y(s))\in(I\times E,\mathbf{R})$,且 $f(t,y_1)\leqslant f(t,y_2)$, $y_1\leqslant y_2$. 若 $\bar{y}\leqslant\underline{y}$ 是 E 中的上下解,则 $[\underline{y},\bar{y}]$ 存在最大解 y_{M} 和最小解 y_{L},且对于每一个 $y\in[\underline{y},\bar{y}]$ 都有 $y_{\mathrm{L}}(t)\leqslant y(t)\leqslant y_{\mathrm{M}}(t)$, $t\in I$.

证明 引入如下两组数列 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$:

$$\begin{cases}p_0=\underline{y},\\ Tp_n(t)=I_{0+}^{\alpha}f(t,p_n(t))+\dfrac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\displaystyle\int_0^1 f(s,p_n(s))\mathrm{d}s+\Lambda t^{\gamma-2}+\dfrac{t^{\gamma-2}}{\Gamma(\gamma-1)}\times\\ \qquad\left[\dfrac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma+1)}\displaystyle\int_0^1 f(s,p_n(s))\mathrm{d}s+\dfrac{\lambda}{\mu\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-1}f(s,p_n(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right]=p_{n+1}(t),\end{cases}\tag{12}$$

$$\begin{cases}q_0=\bar{y},\\ Tq_n(t)=I_{0+}^{\alpha}f(t,q_n(t))+\dfrac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\displaystyle\int_0^1 f(s,q_n(s))\mathrm{d}s+\Lambda t^{\gamma-2}+\dfrac{t^{\gamma-2}}{\Gamma(\gamma-1)}\times\\ \qquad\left[\dfrac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma+1)}\displaystyle\int_0^1 f(s,q_n(s))\mathrm{d}s+\dfrac{\lambda}{\mu\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-1}f(s,q_n(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right]=q_{n+1}(t),\end{cases}\tag{13}$$

其中 $n=0,1,2,3,\cdots$. 以下分3个步骤证明定理2.

1) 证明数列 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$ 满足以下关系:

$$\underline{y}(t)=p_0(t)\leqslant p_1(t)\leqslant\cdots\leqslant p_n(t)\leqslant q_n(t)\leqslant\cdots\leqslant q_1(t)\leqslant q_0(t)=\bar{y}(t),\ t\in I.\tag{14}$$

首先证明 $\{p_n\}$ 是不减的数列,即 $\{p_n\}$ 满足 $p_0(t)\leqslant p_{n+1}(t)$, $n=0,1,2,\cdots$. 因为 $\bar{y}$ 和 $\underline{y}$ 分别是上解和下解,因此可得 $\underline{y}(t)=p_0(t)\leqslant\bar{y}(t)=q_0(t)$, $t\in I$,故

$$p_0(t)\leqslant I_{0+}^{\alpha}f(s,p_0(t))\mathrm{d}s+\frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\int_0^1 f(s,p_0(s))\mathrm{d}s+\Lambda t^{\gamma-2}+\frac{t^{\gamma-2}}{\Gamma(\gamma-1)}\times$$
$$\left[\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma+1)}\int_0^1 f(s,p_0(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-1}f(s,p_0(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right]=Tp_0(t)=p_1(t).$$

因此,当 $n=0,1,2,\cdots$ 时有 $p_n(t)\leqslant Tp_n(t)=p_{n+1}(t)$ 和 $\underline{y}(t)=p_0(t)\leqslant p_1(t)\leqslant\cdots\leqslant p_n(t)$. 类似地,可以得到 $q_0(t)\geqslant q_1(t)$,且 $q_n(t)\geqslant Tq_n(t)=q_{n+1}(t)$, $\underline{y}(t)=q_0(t)\geqslant q_1(t)\geqslant\cdots\geqslant q_n(t)$. 因为 f 对于第2变量是单调递增函数,即 $f(s,p_0(s))\leqslant f(s,q_0(s))$, $t\in I$,所以可得 $p_1(t)=Tp_0(t)\leqslant Tq_0(t)=q_1(t)$. 根据数列 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$ 的定义知 $p_n(t)\leqslant q_n(t)$, $n=1,2,3,\cdots$, $t\in I$,进而可知不等式(14)成立.

2) 证明由式(12)、(13)构造的数列在 E 中是紧致的. 由(H_1)知 $f(s,y(s))\in C_{2-\gamma}$ 有界,即存在一个正数 $M>0$,使得 $s\leqslant s^{2-\gamma}f(s,y(s))\leqslant M$. 根据式(12)知, $p_n(t)\in\{p_n(t)\}$, $t\in I$,且 $p_n\in C_{2-\gamma}$,故

$$\|Tp_n(t)\|_{C_{2-\gamma}}=\max_{t\in[0,1]}\{p_{n+1}(t)t^{2-\gamma}\}\leqslant\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}s^{\gamma-2}\mathrm{d}s+\frac{Mt}{\mu\Gamma(\alpha+1)}\int_0^1 s^{\gamma-2}\mathrm{d}s+\Lambda+$$
$$\frac{M}{\Gamma(\gamma-1)}\left[\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma+1)}\int_0^1 s^{\gamma-2}\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha}s^{\gamma-2}\mathrm{d}s\right]\leqslant$$

$$\frac{MB(\gamma-1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}+\frac{Mt}{(\gamma-1)\Gamma(\gamma)}+\Lambda+\frac{M}{\Gamma(\gamma-1)}\left[\frac{\lambda}{\mu(\gamma-1)\Gamma(\gamma+1)}+\frac{\lambda B(\gamma-1,\alpha+1)}{\mu\Gamma(\alpha+1)}\right]\leqslant$$
$$\Lambda+M\left[\frac{B(\gamma-1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{(\gamma-1)\Gamma(\gamma)}+\frac{\lambda}{\mu\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+1)}+\frac{\lambda B(\gamma-1,\alpha+1)}{\mu\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma-1)}\right].$$

由以上知$\{p_n\}$在 E 中一致有界.

假设 $p_n\in E$,则对于任意 $t_1,t_2\in I$,且 $0<t_1<t_2\leqslant 1$.由此有

$$|t_2^{2-\gamma}Tp_n(t_2)-t_1^{2-\gamma}Tp_n(t_1)|\leqslant\left|\frac{t_2-t_1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^1 f(s,p_{n+1}(s))\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\frac{t_2^{2-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,p_{n+1}(s))\mathrm{d}s-\frac{t_1^{2-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,p_{n+1}(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\frac{t_2-t_1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^1 f(s,p_{n+1}(s))s^{2-\gamma}s^{\gamma-2}\mathrm{d}s+\frac{t_2^{2-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}((t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1})f(s,p_{n+1}(s))s^{2-\gamma}s^{\gamma-2}\mathrm{d}s+$$
$$\frac{t_2^{2-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,p_{n+1}(s))s^{2-\gamma}s^{\gamma-2}\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{M(t_2-t_1)}{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\gamma)}+\frac{Mt_2^{2-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}((t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1})s^{\gamma-2}\mathrm{d}s+\frac{Mt_2^{2-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}s^{\gamma-2}\mathrm{d}s.$$

由拉格朗日中值定理可知,存在 $\xi\in(t_1,t_2)$,使得

$$(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}=(\alpha-1)(\xi-s)^{\alpha-2}(t_2-t_1)\leqslant(t_1-s)^{\alpha-2}(t_2-t_1).$$

因此有

$$|t_2^{2-\gamma}Tp_n(t_2)-t_1^{2-\gamma}Tp_{n+1}(t_1)|\leqslant$$
$$\frac{M(t_2-t_1)}{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\gamma)}+\frac{M(t_2-t_1)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-2}s^{\gamma-2}\mathrm{d}s+\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}s^{\gamma-2}\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{M(t_2-t_1)}{(\gamma-1)\Gamma(\gamma)}+\frac{M(t_2-t_1)B(\gamma-1,\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}+\frac{M(t_2-t_1)^{\alpha+\gamma+2}}{(3-\gamma)\Gamma(\alpha)}\leqslant$$
$$\frac{M(t_2-t_1)}{2\Gamma(\gamma)}+\frac{M(t_2-t_1)B(\gamma-1,\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}+\frac{M(t_2-t_1)}{2\Gamma(\alpha)}.$$

显然$|t_2^{2-\gamma}p_{n+1}(t_2)-t_1^{2-\gamma}p_{n+1}(t_1)|\to 0$,$\forall\ |t_2-t_1|\to 0$,故$\{p_n(t)\}$是等度连续的.再由 Arzelà-Ascoli 定理知$\{p_n(t)\}$是紧致的.同理,可证$\{q_n(t)\}$也是紧致的.

3) 证明在$[\underline{y},\bar{y}]$中存在最大解和最小解.因$\{p_n(t)\}$和$\{q_n(t)\}$在E中是单调和紧致的,因此在E中存在 p 和 q,使 $p_n(t)\leqslant p(t)\leqslant q(t)\leqslant q_n(t)$,$t\in I$,$n\in\mathbf{N}$.其中 $p_n(t)$ 和 $q_n(t)$ 分别一致收敛于 p 和 q,故 p 和 q 是问题(1)—(3) 的解,即 $p(t)=Tp(t)$,$q(t)=Tq(t)$.结合式(14) 可得 $\underline{y}(t)\leqslant p(t)\leqslant q(t)\leqslant\bar{y}(t)$,$t\in I$,$n\in\mathbf{N}$,且对于任意的 $y\in[\underline{y},\bar{y}]$ 有 $\underline{y}(t)\leqslant y(t)\leqslant\bar{y}(t)$,$t\in I$.因为 f 对于第 2 变量是单调递增函数,因此有 $\underline{y}(t)\leqslant p_n(t)\leqslant q_n(t)\leqslant\bar{y}(t)$,$t\in I$,$n\in\mathbf{N}$.当 $n\to\infty$ 时,有 $\underline{y}(t)\leqslant p(t)\leqslant q(t)\leqslant\bar{y}(t)$,即表明 $y_{\mathrm{M}}=q$ 和 $y_{\mathrm{L}}=p$ 在$[\underline{y},\bar{y}]$中是最大解和最小解.

定理 3　如果定理 2 的所有假设成立,则非线性的分数阶微分方程(1)—(3) 至少有一个解.

证明　根据定理 2 和假设,可推出$[\underline{y},\bar{y}]\neq\varnothing$,即式(7) 的解的集合在$E$中非空.再由式(7) 的解的集合和引理 2 可得,问题(1)—(3) 在 E 中至少有一个解.

3　例子

例 1　证明问题(15) 的解具有唯一性,其中 $f(t,y(t))=\dfrac{y^2\sin t}{5(1+|y|)}t^{\frac{1}{4}}$.

$$
\begin{cases}
D_{0+}^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}} y(t) = f(t, y(t)),\ t \in I; \\
D_{0+}^{\frac{3}{4}} y(0) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(s, y(s))\,\mathrm{d}s; \\
D_{0+}^{\frac{1}{4}} y(0) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 y(s)\,\mathrm{d}s.
\end{cases}
\tag{15}
$$

证明 易知 $|f(t,x)-f(t,y)| \leqslant L_f \|x-y\|_{C_{2-\gamma}}$，且

$$
L_f = \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{7}{4})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{1}{\mu\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{7}{4})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})}\right] \times \frac{1}{5} \approx 4.87 \times \frac{1}{5} < 1.
$$

再由定理 1 知问题(15) 的解具有唯一性.

参考文献:

[1] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations[M]. San Diego: Academic Press, 1999:117-121.

[2] FURATI K M, KASSIM M D. Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative[J]. Computers and Mathematics at with Applications, 2012,64(6):1616-1626.

[3] ANAJALI J, BAHUGUNA D. Existence and regularity of solutions of fractional differential equations involving Hilfer fractional derivative of order $1 < \alpha < 2$ and type $0 \leqslant \beta \leqslant 1$[OL]. [2019-07-26]. https://arxiv. org/.

[4] HILFER R. Applications of Fractional Calculus in Physics[M]. Singapore: World Scientific, 2000:429-437.

[5] KILBAS A A, SRIVAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and Application of Fractional Differential Equations[M]. New York: North Holland, 2006:69-98.

[6] SHI L F, LI C F. Existence and uniqueness of solutions for Caputo-Hadamard type fractional differential equations [J]. J of Math, 2019,39(4):493-503.

[7] ZHU B, LIU L. Local and global existence of mild solutions for a class of semilinear fractional integro-differential equations[J]. Frat Calc Appl Anal, 2017,20(6):1338-1353.

[8] SHU X B, WANG Q Q. The existence and uniqueness of mild solutions for fractional differential equations with nonlocal conditions of order $1 < \alpha < 2$ [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2012,2012(64):2100-2110.

[9] LIN L G, LIU X P, FANG H Q. Method of upper and lower solutions for fractional differential equations[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2012,2012(100):1-13.

[10] ABBAS S, BENCHOHRA M, ZHOU Y. Couple Hilfer fractional differential systems with random effects[J]. Advances in Difference Equations, 2018,2018:369-380.