文章编号: 1004-4353(2020)01-0037-04

浅阱中双组份玻色-爱因斯坦凝聚体基态的稳定性研究

周小燕, 梁青青, 赵春艳
(兰州文理学院 传媒工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 应用变分法研究了囚禁在有限深势阱中的双组份玻色-爱因斯坦凝聚体基态的稳定性,结果显示:在有限深势阱中有可能获取稳定的双组份凝聚体,但须满足囚禁原子数的临界条件和基态能量塌缩的临界条件.通过变分法计算还得到了波包的宽度、能量与相互作用系数之间的函数关系,并发现凝聚体之间的相互作用对其稳定性具有非常重要的作用.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚体; 双组份; 塌缩; 临界条件; 基态
中图分类号: O469　　**文献标志码**: A

The ground state stability of a two-component Bose-Einstein condensates in a finite deep trap

ZHOU Xiaoyan, LIANG Qingqing, ZHAO Chunyan
(*Lanzhou University of Arts and Science*, *Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: The stability of two-component Bose-Einstein condensates (BECs) in a two-dimensional shallow trap are investigated using the variational method. We find that stable ground state of the two-component BECs can exist in the shallow trap, but must meet the collapse condition of the ground state energy and the atomic number. In addition, the relations among the width, energy and interaction coefficients of the wave packets are obtained by calculation. The results show that the trap depth and the intra-species atoms interaction play an important role on the stability of the ground state.

Keywords: BEC; a two-component; collapse; critical condition; ground state

玻色-爱因斯坦凝聚体(Bose-Einstein condensate,BEC)[1]由美国科学家埃里克·康奈尔等于 1995 年在实验中首次发现.因 BEC 不仅可为研究量子力学的基本问题提供一个宏观系统,而且还可应用于原子激光、精密测量、量子信息和量子计算等领域,因此受到国内外学者的关注,并取得了大量的研究结果[2-9].近年来,学者们对有限深势阱中单组份 BEC 的稳定性进行了大量的研究,结果表明影响 BEC 稳定性的因素有很多,如原子之间的相互作用,囚禁原子数目的多少,凝聚原子与热原子之间的相互作用等[10-11].也有学者对双组份 BECs 的稳定性进行了研究,结果表明双组份凝聚体的稳定性比单组份 BEC 的稳定性更加复杂,其稳定性既与同组份原子内部和不同组份原子之间的相互作用有关,还与囚禁的原子数多少有关[12-14].目前,学者从原子的临界数和基态能量方面对 BEC 的稳定性研究得较少,基于此本文在不考虑相分离和热原子影响的情况下,利用变分法分析有限深势阱中两组份凝聚体的稳定性,得出

收稿日期: 2019-11-09　　**基金项目**: 兰州文理学院校级项目(17XJZZ08)
作者简介: 周小燕(1981—),女,讲师,研究方向为理论物理.

凝聚体塌缩的临界条件,并从有效势和能量的角度分析凝聚体的稳定性.

1 模型方程

首先给出两组份凝聚体的耦合方程:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2+V_1(r)+U_1|\Psi_1|^2+U_{12}|\Psi_2|^2\right]\Psi_1,\\
&\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2+V_2(r)+U_2|\Psi_2|^2+U_{12}|\Psi_2|^2\right]\Psi_2.
\end{aligned}\tag{1}
$$

其中:$m_i(i=1,2)$ 表示第 i 组份的质量,$m_{12}=m_1m_2/(m_1+m_2)$ 表示约化质量;U_1 和 U_2 是常数,$U_1=4\pi\hbar^2a_1/m_1$, $U_2=4\pi\hbar^2a_2/m_2$; $a_i(i=1,2)$ 和 a_{12} 分别代表同组内和组与组之间的原子相互散射长度.波函数的表示形式为 $\Psi_i=\Psi_i(r,t)$, $V_i(i=1,2)$ 为有效势.为计算方便,令 $V_1=V_2=V(i)=\frac{1}{2}m_i^3\omega_{zi}\times Z_i^2\omega^2\rho^2\exp(-C\rho^2)$.为把方程(1)的三维形式化为二维形式,本文选取如下形式的波函数:

$$
\Psi_i(x,y,t)=\psi_i(x,y,t)f_i(z,t),\tag{2}
$$

其中 $f_i(z,t)$ 表示轴向方向的波函数.将轴向波函数 $f_i(z,t)$ 定义为

$$
f_i(z,t)=\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}l_{zi}^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{z^2}{2l_{zi}^2}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega_{zi}}{2}t\right),\tag{3}
$$

其中 l_{zi} 是描述其中任一组份凝聚体轴向长度的物理量.利用式(2)和(3)可得到二维轴向方向的GPEs方程:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2+V_1(r)+g_1|\Psi_1|^2+g_{12}|\Psi_2|^2\right]\Psi_1,\\
&\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2+V_2(r)+g_2|\Psi_2|^2+g_{12}|\Psi_2|^2\right]\Psi_2.
\end{aligned}\tag{4}
$$

其中:$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})$ 是二维拉普拉斯算子;$g_1=\sqrt{8\pi}\hbar^2a_{11}/m_1l_{z1}$ 和 $g_2=\sqrt{8\pi}\hbar^2a_{22}/m_2l_{z2}$ 表示同组份原子内部的相互作用;$g_{12}=\sqrt{4\pi}\hbar^2a_{12}/m_{12}\sqrt{l_{z2}^2+l_{z1}^2}$ 表示不同组份之间的原子相互作用.在计算临界原子数和基态能量的过程中,本文由于采用 ^{87}Rb 原子的两种不同自旋态,因此质量 $m_1=m_2=m=1.45\times10^{-25}$ kg,特征长度 $l_{z1}=l_{z2}=l=2\times10^{-6}$ m.

为计算方便,将方程(4)无量纲化.其中对 ψ,t,r,ρ 和 C 分别采用 $\sqrt{n_0}$, $2/\omega$, l, rl 和 c/l^2 的形式来无量纲化.n_0 表示凝聚体的密度,$n_0=N/l^2$,其中 N 表示整个系统的原子总数($N=N_1+N_2$).对 g_1, g_2, g_{12} 进行无量纲化后,其分别变为 $g_1=4\sqrt{2\pi}Na_{11}/l$, $g_2=4\sqrt{2\pi}Na_{22}/l$, $g_{12}=4\sqrt{2\pi}Na_{12}/l$;对势阱进行无量纲化后其变为

$$
V(r)=r^2\exp(-cr^2).\tag{5}
$$

由此方程(4)变为:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}=[-\nabla^2+V(r)+g_1|\Psi_1|^2+g_{12}|\Psi_2|^2]\Psi_1,\\
&\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}=[-\nabla^2+V_2(r)+g_2|\Psi_2|^2+g_{12}|\Psi_2|^2]\Psi_2.
\end{aligned}\tag{6}
$$

2 有限深势阱中两组份凝聚体的基态

本文使用高斯型试探波函数研究凝聚体在 $V(r)=r^2\exp(-cr^2)$ 中的稳定性.高斯型试探波函数为

$$
\varphi_i=A_i\exp(-r^2/2R_i^2),\tag{7}
$$

其中 A_i 和 R_i 分别是波包的振幅和宽度. 波函数(7) 满足归一化条件

$$\pi A_i^2 R_i^2 = \frac{N_i}{N}. \tag{8}$$

1) 从原子数方面来讨论基态的稳定性. 方程(6) 在柱坐标下的拉格朗日密度为

$$L(\varphi_1,\varphi_2) = \sum_{i=1,2}\left[\mu_i|\varphi_i|^2 - \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\right|^2 - r^2\exp(-cr^2) - \frac{1}{2}g_i|\varphi_i|^4\right] - g_{12}|\varphi_1|^2|\varphi_2|^2. \tag{9}$$

将方程(5) 和(7) 代入方程(9) 中，可得到方程(6) 的有效拉格朗日方程：

$$L_{\mathrm{eff}} = -\pi(A_1^2+A_2^2) + \pi(\mu_1 A_1^2 R_1^2 + \mu_2 A_2^2 R_2^2) - \pi\left[\frac{A_1^2 R_1^2}{cR_1^2+1} + \frac{A_2^2 R_1^2}{cR_2^2+1}\right] - \frac{\pi}{4}(g_1 A_1^4 R_1^2 + g_2 A_2^4 R_2^2) - \pi g_{12} A_1^2 A_2^2 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2+R_2^2}. \tag{10}$$

将方程(5) 变为

$$V(r) = \varepsilon r^2 \exp(-cr^2), \tag{11}$$

并将其代入到方程(10) 进行重复计算. 令 $R_1=R_2=R$，$a_1=a_2=a$，则根据 $\partial L_{\mathrm{eff}}/\partial A_i = \partial L_{\mathrm{eff}}/\partial R_i = 0$ 和方程(8) 可得出 N 与 k，k_1，c，R 之间的关系式为

$$N = \frac{-8\pi[R^6(c\varepsilon+c^3) + R^4(3c^2-\varepsilon) + 3cR^2 + 1]}{(1+cR^2)^3(k_1+k)}, \tag{12}$$

其中 $k_1 = 4\sqrt{2\pi}\,a_{12}/l$ 和 $k = 4\sqrt{2\pi}\,a/l$ 是有效的非线性相互作用系数. 在式(12) 中，当 $\varepsilon=0$ 时临界原子数满足

$$N_{\mathrm{crit}} = \frac{-8\pi}{k+k_1}. \tag{13}$$

由式(13) 可知，只有在满足 $k+k_1<0$ 的条件下，两组份凝聚态才有可能存在稳定态，即满足 $a+a_1<0$ 的条件下存在稳定态. 由以上可知，当给定相互作用系数 k 和 k_1 时，就可以得出一个临界原子数上限；当原子数超过这个临界值时，系统就会塌缩；这表明组与组的相互作用对凝聚体的稳定性具有重要的作用.

2) 从基态能量方面讨论凝聚体的稳定性. 二维凝聚体在有限深势阱中的基态能量为

$$E = 2\pi\int\sum_{i=1,2}\left[\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial r}\right|^2 + r^2 e^{-cr^2}|\psi_i(r_i)|^2 - \frac{g_i}{2}|\psi_i(r)|^4\right] r\,\mathrm{d}r + g_{12}2\pi\int|\psi_1(r)|^2|\psi_2(r)|^2 r\,\mathrm{d}r. \tag{14}$$

将方程(7) 代入方程(14)，得基态的能量为

$$E = \frac{N_1}{NR_1^2} + \frac{N_2}{NR_2^2} + \frac{N_1 R_1^2}{N(1+cR_1^2)^2} + \frac{N_2 R_1^2}{N(1+cR_2^2)^2} + \frac{g_1 N_1^2 + g_2 N_2^2}{4\pi N^2 R_2^2} + \frac{N_1 N_2 g_{12}}{\pi N^2(R_1^2+R_2^2)}. \tag{15}$$

求基态能量的极值后可得基态宽度的方程：

$$\frac{N_i(2R_i - 2cR_i^3)}{N(1+cR_i^2)^3} - \frac{g_i N_i^2 + 4N_i N^2}{2N^2\pi R_i^3} - \frac{2R_i N_1 N_2}{\pi N^2(R_1^2+R_2^2)} = 0. \tag{16}$$

令 $R_1=R_2=R$，$g_1=g_2=g$，$N_1=N_2=N/2$，则方程(15) 和(16) 可分别简化为：

$$E = \frac{R^2}{(1+cR^2)^2} + \frac{g_0+g_{12}+8\pi}{8\pi R^2}, \tag{17}$$

$$-\frac{2}{R_0^3} + \frac{R_0}{(1+cR^2)^2} - \frac{2cR_0^3}{(1+cR_0^2)^3} + \frac{g+g_{12}}{8\pi R_0^3} = 0. \tag{18}$$

从方程(18) 可知，只有当 $g+g_{12}>-8\pi$ 时，方程(17) 才有意义，即当体系满足 $g+g_{12}>-8\pi$ 时才会有稳态出现. 该结论和式(13) 一致.

（下转第 89 页）

用的模型，以提高模型的适用范围.

参考文献：

[1] 林洁.海港悲歌：天津港“8・12”瑞海公司危险品仓库特别重大火灾爆炸事故[J].湖南安全与防灾，2016(3)：42-43.
[2] 刘航，孙霞，王倩倩.基于 Petri 网的门诊流程模型优化分析[J].绥化学院学报，2019，39(9)：148-150.
[3] JAVIER MARTINEZ SILVA，RAUL JAVALES，JOSÉREINALDO SILVA. A new requirements engineering approach for manufacturing based on Petri nets[J]. IFAC-Papers OnLine，2019，52(10)：97-102.
[4] 杨皓然，姚瑶.基于 Petri 网的医疗流程建模优化[J].延边大学学报(自然科学版)，2018，44(4)：332-335.
[5] 赵雨佳.基于 Petri 网的 A 企业采购流程优化研究[J].内燃机与配件，2019(19)：175-176.
[6] 王倩倩，王丽丽.基于 Petri 网行为轮廓的网上购物流程挖掘方法[J].延边大学学报(自然科学版)，2019，45(1)：75-79.
[7] 贾晔清.基于系统建模仿真的危险品仓储安全风险规避策略研究[C]//第三届(2008)中国管理学年会：信息管理分会场论文集.北京：中国管理现代化研究会，2008：1291-1298.
[8] 李玉民，宋巍.基于 Petri 网的化学危险品出入库流程的建模与仿真[J].物流技术，2012，31(15)：262-264.
[9] SMIRNOV S，WEIDLICH M，MENDLING J. Business process model abstraction based on behavioral profiles [C]//International Conference on Service-Oriented Computing. Berlin，Heidelbeg：Springer，2010：1-16.
[10] 吴哲辉.Petri 网导论[M].北京：机械工业出版社，2006：1-28.
[11] 王德学.危险化学品安全管理条例释义[M].北京：化学工业出版社，2002：1-35.

(上接第 39 页)

参考文献：

[1] ANDERSON M H，ENSHER J R，MATTHEWS M R. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor[J]. Science，1995，269：198-201.
[2] HALL D S，MATTHEW M R，ENSHER J R，et al. Dynamics of component separation in a binary mixture of Bose-Einstein condensates[J]. Phys Rev Lett，1998，81(8)：1539-1542.
[3] KLAUS M. Bose condensate and Fermi gases at zero temperature[J]. Phys Rev Lett，1998，80(9)：1804-1807.
[4] SCOTT GRAEME. Efficient generation of nearly diffraction free-beams using an axicon[J]. Opt Eng，1992，31(12)：2640-2643.
[5] ARIT J，DHOLAKIA K. Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon[J]. Opt Commun，2000，177(1/6)：297-301.
[6] MATTHEWS M R，ANDERSON B P，HALJAN P C，et al. Vortices in a Bose-Einstein condensate[J]. Phys Rev Lett，1999，83(3)：2498-2501.
[7] MODUGNO M，DALFOVO F，FORT C，et al. Dynamics of two colliding Bose-Einstein condensate in a elongated magnetostatic trap[J]. Phys Rev A，2000，62(6)：063607(1-7).
[8] PU H，BIGELOW N P. Collectations excitation and nonlinear response of a trapped two-species Bose-Einstein condensate[J]. Phys Rev Lett，1998，80(6)：1134-1137.
[9] HALL D S，MATTHEWS M R，ENSHER J R，et al. Dynamics of component separation in a binary mixture of Bose-Einstein condensate[J]. Phys Rev Lett，1998，81(20)：4531-4534.
[10] KRAMER M，PITAEVSKII L，STRINGARI S. Macroscopic dynamics of a trapped Bose-Einstein condensate in the presence of 1D and 2D optical lattices[J]. Phys Rev Lett，2002，88(18)：180404(1-4).
[11] ZHOU X Y，MU A X，XUE J K. The stability of Bose-Einstein condensate in the shallow trap[J]. Chin Phys，2007，16(11)：3197-3200.
[12] SABARI S，RAJA R V J，PROSEZIAN K，et al. Stability of trapless Bose-Einstein condensates with two-and-three-body interactions[J]. J Phys B：At Mol Opt Phys，2010，43(12)：125302.
[13] ZHOU J W，LI X X，GAO R. Modulational instability of trapped two-component Bose-Einstein condensates[J]. Chin Phys Lett，2019，36(9)：090302.
[14] 陈海军，李高清，薛具奎.变分法研究一维 Bose-Fermi 系统的稳定性[J].物理学报，2011，60(4)：41-45.