

文章编号: 1004-4353(2020)01-0028-04

一类具有恐惧效应的食饵-捕食者系统的研究

石志高

(福建江夏学院 数理教研部, 福建 福州 350108)

摘要: 研究一类具有恐惧效应的食饵-捕食者系统. 首先通过分析系统的平衡点性态, 得出了系统存在正平衡点的条件; 其次利用 Dulac 判别法得出了系统在正平衡点附近不存在极限环的结论; 最后利用数据仿真验证了所得结论的正确性.

关键词: 恐惧效应; 食饵-捕食者系统; 极限环; 数据仿真

中图分类号: O175.12

文献标志码: A

Research of a kind of predator-prey system with fear effect

SHI Zhigao

(Teaching and Research Department of Mathematics and Physics,
Fujian Jiangxia University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: A kind of predator-prey system with fear effect is considered. Firstly, the equilibrium state of the system is analyzed, and the condition for the existence of positive equilibrium point is obtained. Secondly, the conclusion that there is no limit cycle near the positive equilibrium point is obtained by using Dulac discriminant method. Finally, the conclusion is verified by data simulation.

Keywords: fear effect; predator-prey system; limit cycle; data simulation

0 引言

近年来, 学者们对 Holling 功能反应模型和 Beddington-DeAngelis 功能反应函数的食饵-捕食者系统进行了广泛研究, 并取得了较好的结果^[1-3]; 但是, 目前对具有恐惧效应的食饵-捕食者系统的研究较少. 研究^[4]表明, 食饵由于担心被捕食而产生的恐惧效应会降低食饵的繁殖能力, 从而影响食饵种群的数量. 一般情况下用 $f(m, y) = \frac{1}{1 + my}$ 来刻画恐惧对捕食率造成的影响, 其中 m ($m \geq 0$) 表示食饵种群受到恐惧的程度, y 表示捕食者种群数量. 通常捕食率会随所受恐惧效应的增大而降低, 即 $\frac{\partial f(m, y)}{\partial m} < 0$; 且捕食率还会随捕食者种群数量的增大而降低, 即 $\frac{\partial f(m, y)}{\partial y} < 0$. 当不存在恐惧效应时, 捕食率不受恐惧效应的影响, 即 $f(0, y) = 1$; 当捕食者种群灭绝时, 恐惧效应对捕食率也不存在影响, 即 $f(m, 0) = 1$; 当所受恐惧效应无限大时, 捕食率为 0, 即 $\lim_{m \rightarrow \infty} f(m, y) = 0$; 当捕食者种群数量无限大时, 恐惧效应对捕食率的影响可以忽略不计, 即 $\lim_{y \rightarrow \infty} f(m, y) = 0$. 2017 年, 夏增琼等^[5]研究了恐惧效应 $f(m) = \frac{1}{1 + m}$ 为常数函数的如下系统:

收稿日期: 2020-01-12

基金项目: 福建省中青年教育科研项目(JT180586)

作者简介: 石志高(1983-), 男, 讲师, 研究方向为微分方程定性理论.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K}) - \frac{pxy}{1+m}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{cpxy}{1+m} - dy, \\ \frac{dm}{dt} = ay - bm, \end{cases} \quad (1)$$

并证明了该系统的正平衡点具有全局稳定性. 受文献[5]启发, 本文考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx) - \frac{kxy}{1+my}, \\ \dot{y} = \frac{kxy}{1+my} - dy. \end{cases} \quad (2)$$

其中: a, b, k, d, m 均为正常数, $\frac{1}{1+my}$ 表示恐惧对捕食率造成的影响. 根据系统的生态意义, 本文仅在区域 $\bar{G} = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ 内对系统(2)进行讨论.

1 平衡点分析

对系统(2)作时间变换 $d\tau = \frac{1}{1+my} dt$, 仍用 t 表示 τ , 则系统(2)化为

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx)(1 + my) - kxy, \\ \dot{y} = -d(1 + my)y + kxy. \end{cases} \quad (3)$$

记 $x_0 = \frac{(ma - k) + \sqrt{(ma - k)^2 + 4mbd}}{2mb}$, $y_0 = \frac{x_0(a - bx_0)}{d}$, $x_1 = \frac{a}{b}$.

引理 1 ① 当 $\frac{a}{b} \leq \frac{d}{k}$ 时, 系统(3)有平衡点 $O(0, 0)$ 和 $A(x_1, 0)$. ② 当 $\frac{a}{b} > \frac{d}{k}$ 时, 系统(3)有平衡点 $O(0, 0)$, $A(x_1, 0)$ 和唯一正平衡点 $B(x_0, y_0)$.

证明 由 $\begin{cases} x(a - bx)(1 + my) - kxy = 0 \\ -d(1 + my)y + kxy = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x(a - bx) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x(a - bx)(1 + my) - kxy = 0 \\ -d(1 + my) + kx = 0 \end{cases}$.

解方程 $\begin{cases} x(a - bx) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{a}{b} \\ y = 0 \end{cases}$, 得系统(3)有平衡点 $O(0, 0)$ 和 $A(x_1, 0)$. 解方程

$$\begin{cases} (a - bx)(1 + my) - ky = 0 \\ -d(1 + my) + kx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx = d(1 + my) \\ ky = (a - bx)(1 + my) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{(ma - k) + \sqrt{(ma - k)^2 + 4mbd}}{2mb} \equiv x_0 \\ y = \frac{x_0(a - bx_0)}{d} \end{cases}$$

得: 仅当 $a > bx_0$ 时, 即 $\frac{a}{b} > \frac{d}{k}$ 时, 系统(3)存在唯一正平衡点 $B(x_0, y_0)$.

引理 2 ① 平衡点 $O(0, 0)$ 总是鞍点. ② 当 $\frac{a}{b} < \frac{d}{k}$ 时, $A(x_1, 0)$ 是稳定的焦点或结点. ③ 当 $\frac{a}{b} = \frac{d}{k}$ 时, $A(x_1, 0)$ 与 $B(x_0, y_0)$ 重合成高次奇点, 且为鞍结点. ④ 当 $\frac{a}{b} > \frac{d}{k}$ 时, $A(x_1, 0)$ 是鞍点, $B(x_0, y_0)$ 是稳定的焦点或结点.

证明 系统(3)的线性化系统的雅可比矩阵为

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} (a - 2bx)(1 + my) - ky & mx(a - bx) - kx \\ ky & -d(1 + my) - dmy + kx \end{bmatrix},$$

$$\det J(0, 0) = -ad, \det J(x_1, 0) = ak(\frac{d}{k} - \frac{a}{b}), \operatorname{tr} J(x_1, 0) = -a - k(\frac{d}{k} - \frac{a}{b}),$$

$$\det \mathbf{J}(x_0, y_0) = mbdx_0y_0(1 + my_0) + kdy_0, \operatorname{tr} \mathbf{J}(x_0, y_0) = -bx_0(1 + my_0) - dmy_0.$$

由以上矩阵有:

1) $\det \mathbf{J}(0, 0) = -ad < 0$, 故平衡点 $O(0, 0)$ 总是鞍点.

2) 当 $\frac{a}{b} < \frac{d}{k}$ 时, $\det \mathbf{J}(x_1, 0) = ak(\frac{d}{k} - \frac{a}{b}) > 0$, $\operatorname{tr} \mathbf{J}(x_1, 0) = -a - k(\frac{d}{k} - \frac{a}{b}) < 0$, 所以 $A(x_1, 0)$ 是稳定的焦点或结点.

3) 当 $\frac{a}{b} = \frac{d}{k}$ 时, $\det \mathbf{J}(x_1, 0) = ak(\frac{d}{k} - \frac{a}{b}) = 0$, 平衡点 $A(x_1, 0)$ 与 $B(x_0, y_0)$ 重合成高次奇点. 作变换 $\bar{x} = x - \frac{a}{b}$, $\bar{y} = y$, 仍以 x, y 分别代替 \bar{x}, \bar{y} , 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax - dy - (ma + k)xy - mbx^2y, \\ \frac{dy}{dt} = kxy - dmy^2 \equiv \phi(x, y). \end{cases} \quad (4)$$

令 $x = u(y) = k_1y + k_2y^2 + k_3y^3 + \dots$, 并将其代入到 $-ax - dy - (ma + k)xy - mbx^2y$ 得 $-a(k_1y + k_2y^2 + k_3y^3 + \dots) - dy - (ma + k)(k_1y + k_2y^2 + k_3y^3 + \dots)y - mb(k_1y + k_2y^2 + k_3y^3 + \dots)^2y = 0$.

比较上式中的系数得 $a_1 = -\frac{d}{a}$, 故 $u(y) = -\frac{d}{a}y + \dots$, $\phi(u(y), y) = -\frac{(k+a)d}{a}y^2 + \dots$, 即 $m=2$, $g = -\frac{(k+a)d}{a} \neq 0$. 由文献[6]可知 $B(x_0, y_0)$ 为鞍结点.

4) 当 $\frac{a}{b} > \frac{d}{k}$ 时, $\det \mathbf{J}(x_1, 0) = ak(\frac{d}{k} - \frac{a}{b}) < 0$, 故 $A(x_1, 0)$ 是鞍点; 而 $\det \mathbf{J}(x_0, y_0) = mbdx_0y_0 \times (1 + my_0) + kdy_0 > 0$, $\operatorname{tr} \mathbf{J}(x_0, y_0) = -bx_0(1 + my_0) - dmy_0 < 0$, 故 $B(x_0, y_0)$ 是稳定的焦点或结点.

2 极限环的不存在性

定理 2 系统(3)在整个平面内不存在极限环.

证明 令 $p = -\frac{md+k}{k}$, $q = -\frac{ma+k}{k}$, 取 Dulac 函数 $B(x, y) = x^p y^q$, 则 $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = [a(p+1) - d(q+1)]x^p y^q + [(ma-k)(p+1) - dm(q+2)]x^p y^{q+1} - mb(p+2)x^{p+1} y^{q+1}$. 由 $p = -\frac{md+k}{k}$, $q = -\frac{ma+k}{k}$, 知 $a(p+1) - d(q+1) = 0$, $(ma-k)(p+1) - dm(q+2) = 0$, 故 $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = -mb(p+2)x^{p+1} y^{q+1}$ 定号. 由 Dulac 定理可知, 系统(3)在整个平面内不存在极限环.

3 数据仿真

本文对系统(3)的正常数 a, b, k, d, m , 分别取 $a=1, b=3, m=2, d=2, k=4$ 和 $a=3, b=1, m=1, d=2, k=2$ 两组数, 由此得到例 1 和例 2 两个系统. 以下通过给出例 1 和例 2 的轨线图验证系统(3)在 $\frac{a}{b} < \frac{d}{k}$ (不存在正平衡点) 和 $\frac{a}{b} > \frac{d}{k}$ (存在正平衡点) 两种情形下其边界平衡点 $A(\frac{1}{3}, 0)$ 和正平衡点 $B(2, 1)$ 渐近稳定.

例 1 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-3x)(1+2y) - 4xy, \\ \dot{y} = -2(1+2y)y + 4xy. \end{cases} \quad (5)$$

因系统(5)中 $a=1, b=3, m=2, d=2, k=4$, 所以满足条件 $\frac{a}{b} < \frac{d}{k}$. 由引理 2 可知, 系统(5)存在边

界平衡点 $A(\frac{1}{3}, 0)$, 且为稳定的焦点或结点. 对系统(5) 作轨线图和相图(初值取 $x(0) = 1, y(0) = 1$),

结果如图 1 所示. 由图 1 可以看出, 边界平衡点 $A(\frac{1}{3}, 0)$ 是渐近稳定的.

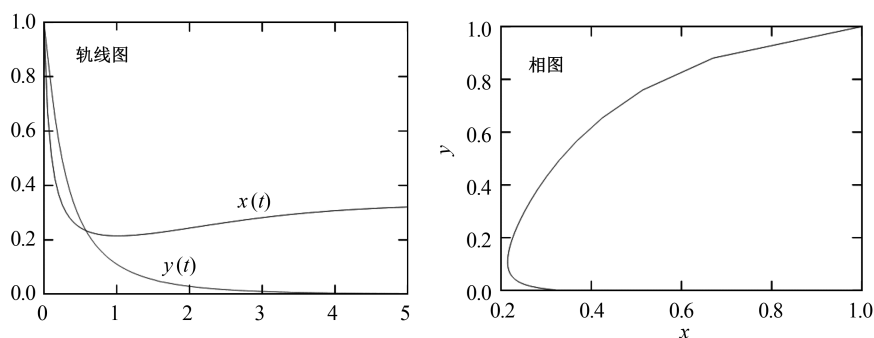


图 1 系统(5) 的数据仿真图

例 2 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3-x)(1+y) - 2xy, \\ \dot{y} = -(1+y)y + 2xy. \end{cases} \quad (6)$$

因系统(6) 中 $a=3, b=1, m=1, d=2, k=2$, 所以满足条件 $\frac{a}{b} > \frac{d}{k}$. 由引理 2 可知, 系统(6) 存在正平衡点 $B(2, 1)$, 且为稳定的焦点或结点. 对系统(6) 作轨线图和相图(初值取 $x(0) = 1.8, y(0) = 1.2$), 结果如图 2 所示. 由图 2 可以看出, 图中正平衡点的外围不存在极限环.

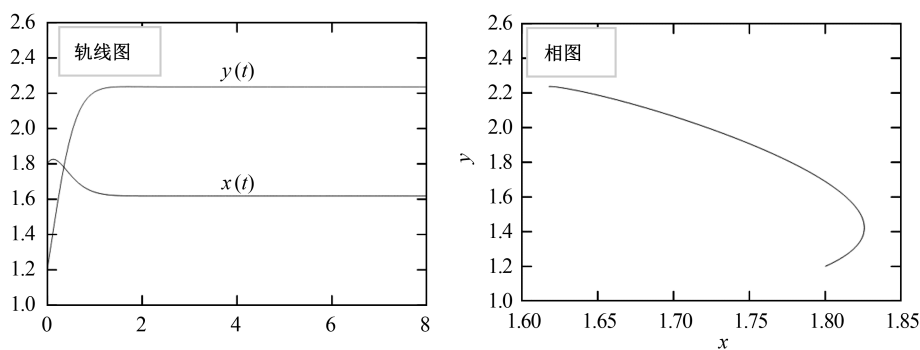


图 2 系统(6) 的数据仿真图

参考文献:

- [1] 张敬, 芦雪娟, 何延治. 一类具有 Holling-IV 型功能性反应捕食模型的定性分析[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2013, 39(2): 93-96.
- [2] 石志高. 两种群具有线性控制项的 Holling-IV 类食饵-捕食系统的鞍结分岔下的轨线结构[J]. 闽江学院学报, 2016, 37(2): 12-18.
- [3] LEE J, BAEK H. Dynamics of a Beddington-DeAngelis-type predator-prey system with constant rate harvesting [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2017(1): 1-20.
- [4] 伏升茂, 苏发儒. 带恐惧因子和强 Allee 效应的捕食者-食饵扩散模型的 Hopf 分支[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2019, 55(3): 14-20.
- [5] 夏增琼, 李桂花. 具有恐惧的捕食与被捕食系统的动力学分析[J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(20): 277-282.
- [6] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.