文章编号：1004-4353(2020)01-0024-04

一类非线性薛定谔方程解的衰减估计

韩琦悦， 李春花*
(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要：研究了一类具有次临界非线性项的薛定谔方程的大初值问题.在强耗散条件下，分析了非线性薛定谔方程 $\mathrm{i}\partial_t v+\frac{1}{2}\partial_x^2 v=\lambda|v|^{p-1}v+\mathrm{i}\frac{a}{(1+t)(p-1)}v$ 整体解的 L^2 衰减估计，所得结果完善了文献[4]的结论.

关键词：非线性薛定谔方程；次临界非线性项；强耗散条件；衰减估计
中图分类号：O175.29　　**文献标志码**：A

Decay estimates of solutions to a class of nonlinear Schrödinger equations

HAN Qiyue， LI Chunhua*
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We consider the large initial problem for a class of nonlinear Schrödinger equations with subcritical nonlinearities. Under a strong dissipative condition, L^2 decay estimates of global solutions to the nonlinear Schrödinger equation $\mathrm{i}\partial_t v+\frac{1}{2}\partial_x^2 v=\lambda|v|^{p-1}v+\mathrm{i}\frac{a}{(1+t)(p-1)}v$ are shown. The research result supplement the results of the literature [4].

Keywords: nonlinear Schrödinger equation; subcritical nonlinearity; strong dissipative condition; decay estimate

0　引言

非线性薛定谔方程

$$\begin{cases}\mathrm{i}\partial_t v+\frac{1}{2}\partial_x^2 v=\lambda|v|^{p-1}v+\mathrm{i}\mu(t)v,\\ v(0,x)=v_0(x)\end{cases}$$

在光学领域中具有重要应用[1].方程中 v 是一个未知的复值函数，$v=v(t,x)$，$t\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$；$p>1$；$\mu(t)$ 是一个实值函数；$\lambda\in\mathbf{C}$.若 $\lambda=-1$，$\mu(t)=a\leqslant 0$，则有

$$\begin{cases}\mathrm{i}\partial_t v+\frac{1}{2}\partial_x^2 v=-|v|^{p-1}v+\mathrm{i}av,\\ v(0,x)=v_0(x).\end{cases}\tag{1}$$

式中 $t\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，$p>1$. 2009 年，M. Ohta 等[2]研究了方程(1)的大初值整体解的存在性和不存在性. 2016 年，Jin 等[3]研究了方程

收稿日期：2020-02-16　　**基金项目**：吉林省教育厅项目(JJKH20180892KJ)
* **通信作者**：李春花(1977—)，女，副教授，研究方向为偏微分方程.

$$\begin{cases}\mathrm{i}\partial_t v+\dfrac{1}{2}\partial_x^2 v=\lambda|v|^{p-1}v,\\ v(0,x)=v_0(x)\end{cases}$$

的大初值问题.方程中 $t\geqslant 0$；$x\in\mathbf{R}$；$1<p<3$；$\Im\lambda$ 和 $\Re\lambda$ 分别是 λ 的虚部和实部，$\Im\lambda<0$ 且 $|\Im\lambda|>\dfrac{p-1}{2\sqrt{p}}|\Re\lambda|$.作者证明了上述方程大初值整体解的存在性，并给出了解的衰减估计.2019 年，Yuan 等[4]研究了方程

$$\begin{cases}\mathrm{i}\partial_t v+\dfrac{1}{2}\partial_x^2 v=\lambda|v|^{p-1}v+\mathrm{i}\dfrac{a}{(1+t)(p-1)}v,\\ v(0,x)=v_0(x)\end{cases}\tag{2}$$

的大初值问题.方程中 $t\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，$1<p<3$，$\Im\lambda<0$ 且 $|\Im\lambda|>\dfrac{p-1}{2\sqrt{p}}|\Re\lambda|$，$a\leqslant 0$.作者分析了方程(2)整体解的存在性和衰减估计.本文在文献[4]的研究基础上，对方程(2)的大初值问题做进一步研究，以拓展文献[4]的结论.

1　预备知识

定义 1　设 m,s 为非负实数，定义 Sobolev 空间为

$$H^{m,s}(\mathbf{R})=\{f\in L^2(\mathbf{R});\|f\|_{H^{m,s}(\mathbf{R})}=\|(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}(1-\partial_x^2)^{\frac{m}{2}}f\|_{L^2(\mathbf{R})}<\infty\}.$$

为了表述方便，本文简记 $H^{m,0}(\mathbf{R})=H^m(\mathbf{R})$.

定义 2　若函数 $f(x)\in L^1(\mathbf{R})$，定义其傅里叶变换为 $(\mathscr{F}f)(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}f(x)\mathrm{d}x$.

引理 1[4]　定义函数空间 $X_{1,\infty}=\{y;U(-t)y\in C([0,\infty);H^1(\mathbf{R})\cap H^{0,1}(\mathbf{R}))$，$\|y\|_{X_{1,\infty}}=\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}\|U(-t)y\|_{H^1(\mathbf{R})\cap H^{0,1}(\mathbf{R})}<\infty\}$，其中 $U(t)\phi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}\Delta}\phi$.设 $u\in X_{1,\infty}$ 是方程

$$\begin{cases}\mathrm{i}\partial_t u+\dfrac{1}{2}\partial_x^2 u=\lambda(1+t)^a|u|^{p-1}u,\\ u(0,x)=u_0(x)\end{cases}\tag{3}$$

的整体解，其中 $t\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，$p>1$，$\Im\lambda<0$ 且 $|\Im\lambda|>\dfrac{p-1}{2\sqrt{p}}|\Re\lambda|$，$a\leqslant 0$.令

$$\begin{aligned}R(t)=&(1+t)^a t^{-\frac{p-1}{2}}(|\mathscr{F}MU(-t)u|^{p-1}\mathscr{F}MU(-t)u-|\mathscr{F}U(-t)u|^{p-1}\mathscr{F}U(-t)u)+\\&(1+t)^a t^{-\frac{p-1}{2}}\mathscr{F}(M^{-1}-1)\mathscr{F}^{-1}|\mathscr{F}MU(-t)u|^{p-1}\mathscr{F}MU(-t)u,\end{aligned}$$

则有 $\|R(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant Ct^{-\frac{p}{2}+a}\|\mathscr{F}U(-t)u\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(p-1)/2}\|Ju\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(p+1)/2}$，其中 $J(t)=U(t)xU(-t)$，$M=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2t}x^2}$，$t\geqslant 1$.

引理 2[4]　设 $u\in X_{1,\infty}$ 是方程(3)的整体解，则有：

$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\|u_0(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$，$t\geqslant 0$；

$\|\partial_x u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\|\partial_x u_0(x)\|_{L^2(\mathbf{R})}$，$t\geqslant 0$；

$\|Ju(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\|xu_0(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$，$t\geqslant 0$.

2　主要结果及其证明

定理 1　设 $-1<a\leqslant-\dfrac{1}{2}$，$p(a)<p<2a+3$，其中 $p(a)$ 为方程 $6p^3-(11+12a)p^2+(4a-6)p+3=0$ 的唯一实根，并且方程(2)满足强耗散条件 $\Im\lambda<0$ 和 $|\Im\lambda|>\dfrac{p-1}{2\sqrt{p}}|\Re\lambda|$，其中 $t\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$.若 $v_0(x)\in H^1(\mathbf{R})\cap H^{0,1}(\mathbf{R})$，则方程(2)存在唯一整体解 $v(t,x)\in X_{1,\infty}$ 且满足以下衰减估计：

$\|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant Ct^{\frac{a+p-3}{3p-3}}$, $t \geqslant 1$.

证明 在定理1条件下,由文献[4]知方程(2)存在唯一整体解 $v(t,x) \in X_{1,\infty}$.下面应用文献[3]的方法证明方程(2)整体解的衰减估计.

对方程(2)做变换 $v(t,x)=(1+t)^{\frac{a}{p-1}}u(t,x)$,则有

$$\mathrm{i}\partial_t u+\frac{1}{2}\partial_x^2 u=\lambda(1+t)^a|u|^{p-1}u, \tag{4}$$

其中 $u(0,x)=v_0(x)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbf{R}$, $\Im\lambda<0$ 和 $|\Im\lambda|>\dfrac{p-1}{2\sqrt{p}}|\Re\lambda|$.

在方程(4)两边同时作用 $\mathscr{F}U(-t)$,则有

$$\mathscr{F}U(-t)(\lambda(1+t)^a|u|^{p-1}u)=\lambda(1+t)^a t^{-\frac{p-1}{2}}|\mathscr{F}U(-t)|^{p-1}\mathscr{F}U(-t)u+\lambda R(t),$$

其中

$$R(t)=(1+t)^a t^{-\frac{p-1}{2}}(|\mathscr{F}MU(-t)u|^{p-1}\mathscr{F}MU(-t)u-|\mathscr{F}U(-t)u|^{p-1}\mathscr{F}U(-t)u)+$$
$$(1+t)^a t^{-\frac{p-1}{2}}\mathscr{F}(M^{-1}-1)\mathscr{F}^{-1}|\mathscr{F}MU(-t)u|^{p-1}\mathscr{F}MU(-t)u.$$

令 $\Phi(t)=\mathscr{F}U(-t)u$,则有 $\partial_t\Phi(t)=-\mathrm{i}\lambda(1+t)^a t^{-\frac{p-1}{2}}|\Phi(t)|^{p-1}\Phi(t)-\mathrm{i}\lambda R(t)$.由

$$\int_{\mathbf{R}}\partial_t|\Phi(t)|^2\mathrm{d}x=2\Im\lambda(1+t)^a t^{-\frac{p-1}{2}}\int_{\mathbf{R}}|\Phi(t)|^{p+1}\mathrm{d}x+2\int_{\mathbf{R}}\Im(\lambda R(t)\overline{\Phi(t)})\mathrm{d}x$$

得 $\partial_t\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \leqslant 2^a\Im\lambda t^{-\frac{p-1}{2}+a}\|\Phi(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}+C\|R(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$, $t \geqslant 1$.应用引理1和引理2得

$$\partial_t\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \leqslant 2^a\Im\lambda t^{-\frac{p-1}{2}+a}\|\Phi(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}+Ct^{-\frac{p}{2}+a}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(p+1)/2},\ t \geqslant 1. \tag{5}$$

由 L^2 的内插不等式 $\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant \|\Phi(t)\|_{L^1(\mathbf{R})}^{(p-1)/2p}\|\Phi(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R})}^{(p+1)/2p}$, $p>1$ 及 $\|\Phi(t)\|_{L^1(\mathbf{R})} \leqslant C\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2}\|\xi\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2}$,有 $\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(3p+1)/2} \leqslant C\|\Phi(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R})}^{p+1}\|\xi\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(p-1)/2}$, $p>1$.由引理2得

$$\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(3p+1)/2} \leqslant C\|\Phi(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R})}^{p+1},\ p>1. \tag{6}$$

将式(6)代入式(5),得

$$\partial_t\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant -\delta t^{-\frac{p-1}{2}+a}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(3p-1)/2}+Ct^{-\frac{p}{2}+a}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(p-1)/2}, \tag{7}$$

其中 $\delta>0$, $t \geqslant 1$.令 $\theta=\dfrac{p-1}{3p-1}$, $m=t^{-\frac{(p-1)^2}{2(3p-1)}+a\frac{p-1}{3p-1}}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(p-1)/2}$, $n=t^{\frac{-2p^2-p+4ap+1}{2(3p-1)}}$.由 Young 不等式 $mn \leqslant \varepsilon\theta m^{1/\theta}+\varepsilon^{-\frac{\theta}{1-\theta}}(1-\theta)n^{1/(1-\theta)}$,其中 $0<\theta<1$, $m,n,\varepsilon>0$,得

$$t^{-\frac{p}{2}+a}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(p-1)/2} \leqslant \varepsilon\frac{p-1}{3p-1}t^{-\frac{p-1}{2}+a}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(3p-1)/2}+C_{\varepsilon,p}t^{\frac{-2p^2-p+4ap+1}{4p}},\ t \geqslant 1.$$

将上式代入式(7),则存在 $\eta>0$ 使得

$$\partial_t\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant \eta t^{-\frac{p-1}{2}+a}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(3p-1)/2}+Ct^{\frac{-2p^2-p+4ap+1}{2(3p-1)}},\ t \geqslant 1. \tag{8}$$

下面估计 $\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$.设 $\beta>0$,由不等式(8)得

$$\partial_t(t^\beta\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})})=\beta t^{\beta-1}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}+t^\beta\partial_t\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant$$
$$\beta t^{\beta-1}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}-\eta t^{\beta-\frac{p-1}{2}+a}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(3p-1)/2}+Ct^{\frac{-2p^2-p+4ap+1}{4p}+\beta},\ t \geqslant 1. \tag{9}$$

令 $h=\dfrac{2}{3p-1}$, $e=t^{\frac{2\beta-p+1+2a}{3p-1}}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$, $g=t^{\frac{3\beta p-3\beta-2p-2a}{3p-1}}$.由 Young 不等式 $eg \leqslant \gamma he^{1/h}+\gamma^{-\frac{h}{1-h}}(1-h)g^{1/(1-h)}$,其中 $0<h<1$, $e,g,\gamma>0$,得

$$t^{\beta-1}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant \frac{2\gamma}{3p-1}t^{\beta-\frac{p-1}{2}+a}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(3p-1)/2}+C_{\gamma,p}t^{\frac{3\beta p-3\beta-2p-2a}{3p-3}},\ t \geqslant 1.$$

将上式代入式(9)得

$$\partial_t(t^\beta\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})})\leqslant\frac{2\beta\gamma}{3p-1}t^{\beta-\frac{p-1}{2}+a}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(3p-1)/2}-\eta t^{\beta-\frac{p-1}{2}+a}\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{(3p-1)/2}+$$

$$\beta C_{\gamma,p}t^{\frac{3\beta p-3\beta-2p-2a}{3p-3}}+Ct^{\frac{-2p^2-p+4ap+1}{4p}+\beta},\ t\geqslant 1.$$

取 $\beta\gamma<\eta$，则由上式得 $\partial_t(t^\beta\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})})\leqslant Ct^{-\frac{2p+2a}{3p-3}}+Ct^{\frac{-2p^2-p+4ap+1}{4p}+\beta}$，$t\geqslant 1$. 将上式两端在 $[1,t]$ 积分，再取 β 充分大得

$$\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant Ct^{-\frac{2p+2a}{3p-3}+1}+Ct^{\frac{-2p^2-p+4ap+1}{4p}+1},\ t\geqslant 1. \tag{10}$$

为了得到估计式 $\|\Phi(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant Ct^{-\frac{2p+2a}{3p-3}+1}$，$t\geqslant 1$，由式(10)联立不等式

$$\begin{cases}p>1,\\ a\leqslant 0,\\ -\dfrac{2p+2a}{3p-3}+1<0,\\ \dfrac{-2p^2-p+4ap+1}{4p}+1<0,\\ -\dfrac{2p+2a}{3p-3}+1\geqslant\dfrac{-2p^2-p+4ap+1}{4p}+1\end{cases}$$

解得 $-1<a\leqslant-\frac{1}{2}$，$p(a)<p<2a+3$，其中 $p(a)$ 为方程 $6p^3-(11+12a)p^2+(4a-6)p+3=0$ 的唯一实根，此时 $\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant Ct^{-\frac{2p+2a}{3p-3}+1}$，$t\geqslant 1$. 再结合 $v(t,x)=(1+t)^{\frac{a}{p-1}}u(t,x)$ 得 $\|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant Ct^{\frac{a+p-3}{3p-3}}$，$t\geqslant 1$. 定理得证.

注 1　由 $v(t,x)=(1+t)^{\frac{a}{p-1}}u(t,x)$ 和文献[4]中的结论（$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\|u_0(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$，$t\geqslant 0$）得方程(2)的整体解满足 $\|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant Ct^{\frac{a}{p-1}}\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant Ct^{\frac{a}{p-1}}$，$t\geqslant 1$. 定理 1 给出了方程(2)的整体解衰减估计 $\|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant Ct^{\frac{a+p-3}{3p-3}}$，$t\geqslant 1$. 由定理 1 的条件可得 $\frac{a+p-3}{3p-3}<\frac{a}{p-1}<0$. 由此可知定理 1 完善了文献[4]的结论.

注 2　设 $p_*(a):=a+\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{16a^2+40a+33}$. 当 $p_*(a)<p<2a+3$，$-1<a\leqslant 0$，$\Im\lambda<0$，$|\Im\lambda|>\frac{p-1}{2\sqrt{p}}|\Re\lambda|$ 且 $v_0(x)\in H^{0,1}(\mathbf{R})\cap H^1(\mathbf{R})$ 时，文献[4]给出了解的 L^∞ 衰减估计为 $\|v(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\leqslant Ct^{-\frac{1}{p-1}}$，$t\geqslant 1$，而本文在定理 1 的条件下得到的解的 L^2 衰减为 $\|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant Ct^{\frac{a+p-3}{3p-3}}$，$t\geqslant 1$.

参考文献：

[1] AGRAWAL G P. Nonlinear Fiber Optics[M]. New York：Academic Press，1995.

[2] OHTA M，TODOROVA G. Remarks on global existence and blowup for damped nonlinear Schrödinger equations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems，2009，23(4)：1323-1325.

[3] JIN G，JIN Y，LI C. The initial value problem for nonlinear Schrödinger equations with a dissipative nonlinearity in one space dimension[J]. Journal of Evolution Equations，2016，16(4)：983-995.

[4] YUAN X T，LI C H. The effect of gain and strong dissipative structures on nonlinear Schrödinger equations in optical fiber[J]. Advances in Mathematical Physics. https://doi.org/10.1155/2019/7297090.