

文章编号: 1004-4353(2020)01-0001-07

非扩张映射隐中点黏性迭代序列的 逼近问题和均衡问题

沈金良¹, 叶静妮¹, 黄建华²

(1. 福州大学 至诚学院, 福建 福州 350002; 2. 福州大学 数学与计算机科学学院, 福建 福州 350108)

摘要: 利用黏性逼近方法构造了一种新的非扩张映射隐中点迭代序列, 在 Hilbert 空间研究了此序列的均衡问题与不动点问题, 并在适当条件下证明了此序列是强收敛于非扩张映射的特殊不动点.

关键词: 黏性逼近方法; 隐中点迭代; 非扩张映射; Hilbert 空间

中图分类号: O177.91

文献标志码: A

Equilibrium problems and the viscosity approximation problems for the implicit midpoint rule of nonexpansive mappings

SHEN Jinliang¹, YE Jingni¹, HUANG Jianhua²

(1. Fuzhou University Zhicheng College, Fuzhou 350002, China;

2. Institute of Mathematics and Computer, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: In this paper, we construct a new iteration for the implicit midpoint rule with viscosity technique, and study equilibrium problems and fixed point problems of nonexpansive mappings in Hilbert spaces. We prove that the suggested method converges strongly to a special fixed points of nonexpansive mappings under some conditions.

Keywords: viscosity approximation; implicit midpoint rule iteration; nonexpansive mappings; Hilbert space

0 引言

近年来,许多学者对非扩张映射的不动点问题和均衡问题进行了研究,并取得了较好的研究结果^[1-5]. 对于二元函数 $G: C \times C \rightarrow R$, 其均衡问题(简称为 EP) 可定义为: 寻找 $x \in C$, 使得

$$G(x, y) \geq 0 \quad (\forall y \in C). \quad (1)$$

将式(1) 的解集记为 $EP(G)$, $EP(G) = \{x \in C: G(x, y) \geq 0, \forall y \in C\}$.

给定映射 $T: C \rightarrow H$, 对于所有的 $x, y \in C$, 设 $G(x, y) = \langle Tx, y - x \rangle$, 则有 $z \in EP(G)$ 当且仅当 $\langle Tz, y - z \rangle \geq 0 \quad (\forall y \in C)$, 即 z 为变分不等式的解. 对于任意的 $x, y \in C$, 设 $G(x, y) = T(y) - T(x)$, 则有 $z \in EP(G) \Leftrightarrow T(z) = \inf_{y \in C} T(y) \quad (\forall y \in C)$, 即 z 是最小值问题的解. 因此均衡问题(1) 涵盖了变分不等式问题、优化问题、最值问题以及 Nash 均衡问题等.

2009 年, Ceng 等^[5] 在 Hilbert 空间中研究了 k -集伪压缩映射 T 的迭代序列:

收稿日期: 2020-02-10

作者简介: 沈金良(1982—), 男, 讲师, 研究方向为非线性分析.

$$\begin{cases} G(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \forall y \in C; \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T u_n, \end{cases} \quad (2)$$

并在适当的条件下证明了序列 $\{x_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 弱收敛于 T 的不动点集和均衡问题解集的公共点. 2014 年, Alghamdi 等^[6]在 Hilbert 空间中提出了一种非扩张映射半隐中点迭代序列:

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n T\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right), n \geq 0. \quad (3)$$

其中 $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $T: H \rightarrow H$ 是非扩张映射, 并且在合适的条件下得到了该序列的弱收敛定理. 2015 年, Xu 等^[7]在 Hilbert 空间中利用黏性逼近方法构造了一种非扩张映射隐中点迭代序列:

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) T\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right), n \geq 0, \quad (4)$$

其中 $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, f 是压缩映射, T 是非扩张映射, 并在某些条件下得到了该序列的强收敛定理. 2019 年, 沈金良^[8]研究了如下非扩张映射 T 的隐中点迭代序列: 给定 $x_1 \in C$,

$$\begin{cases} G(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \forall y \in C; \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right). \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\{r_n\} \subset (0, \infty)$, 并且在 Hilbert 空间中得到了该序列的弱收敛和强收敛定理.

受以上研究启发, 本文定义如下非扩张映射的隐中点黏性迭代序列: 给定 $x_1 \in C$,

$$\begin{cases} G(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \forall y \in C; \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right), \end{cases} \quad (6)$$

其中 f 是压缩映射, T 是非扩张映射, 不动点集记为 $F(T)$. 本文在 Hilbert 空间中研究式 (6) 的均衡问题和不动点问题, 并且在适当的条件下证明序列 $\{x_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 强收敛于 $F(T) \cap EP(G)$ 中的某一个点 z , $z = P_{F(T) \cap EP(G)} f(z)$.

1 预备知识

本文中恒设 H 是实 Hilbert 空间, H 上的内积和范数分别用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 表示, C 是 H 的非空闭凸子集. $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 记为 $x_n \rightharpoonup x$, $\{x_n\}$ 强收敛于 x 记为 $x_n \rightarrow x$. 任取一点 $x \in C$, 则必可在 C 中找到唯一的最近距离点 ($P_C(x)$), 且满足以下不等式:

$$\|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\|, \forall y \in C.$$

称 P_C 为 H 在 C 上的投影算子, 则显然 P_C 是非扩张映射, 且对于 $x \in H$ 以及 $z \in C$ 有

$$z = P_C(x) \Leftrightarrow \langle x - z, z - y \rangle \geq 0, \forall y \in C.$$

为了求解均衡问题 $EP(G)$, 本文假设 G 满足以下 4 个条件:

(A1) $G(x, x) = 0, \forall x \in C$;

(A2) G 是单调的, 即 $G(x, y) + G(y, x) \leq 0, \forall x, y \in C$;

(A3) 对所有的 $x, y, z \in C$, 有 $\lim_{t \rightarrow 0} G(tz + (1-t)x, y) \leq G(x, y)$;

(A4) 对任意的 $x \in C, y \mapsto G(x, y)$ 是凸的和下半连续的.

定义 1 设 C 是 H 的闭子集, $T: C \rightarrow C, f: C \rightarrow C$ 是两个自映射, 则:

1) T 是非扩张的, 若对于任意的 $x, y \in C$ 都有 $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$.

2) T 在零点是半闭的, 若对于 C 中的序列 $\{x_n\}, x_n \rightharpoonup x_0 \in H$ 和 $Tx_n \rightarrow 0$ 可以推导出 $Tx_0 = 0$.

3) T 是弱紧的, 若对于 C 内满足 $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 的序列 $\{x_n\}$, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 强收敛于 $x^* \in C$.

4) f 是压缩的, 如果存在常数 $\alpha \in [0, 1)$, 对于任意的 $x, y \in C$ 都有 $\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$.

引理 1^[9] 设 H 是实的 Hilbert 空间, 则下列等式成立:

(i) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2\langle x - y, y \rangle, \forall x, y \in H$;

(ii) $\|tx + (1-t)y\|^2 = t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 - t(1-t)\|x - y\|^2, \forall x, y \in H, \forall t \in [0, 1]$.

引理 2^[10] 设 C 是 H 中的非空闭凸子集, $G: C \times C \rightarrow R$ 满足条件(A1)–(A4). 设 $r > 0, x \in H$:

则存在 $z \in C$ 满足 $G(z, y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x \rangle \geq 0, \forall y \in C$.

引理 3^[10] 设映射 $G: C \times C \rightarrow R$ 满足条件(A1)–(A4). 对 $r > 0, x \in H$, 定义映射 $S_r: H \rightarrow C$ 为 $S_r(x) = \{z \in C: G(z, y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x \rangle \geq 0, \forall y \in C\}, \forall x \in H$. 则有:

(1) S_r 是单值的;

(2) S_r 是稳定非扩张映射 ($\|S_r x - S_r y\|^2 \leq \langle S_r x - S_r y, x - y \rangle, \forall x, y \in H$);

(3) $G(S_r) = EP(G)$;

(4) $EP(G)$ 是非空闭凸的.

引理 4^[11] 设 C 是 H 的非空闭凸子集, $T: C \rightarrow C$ 是非扩张映射. 若 T 有不动点, 则 $I - T$ 在 0 点是半闭的 (这里 I 是 H 中的恒等映射), 即如果 C 中的任意序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x \in C$, 且有序列 $\{(I - T)x_n\}$ 强收敛到 y , 则有 $(I - T)x = y$.

引理 5^[12] $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 是 3 个非负数列, $\{c_n\} \subset [0, 1)$, 并且满足以下条件:

$$\begin{cases} a_{n+1} \leq (1 - c_n)a_n + b_n, n \in N; \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty. \end{cases}$$

引理 6^[13] $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 若 $\{a_n\}$ 是一个非负实数列, 且满足 $a_{n+1} \leq (1 - \beta_n)a_n + \beta_n\sigma_n + \delta_n, n \geq 0$. 其

中: $\{\beta_n\} \subset [0, 1], \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty; \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq 0; \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$.

2 主要结果及其证明

定理 1 设 C 是 H 中的非空闭凸子集, $G: C \times C \rightarrow R$ 是二元函数, 满足条件(A1)–(A4). $T: C \rightarrow C$ 是非扩张映射, $\Omega = F(T) \cap EP(G)$ 非空. 任意给定 $x_1 \in C, \{x_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 如式(6)所示, 其中 $\{\alpha_n\} \subset (0, 1), \{r_n\} \subset (0, \infty)$, 并且满足条件: (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$; (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$; (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$; (iv) $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$; (v) $\sum_{n=1}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| < \infty$. 则有: ① 序列 $\{x_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 有界; ② $\lim \|x_{n+1} - x_n\| = 0$; ③ $\lim \|x_n - Tx_n\| = 0, \lim \|u_n - Tu_n\| = 0$.

证明 1) 任取 $q \in \Omega$, 由引理 3 中 S_r 的定义可知 $u_n = S_{r_n}x_n$, 因此

$$\|u_n - q\| = \|S_{r_n}x_n - S_{r_n}q\| \leq \|x_n - q\|, \forall n \geq 1. \quad (7)$$

因为 T 是非扩张映射, 所以

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\| &= \left\| \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right) - q \right\| \leq \\ &\alpha_n \|f(x_n) - q\| + (1 - \alpha_n) \left\| T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right) - q \right\| \leq \\ &\alpha_n \|f(x_n) - f(q)\| + \alpha_n \|f(q) - q\| + (1 - \alpha_n) \left\| \frac{u_n + x_{n+1}}{2} - q \right\| \leq \\ &\alpha_n \alpha \|x_n - q\| + \alpha_n \|f(q) - q\| + \frac{1 - \alpha_n}{2} \|u_n - q\| + \frac{1 - \alpha_n}{2} \|x_{n+1} - q\|. \end{aligned} \quad (8)$$

根据式(7) 和式(8) 进行移项整理得

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\| &\leq \frac{1 + (2\alpha - 1)\alpha_n}{1 + \alpha_n} \|x_n - q\| + \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n} \|f(q) - q\| = \left[1 - \frac{(2 - 2\alpha)\alpha_n}{1 + \alpha_n}\right] \|x_n - q\| + \\ &\frac{(2 - 2\alpha)\alpha_n}{1 + \alpha_n} \cdot \frac{1}{1 - \alpha} \|f(q) - q\| \leq \max\{\|x_n - q\|, \frac{1}{1 - \alpha} \|f(q) - q\|\}. \end{aligned}$$

再由递推公式可知

$$\|x_n - q\| \leq \max\{\|x_1 - q\|, \frac{1}{1 - \alpha} \|f(q) - q\|\}, \forall n \geq 1. \quad (9)$$

所以 $\{x_n\}$ 是有界序列, 同时 $\{u_n\}, \{Tx_n\}, \{Tu_n\}, \left\{T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right)\right\}$ 也都是有界的.

2) 因为 $x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right)$, 所以

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \left\| \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right) - \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) - (1 - \alpha_{n-1})T\left(\frac{u_{n-1} + x_n}{2}\right) \right\| = \\ &\left\| \alpha_n f(x_n) - \alpha_n f(x_{n-1}) + \alpha_n f(x_{n-1}) - \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) + (1 - \alpha_n)T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right) - \right. \\ &\left. (1 - \alpha_n)T\left(\frac{u_{n-1} + x_n}{2}\right) + (1 - \alpha_n)T\left(\frac{u_{n-1} + x_n}{2}\right) - (1 - \alpha_{n-1})T\left(\frac{u_{n-1} + x_n}{2}\right) \right\| \leq \\ &\alpha_n \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| \left\| f(x_{n-1}) - T\left(\frac{u_{n-1} + x_n}{2}\right) \right\| + \\ &(1 - \alpha_n) \left\| T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right) - T\left(\frac{u_{n-1} + x_n}{2}\right) \right\| \leq \\ &\alpha_n \alpha \|x_n - x_{n-1}\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| K + (1 - \alpha_n) \left\| \frac{u_n + x_{n+1}}{2} - \frac{u_{n-1} + x_n}{2} \right\| \leq \\ &\alpha_n \alpha \|x_n - x_{n-1}\| + K |\alpha_n - \alpha_{n-1}| + \frac{1 - \alpha_n}{2} (\|x_{n+1} - x_n\| + \|u_n - u_{n-1}\|). \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $K = \sup\{\|f(x_n)\| + \left\|T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right)\right\| : n \in N\}$.

由式(6) 可得:

$$G(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \forall y \in C; \quad (11)$$

$$G(u_{n+1}, y) + \frac{1}{r_{n+1}} \langle y - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1} \rangle \geq 0, \forall y \in C. \quad (12)$$

在式(11) 中取 $y = u_{n+1}$, 则有

$$G(u_n, u_{n+1}) + \frac{1}{r_n} \langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0. \quad (13)$$

在式(12) 中取 $y = u_n$, 则有

$$G(u_{n+1}, u_n) + \frac{1}{r_{n+1}} \langle u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1} \rangle \geq 0. \quad (14)$$

把式(13) 和式(14) 相加, 再根据条件(A2) 进行整理可得 $\langle u_{n+1} - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} - \frac{u_{n+1} - x_{n+1}}{r_{n+1}} \rangle \geq 0$. 所以

$\langle u_{n+1} - u_n, u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1} - x_{n+1}) \rangle \geq 0$. 因为 $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$, 所以必然存在实数 $b > 0$,

使得 $r_n > b (n \geq 1)$. 因此有

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|^2 &\leq \langle u_{n+1} - u_n, x_{n+1} - x_n + (1 - \frac{r_n}{r_{n+1}})(u_{n+1} - x_{n+1}) \rangle \leq \\ &\|u_{n+1} - u_n\| (\|x_{n+1} - x_n\| + \left|1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}\right| \|u_{n+1} - x_{n+1}\|) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|u_{n+1} - u_n\| (\|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}} |r_{n+1} - r_n| \|u_{n+1} - x_{n+1}\|) \leq \\ & \|u_{n+1} - u_n\| (\|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{b} |r_{n+1} - r_n| \|u_{n+1} - x_{n+1}\|). \end{aligned} \quad (15)$$

取 $L = \sup\{\|u_n - x_n\| : n \in N\}$, 由式(15) 得

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{b} |r_{n+1} - r_n| L. \quad (16)$$

由式(10) 和式(16) 可得

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| & \leq \alpha_n \alpha \|x_n - x_{n-1}\| + K |\alpha_n - \alpha_{n-1}| + \frac{1 - \alpha_n}{2} \|x_{n+1} - x_n\| + \\ & \frac{1 - \alpha_n}{2} (\|x_n - x_{n-1}\| + \frac{1}{b} |r_n - r_{n-1}| L). \end{aligned}$$

对上式进行移项整理得

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \left[1 - \frac{2(1 - \alpha)\alpha_n}{1 + \alpha_n}\right] \|x_n - x_{n-1}\| + \frac{2K}{1 + \alpha_n} |\alpha_n - \alpha_{n-1}| + \frac{(1 - \alpha_n)L}{(1 + \alpha_n)b} |r_n - r_{n-1}|.$$

由条件(ii)、(iii)、(v) 以及引理 5 可推导出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \quad (17)$$

再由式(17) 和 $\|r_{n+1} - r_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n+1} - u_n\| = 0. \quad (18)$$

3) 任取 $q \in \Omega$, 由 $u_n = S_{r_n} x_n$ 可知 $\|u_n - q\|^2 = \|S_{r_n} x_n - S_{r_n} q\|^2 = \langle S_{r_n} x_n - S_{r_n} q, u_n - q \rangle \leq \langle u_n - q, x_n - q \rangle = \frac{1}{2} (\|u_n - q\|^2 + \|x_n - q\|^2 - \|x_n - u_n\|^2)$. 对该式进行移项整理得

$$\|u_n - q\|^2 \leq \|x_n - q\|^2 - \|x_n - u_n\|^2. \quad (19)$$

由引理 1 中的(ii) 和式(19) 有

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\|^2 & = \left\| \alpha_n [f(x_n) - q] + (1 - \alpha_n) \left[T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right) - q \right] \right\|^2 \leq \alpha_n \|f(x_n) - q\|^2 + \\ & (1 - \alpha_n) \left\| T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right) - q \right\|^2 \leq \alpha_n \|f(x_n) - q\|^2 + \frac{1 - \alpha_n}{2} \|u_n - q\|^2 + \frac{1 - \alpha_n}{2} \|x_{n+1} - q\|^2 \leq \\ & \alpha_n \|f(x_n) - q\|^2 + \frac{1 - \alpha_n}{2} \|x_n - q\|^2 - \frac{1 - \alpha_n}{2} \|x_n - u_n\|^2 + \frac{1 - \alpha_n}{2} \|x_{n+1} - q\|^2. \end{aligned}$$

对上式进行移项整理得

$$\begin{aligned} \frac{1 - \alpha_n}{2} \|x_n - u_n\|^2 & \leq \alpha_n \|f(x_n) - q\|^2 + \frac{1 - \alpha_n}{2} \|x_n - q\|^2 - \frac{1 + \alpha_n}{2} \|x_{n+1} - q\|^2 \leq \\ & \alpha_n \|f(x_n) - q\|^2 + \frac{1 - \alpha_n}{2} (\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2) \leq \\ & \alpha_n \|f(x_n) - q\|^2 + \frac{1 - \alpha_n}{2} \|x_{n+1} - x_n\| (\|x_n - q\| - \|x_{n+1} - q\|). \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, 再由式(17) 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| = 0. \quad (20)$$

由引理 1 的条件(i) 和式(17)、(18) 可得

$$\begin{aligned} \left\| x_n - T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right) \right\| & \leq \left\| x_n - T\left(\frac{u_{n-1} + x_n}{2}\right) \right\| + \left\| T\left(\frac{u_{n-1} + x_n}{2}\right) - T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right) \right\| \leq \\ & \alpha_{n-1} \left\| f(x_{n-1}) - T\left(\frac{u_{n-1} + x_n}{2}\right) \right\| + \left\| \frac{u_{n-1} + x_n}{2} - \frac{u_n + x_{n+1}}{2} \right\| \leq \\ & \alpha_{n-1} \left\| f(x_{n-1}) - T\left(\frac{u_{n-1} + x_n}{2}\right) \right\| + \frac{1}{2} \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{2} \|u_n - u_{n-1}\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (21)$$

由式(17)、(20) 和式(21) 得

$$\begin{aligned} \|u_n - Tu_n\| &\leq \|u_n - x_n\| + \left\|x_n - T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right)\right\| + \left\|T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right) - Tu_n\right\| \leq \\ &\|u_n - x_n\| + \left\|x_n - T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right)\right\| + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{2}\|x_n - u_n\| = \\ &\frac{3}{2}\|u_n - x_n\| + \left\|x_n - T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right)\right\| + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (22)$$

再由式(20) 和(22) 得

$$\begin{aligned} \|x_n - Tx_n\| &\leq \|x_n - u_n\| + \|u_n - Tu_n\| + \|Tu_n - Tx_n\| \leq \\ &2\|x_n - u_n\| + \|u_n - Tu_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (23)$$

定理 2 设 C 是 H 中的非空闭凸子集, $G: C \times C \rightarrow R$ 是二元函数, 满足条件(A1)–(A4). $T: C \rightarrow C$ 是非扩张映射, $\Omega = F(T) \cap EP(G)$ 非空. 任意给定 $x_1 \in C$, $\{x_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 如式(6) 所示, 其中 $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$,

$\{r_n\} \subset (0, \infty)$, 并且满足条件: (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$; (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$; (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$;

(iv) $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$; (v) $\sum_{n=1}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| < \infty$. 则序列 $\{x_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 强收敛于 $z \in \Omega$, $z = P_{\Omega}f(z)$.

证明 分两步证明定理 2.

1) 证明 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, x_n - z \rangle \leq 0$, 其中 $z = P_{\Omega}f(z)$.

根据式(20), 取 $\{u_n\}$ 的 1 个子列 $\{u_{n_i}\}$, 使得 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, u_{n_i} - z \rangle = \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, u_n - z \rangle = \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, x_n - z \rangle$. 因为 $\{u_{n_i}\}$ 有界, 所以存在 $\{u_{n_i}\}$ 的 1 个子列 $\{u_{n_{ij}}\}$ 弱收敛于 v . 不失一般性, 直接假设 $u_{n_i} \rightarrow v$. 由 $\|u_n - Tu_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$, 可知 $Tu_{n_i} \rightarrow v$. 下面证明 $v \in \Omega$. 因为

$$G(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

由条件(A2) 得 $\frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq G(y, u_n)$, 所以有 $\langle y - u_{n_i}, \frac{u_{n_i} - x_{n_i}}{r_{n_i}} \rangle \geq G(y, u_{n_i})$. 再由 $\frac{u_{n_i} - x_{n_i}}{r_{n_i}} \rightarrow 0$ 和 $u_{n_i} \rightarrow v$, 以及条件(A4) 证得 $G(y, v) \leq 0, \forall y \in C$. 令 $t \in (0, 1]$, $y \in C$, $y_t = ty + (1-t)v$. 则由于 $y \in C$ 及 $v \in C$, 所以 $y_t \in C$ 且 $G(y_t, v) \leq 0$. 由条件(A1) 和(A4) 可得 $0 = G(y_t, y_t) = tG(y_t, y) + (1-t)G(y_t, v) \leq tG(y_t, y)$, 因此 $0 \leq G(y_t, y)$. 再由条件(A3) 得 $0 \leq G(v, y), \forall y \in C$, 由此证得 $v \in EP(G)$.

下证 $v \in F(T)$. 因 T 是非扩张映射, 由引理 5 可知 $I - T$ 在 0 点是半闭的. 由上述证明可知 $\|u_n - Tu_n\| \rightarrow 0$ 和 $u_{n_i} \rightarrow v$, 所以 $v \in F(T)$, 由此证得 $v \in \Omega$. 因 $z = P_{\Omega}f(z)$, 故可得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, x_n - z \rangle = \limsup_{i \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, u_{n_i} - z \rangle = \langle f(z) - z, v - z \rangle \leq 0. \quad (24)$$

2) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - z\| = 0$.

由范数和内积的性质可知

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq (1 - \alpha_n)^2 \left\|T\left(\frac{u_n + x_{n+1}}{2}\right) - z\right\|^2 + 2\alpha_n \langle f(x_n) - z, x_{n+1} - z \rangle \leq \\ &(1 - \alpha_n)^2 \left\|\frac{u_n + x_{n+1}}{2} - z\right\|^2 + 2\alpha_n \langle f(x_n) - f(z), x_{n+1} - z \rangle + 2\alpha_n \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle \leq \\ &\frac{(1 - \alpha_n)^2}{2} \|u_n - z\|^2 + \frac{(1 - \alpha_n)^2}{2} \|x_{n+1} - z\|^2 + 2\alpha_n \|x_n - z\| \|x_{n+1} - z\| + \\ &2\alpha_n \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle \leq \frac{(1 - \alpha_n)^2}{2} \|x_n - z\|^2 + \frac{(1 - \alpha_n)^2}{2} \|x_{n+1} - z\|^2 + \\ &\alpha_n (\|x_n - z\|^2 + \|x_{n+1} - z\|^2) + 2\alpha_n \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \frac{1 - 2\alpha_n + \alpha_n^2 + 2\alpha\alpha_n}{1 + 2\alpha_n - \alpha_n^2 - 2\alpha\alpha_n} \|x_n - z\|^2 + \frac{4\alpha_n}{1 + 2\alpha_n - \alpha_n^2 - 2\alpha\alpha_n} \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle = \\
&\left[1 - \frac{4\alpha_n(1 - \alpha)}{1 + 2\alpha_n - \alpha_n^2 - 2\alpha\alpha_n} \right] \|x_n - z\|^2 + \frac{2\alpha_n^2}{1 + 2\alpha_n - \alpha_n^2 - 2\alpha\alpha_n} \|x_n - z\|^2 + \\
&\frac{4\alpha_n}{1 + 2\alpha_n - \alpha_n^2 - 2\alpha\alpha_n} \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle = \left[1 - \frac{4\alpha_n(1 - \alpha)}{1 + 2\alpha_n - \alpha_n^2 - 2\alpha\alpha_n} \right] \|x_n - z\|^2 + \\
&\frac{4\alpha_n(1 - \alpha)}{1 + 2\alpha_n - \alpha_n^2 - 2\alpha\alpha_n} \left[\frac{\alpha_n}{2(1 - \alpha)} \|x_n - z\|^2 + \frac{1}{1 - \alpha} \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle \right] \leq \\
&\left[1 - \frac{4\alpha_n(1 - \alpha)}{1 + 2\alpha_n - \alpha_n^2 - 2\alpha\alpha_n} \right] \|x_n - z\|^2 + \frac{4\alpha_n(1 - \alpha)}{1 + 2\alpha_n - \alpha_n^2 - 2\alpha\alpha_n} \times \\
&\left[\frac{\alpha_n}{2(1 - \alpha)} M + \frac{1}{1 - \alpha} \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle \right] = (1 - \beta_n) \|x_n - z\|^2 + \beta_n \sigma_n.
\end{aligned}$$

其中 $\beta_n = \frac{4\alpha_n(1 - \alpha)}{1 + 2\alpha_n - \alpha_n^2 - 2\alpha\alpha_n}$, $\sigma_n = \frac{\alpha_n}{2(1 - \alpha)} M + \frac{1}{1 - \alpha} \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle$, $M = \sup\{\|x_n - z\|^2 : n \in$

$N\}$. 由条件(i) 和(ii) 以及式(24) 可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq 0$. 再由引理 6 和式(20) 得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = 0, \quad (25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - z\| = 0. \quad (26)$$

由上述过程可知, 序列 $\{x_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 强收敛于 $z \in \Omega$, 同时 z 也是变分不等式 $\langle (I - f)y, x - y \rangle \geq 0, x \in \Omega$ 的唯一解, 即 $z = P_{\Omega}f(z)$.

参考文献:

- [1] BLUM E, OETTLI W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. Math Student, 1994,63:123-145.
- [2] CENG L C, YAO J C. A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems[J]. J Comput Appl Math, 2008,214:186-201.
- [3] FLAM S D, ANTIPIN A S. Equilibrium programming using proximal-link algorithms[J]. Math Program, 1997, 78:29-41.
- [4] TAKAHASHI S, ZEMBAYASHI W. Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces[J]. J Math Anal Appl, 2007,331:506-517.
- [5] CENG L C, AL-HOMIDAN S, ANSARI Q H, et al. An iterative scheme for equilibrium problems and fixed point problems of strict pseudo-contraction mappings[J]. Comput Appl Math, 2009,223:967-974.
- [6] ALGHAMDI M A, SHAHZAD N, XU H K. The implicit minpoint rule for nonexpansive mappings[J]. Fixed Point Theorie Appl, 2014,96:1-9.
- [7] XU H K, ALGHAMDI M A, SHAHZAD N. The viscosity technique for the implicit midpoint rule of nonexpansive mappings in Hilbert spaces[J]. Fixed Point Theorie Appl, 2015,41:1-12.
- [8] 沈金良. 均衡问题和非扩张映射隐中点迭代序列的不动点问题[J]. 宁夏大学学报(自然科学版), 2018,39(4):305-308.
- [9] MARINO G, XU H K. Weak and strong convergence theorems for strict pseudo-contractions in Hilbert spaces[J]. J Math Anal Appl, 2007,329:336-346.
- [10] COMBETTES P L, HIRSTOAGA S A. Equilibrium problem programming in Hilbert spaces[J]. J Nonlinear Convex Anal, 2005,6:117-136.
- [11] KAZIMIERZ G K, KIRK W A. Topics in Metric Fixed Point Theory: Cambridge Studies in Advanced Mathematics: Vol.28[M]. London: Cambridge University Press, 1990.
- [12] XU H K. An iterative approach to quadratic optimization[J]. J Optim Appl, 2003,116:659-678.
- [13] XU H K. Iterative algorithms for nonlinear operators[J]. J Lond Math Soc, 2002,66:240-256.