文章编号: 1004-4353(2019)04-0315-07

基于随机汇率条件下的国外股票亚式回望期权的定价公式

潘素娟[1,2]

(1. 福建商学院 信息工程学院, 福建 福州 350012;
2. 金融数学福建省高校重点实验室(莆田学院), 福建 莆田 351100)

摘要: 在标的资产价格和汇率均为随机的情况下,用含有 Poisson 过程的 Ito-Skorohod 随机微分方程描述股票价格的运动. 在考虑汇率风险的情况下,利用鞅定价技巧(风险中性方法)和多元统计分析,计算并推导出一种基于离散几何平均资产的国外股票回望买入期权的定价公式. 该公式可为未来国内出现的同类期权的合理定价提供参考.

关键词: 随机汇率; 离散几何平均; Ito-Skorohod 随机微分方程; 鞅定价技巧; 回望期权

中图分类号: O211.6; F830.9　　　**文献标志码**: A

Pricing formula of asian lookback options for foreign stocks based on stochastic exchange rate

PAN Sujuan[1,2]

(1. *Department of Information Engineering*, *Fujian Commercial College*, *Fuzhou* 350012, *China*; 2. *Key Laboratory of Financial Mathematics*, *Fujian Province University* (*Putian University*), *Putian* 351100, *China*)

Abstract: When the underlying asset price and exchange rate were stochastic, the Ito-Skorohod stochastic differential equation with Poisson process was used to describe the movement of stock price. Considering the exchange rate risk, a pricing formula of foreign stock call-back options based on floating execution price of discrete geometric average assets is calculated and deduced by using martingale pricing technique (risk neutral method) and multivariate statistical analysis. The formula can provide guidance for the reasonable pricing of similar options in the domestic market in the future.

Keywords: stochastic exchange rate; discrete geometric average; Ito-Skorohod stochastic differential equation; martingale pricing techniques; lookback option

回望期权是一种在有效期内选取最有利的价格作为协定价格的期权,因其可为投资者以最低价格买进标的股而广受 OTC 市场投资者的青睐. 亚式期权是到期收益依赖于平均资产价格的一种期权,它允许投资者对某时段内商品的平均价格进行套期保值,进而可以避免因某些交易者对期权到期时的资产价格进行操纵而产生的风险;因此,亚式期权已成为一种广泛使用的金融衍生工具. 资产的平均价格可以通过多种平均方式来实现. 例如: Gentle[1] 采用加权几何平均标的资产对回望期权进行了近似定价,左玲等[2] 给出了一种采用跳跃扩散下离散算术平均资产回望买权的定价公式,文献[3-5]的作者应用数值模拟、二叉树等方法给出了回望期权的近似计算. 本文在研究中将资产的平均价格作为标的资产

收稿日期: 2019-08-09　　　**作者简介**: 潘素娟(1982—),女,副教授,研究方向为金融工程与金融数学.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11001142);金融数学福建省高校重点实验室开放课题立项项目(JR201802)

的价格,并将期权的标的资产在其回望时段内的最低价格作为期权的执行价,该做法可有效避免期权即将到期时价格容易被操纵问题.目前为止,已有很多学者对外汇型衍生产品进行了研究[6-8],但未见将回望期权和亚式期权结合起来考虑汇率风险的研究.基于此,本文在考虑汇率风险的情况下,将离散几何平均资产作为标的(标的资产价格以及汇率均为随机),用含有 Poisson 过程的 Ito-Skorohod 随机微分方程[9]描述股票价格的运动,用鞅定价技巧(风险中性方法)[10]和多元正态分布运算的相关知识,推导出基于离散几何平均资产的国外股票回望买入期权的定价公式.

1 经济变量的随机过程

考虑某个完备概率空间 $(\Omega, F, (F_t)_{t\geqslant 0}, P)$ 上的标准 Brown 运动 W_t,其中 $(F_t)_{t\geqslant 0}$ 是对 t 递增的 σ-域.假定对随机变量的所有叙述几乎处处成立或者几乎必然成立,用 $E\langle X \mid F_t\rangle$ 表示随机变量 X 关于到时间 t 为止可获的信息的条件期望,用 $S(t)$ 表示 t 时以外币计量的国外股票的价格,用 $F(t)$ 表示 t 时以内币计量的一单位外币的价格,即 t 时即期汇率.本文假设股票价格的扩散过程和汇率的变动随机过程都遵循几何 Brown 运动,即:

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = \mu_S \mathrm{d}t + \sigma_S \mathrm{d}w_t^S,\ \frac{\mathrm{d}F(t)}{F(t)} = \mu_F \mathrm{d}t + \sigma_F \mathrm{d}w_t^F. \tag{1}$$

其中:初始条件 $S(t)$ 和 $F(t)$ 均为 F_t 可测,且 $0 \leqslant t \leqslant T$; w_t^S 和 w_t^F 均是测度 P 下标准的 Wiener 过程;参数 μ_S, μ_F 和 σ_S, σ_F 分别表示期望收益率和波动率.设国内和国外的无风险利率常数分别为 r 和 r_f,用 ρ_{SF} 表示 w_t^S 和 w_t^F 的相关系数,即 $\mathrm{cov}(\mathrm{d}w_t^S, \mathrm{d}w_t^F) = \rho_{SF}\mathrm{d}t$.

2 风险中性概率测度和数学模型

2.1 风险中性概率测度

由期权定价的基本理论[11]可知,将 $S(t)$ 和 $F(t)$ 的预期增长率分别替换成向量 $\bar{\alpha}_S = r_f - \rho_{SF}\sigma_S\sigma_F$ 和 $\bar{\alpha}_F = r - r_f$ 时,即可得到衍生产品在风险中性测度下的正确估值.为了在风险中性测度下讨论衍生产品的定价问题,本文在上述空间上引入一个与测度 P 等价的鞅测度 Q[12]:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \exp\left\{rw - \frac{1}{2}|r|^2 t\right\},$$

其中 $r = (r_S, r_F)^{\mathrm{T}}$, $r_i = \dfrac{\bar{\alpha}_i - \mu_i}{\sigma_i}$, $i \in \{S, F\}$, $|r|$ 表示 r 的模, $w = (w_t^S, w_t^F)^{\mathrm{T}}$.由 Girsanov 定理[13]知,在鞅测度 Q 下,式(1)可转化为:

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = \bar{\alpha}_S \mathrm{d}t + \sigma_S \mathrm{d}\bar{w}_t^S,\ \frac{\mathrm{d}F(t)}{F(t)} = \bar{\alpha}_F \mathrm{d}t + \sigma_F \mathrm{d}\bar{w}_t^F, \tag{2}$$

其中 $\bar{w}_t^S$ 和 $\bar{w}_t^F$ 是带 σ 流的概率空间 $(\Omega, F, (F_t)_{T\geqslant t\geqslant 0}, Q)$ 中的标准 Wiener 过程,且 $\mathrm{cov}(\mathrm{d}\bar{w}_t^S, \mathrm{d}\bar{w}_t^F) = \rho_{SF}\mathrm{d}t$.

2.2 几何平均亚式期权的定义和数学模型

设 $G_S(T)$ 和 $G_F(T)$ 分别是 $S(t)$ 和 $F(t)$ 在时间段 $[T_0, T]$ 上的离散几何平均值,且用 μ_{G_S}, μ_{G_F} 和 $\sigma_{G_S}^2$, $\sigma_{G_F}^2$ 分别表示 $G_S(T)$ 和 $G_F(T)$ 的期望和方差.以下首先计算 μ_{G_S} 和 $\sigma_{G_S}^2$.

用均匀分布的离散时间点 $t_j = T_0 + j \cdot \Delta T\ (j = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 表示对区间 $[T_0, T]$ 的分割,其中 $\Delta T = \dfrac{T - T_0}{n}$, $t_n = T$.由于 $[T_0, T]$ 既是期权的合同期又是资产的平均时段,所以当前时刻 $t \in [T_0, T]$,即 t 落在平均时段之中,这时必然存在某个离散时间点 t_k,使得 $t = t_k + \lambda\Delta t$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.因此时 $S(t_1), S(t_2), \cdots, S(t_k), S(t)$ 都是已知的,所以

$$G_S(T)=[S(t_1)\cdot S(t_2)\cdot\cdots\cdot S(t_k)]^{\frac{1}{n}}S(t)^{\frac{n-k}{n}}\left\{\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})}\cdot\left[\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})}\right]^2\cdot\cdots\cdot\left[\frac{S(t_{k+1})}{S(t)}\right]^{n-k}\right\}^{\frac{1}{n}}.$$

令 $\widetilde{S}(t)=[S(t_1)\cdot S(t_2)\cdot\cdots\cdot S(t_k)]^{\frac{1}{n}}S(t)^{\frac{n-k}{n}}$，则

$$\ln\frac{G_S(T)}{\widetilde{S}(t)}=\frac{1}{n}\left[\ln\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})}+2\ln\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})}+\cdots+(n-k-1)\ln\frac{S(t_{k+2})}{S(t_{k+1})}+(n-k)\ln\frac{S(t_{k+1})}{S(t)}\right].$$

又因为 $\frac{S(t_{k+1})}{S(t)},\frac{S(t_{k+2})}{S(t_{k+1})},\cdots,\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})}$ 是相互独立的对数正态随机变量，所以有

$$\ln\frac{G_S(T)}{\widetilde{S}(t)}\sim N\left[\left(\mu_{G_S}-\frac{\sigma_{G_S}^2}{2}\right)\tau,\sigma_{G_S}^2\tau\right].$$

其中：$\sigma_{G_S}^2\tau=\sigma_S^2\Delta t\left[\frac{(n-k)^2}{n^2}(1-\lambda)-\frac{(n-k+1)(n-k)(2n-2k-1)}{6n^2}\right]$，

$$\left(\mu_{G_S}-\frac{\sigma_{G_S}^2}{2}\right)\tau=\left(\bar{\alpha}_S-\frac{\sigma_S^2}{2}\right)\Delta t\left[\frac{n-k}{n}(1-\lambda)+\frac{(n-k-1)(n-k)}{2n}\right].$$

解上面 2 个式子，可得：

$$\mu_{G_S}=\frac{\bar{\alpha}_S\Delta t}{\tau}\left[\frac{n-k}{n}(1-\lambda)+\frac{(n-k-1)(n-k)}{2n}\right]+$$
$$\frac{\sigma_S^2\Delta t}{2\tau}\left[\frac{k^2-nk}{n^2}(1-\lambda)+\frac{2(n-k)^3(3n-1/2)(1+k-n)}{6n^2}\right],$$
$$\sigma_{G_S}^2=\frac{1}{\tau}\sigma_S^2\Delta t\left[\frac{(n-k)^2}{n^2}(1-\lambda)-\frac{(n-k+1)(n-k)(2n-2k-1)}{6n^2}\right].$$

类似上述解法，可得：

$$\mu_{G_F}=\frac{\bar{\alpha}_F\Delta t}{\tau}\left[\frac{n-k}{n}(1-\lambda)+\frac{(n-k-1)(n-k)}{2n}\right]+$$
$$\frac{\sigma_F^2\Delta t}{2\tau}\left[\frac{k^2-nk}{n^2}(1-\lambda)+\frac{2(n-k)^3(3n-1/2)(1+k-n)}{6n^2}\right],$$
$$\sigma_{G_F}^2=\frac{1}{\tau}\sigma_F^2\Delta t\left[\frac{(n-k)^2}{n^2}(1-\lambda)-\frac{(n-k+1)(n-k)(2n-2k-1)}{6n^2}\right].$$

2.3　期权标的资产的说明

为了方便讨论，本文利用乘积的方式将资产的离散几何平均值和汇率的离散几何平均值转化成一个资产，即 $\phi=G_SG_F$. ϕ 可以解释为国内货币给出的国外股票价格的离散几何平均值，其价格扩散过程服从对数正态分布，即

$$\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\phi(t)}=\mu_\phi\mathrm{d}t+\sigma_\phi\mathrm{d}\bar{w}_t^\phi.$$

式中 ϕ 的漂移率常数为 $\mu_\phi=\mu_{G_S}+\mu_{G_F}+\rho_{G_SG_F}\sigma_{G_S}\sigma_{G_F}$，$\phi$ 的波动率常数为 $\sigma_\phi=(\sigma_{G_S}^2+\sigma_{G_F}^2+2\rho_{G_SG_F}\sigma_{G_S}\sigma_{G_F})^{\frac{1}{2}}$，$\mathrm{d}\bar{w}_t^\phi$ 是标准 Wiener 过程.

2.4　期权的回望时段和到期收益的说明

假设期权的回望时段为期权的整个合同期，即浮动执行价回望买入期权允许持有者以回望时段内期权标的资产的最低价买入资产，因此这种期权在到期日总是会被执行，并且它的到期收益总是大于零. 期权的到期收益公式[14] 为

$$C[\phi(T),0]=\phi(T)-m_{T_0}^T=\phi(T)-\min(m_{T_0}^t,m_t^T).$$

其中：$m_{T_0}^T$ 是 $[T_0,T]$ 区间内 ϕ 的最小值，即 $m_{T_0}^T=\min\{\phi(\xi),T_0\leqslant\xi\leqslant T\}$；$m_t^T$ 是 $[t,T]$ 区间内 ϕ 的最小值，即 $m_t^T=\min\{\phi(\xi),t\leqslant\xi\leqslant T\}$；$m_{T_0}^t$ 是 $[T_0,t]$ 区间内 ϕ 的最小值，即 $m_{T_0}^t=\min\{\phi(\xi),T_0\leqslant\xi\leqslant t\}$；在当前时刻下，$m_{T_0}^t$ 是已知量，m_t^T 是未知量.

3 分布函数及其分布密度的说明

由于国内货币给出的国外股票价格的离散几何平均值 ϕ 遵循的是对数正态扩散过程,所以随机变量 $H_\xi=\ln\dfrac{\phi(\xi)}{\phi(t)}$ 的过程是正态的,其波动率为 $\sigma_H=\sigma_\phi$,漂移率为 $\mu_H=\mu_\phi-\dfrac{\sigma_\phi^2}{2}$,其中 $\phi(t)$ 是当前时刻 t 时的国内货币给出的国外股票价格的离散几何平均值.

令随机变量 $y_T=\ln\dfrac{m_t^T}{\phi(t)}=\min\{H_\xi,t\leqslant\xi\leqslant T\}$, $y=\ln\dfrac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}=\min\{H_\xi,T_0\leqslant\xi\leqslant t\}$, y 为已知量,则根据分布函数的定义得如下分布函数:

$$P(y_T\geqslant y)=N\left(\frac{-y+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)-\exp\left(\frac{2\mu_H y}{\sigma_H^2}\right)\cdot N\left(\frac{y+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right),\ y\leqslant 0,\ \tau=T-t. \tag{3}$$

式(3)所对应的密度函数为

$$f(y)=\frac{\partial}{\partial y}P(y_T<y)=\frac{\partial}{\partial y}[1-P(y_T\geqslant y)]=\frac{1}{\sigma_H\sqrt{\tau}}n\left(\frac{-y+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)+\frac{2\mu_H}{\sigma_H^2}\exp\left(\frac{2\mu_H y}{\sigma_H^2}\right)\cdot N\left(\frac{y+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)+\exp\left(\frac{2\mu_H y}{\sigma_H^2}\right)\cdot\frac{1}{\sigma_H\sqrt{\tau}}n\left(\frac{y+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right).$$

4 期权定价公式及其求解

4.1 模型的求解

根据风险中性期望折现方法[15],随机汇率条件下国外股票几何平均回望买入期权的价格为

$$C(\phi,m_{T_0}^t,\tau)=\exp(-r\tau)E[\phi(T)-\min(m_{T_0}^t,m_t^T)],$$

其中 E 是风险中性世界中的期望算子.又因 $\exp(-r\tau)E[\phi(T)]=\phi(t)$,当前时刻 $m_{T_0}^t$ 是已知量,m_t^T 的分布与方程(3)中的分布函数有关,所以本文考虑

$$E[\min(m_{T_0}^t,m_t^T)]=E(m_{T_0}^t\mid m_{T_0}^t\leqslant m_t^T)+E(m_t^T\mid m_{T_0}^t>m_t^T)=m_{T_0}^tP(m_{T_0}^t\leqslant m_t^T)+E(m_t^T\mid m_{T_0}^t>m_t^T). \tag{4}$$

1) 计算式(4)右边的第1项.

$$m_{T_0}^tP(m_{T_0}^t\leqslant m_t^T)=m_{T_0}^tP\left(\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}\leqslant\ln\frac{m_t^T}{\phi(t)}\right)=m_{T_0}^tP(y\leqslant y_T). \tag{5}$$

将式(3)带入式(5)可得

$$m_{T_0}^tP(m_{T_0}^t\leqslant m_t^T)=m_{T_0}^t\left[N\left(\frac{-\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)-\exp\left(\frac{2\mu_H\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}{\sigma_H^2}\right)N\left(\frac{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)\right]=$$

$$m_{T_0}^t\left[N\left(\frac{-\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\left(\mu_\phi-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right)\tau}{\sigma_\phi\sqrt{\tau}}\right)-\exp\left(\frac{2\left(\mu_\phi-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right)\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}{\sigma_\phi^2}\right)N\left(\frac{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\left(\mu_\phi-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right)\tau}{\sigma_\phi\sqrt{\tau}}\right)\right]=$$

$$m_{T_0}^t\left[N\left(\frac{-\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\left(\mu_\phi-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right)\tau}{\sigma_\phi\sqrt{\tau}}\right)-\left(\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}\right)^{\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi^2}-1}\cdot N\left(\frac{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\left(\mu_\phi-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right)\tau}{\sigma_\phi\sqrt{\tau}}\right)\right].$$

2) 计算式(4)右边的第2项.

$$E(m_t^T\mid m_{T_0}^t>m_t^T)=E\left(\phi(t)\exp(y_T)\,\middle|\,\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}>\ln\frac{m_t^T}{\phi(t)}\right)=E\left(\phi(t)\exp(y_T)\,\middle|\,\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}>y_T\right)=$$

$$\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\phi(t)\exp(y_T)f(y_T)\mathrm{d}y_T=\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\phi(t)\exp(y_T)\left[\frac{1}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\cdot n\left(\frac{-y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{2\mu_H}{\sigma_H^2}\cdot\exp\left(\frac{2\mu_H y_T}{\sigma_H^2}\right)\cdot N\left(\frac{y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)+\exp\left(\frac{2\mu_H y_T}{\sigma_H^2}\right)\cdot\frac{1}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\cdot n\left(\frac{y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)\right]\mathrm{d}y_T. \tag{6}$$

式(6)可分成如下 3 部分：

$$A_1=\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\phi(t)\exp(y_T)\cdot\frac{1}{\sigma_H\sqrt{\tau}}n\left(\frac{-y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)\mathrm{d}y_T,$$

$$A_2=\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\phi(t)\exp(y_T)\cdot\frac{2\mu_H}{\sigma_H^2}\exp\left(\frac{2\mu_H y_T}{\sigma_H^2}\right)\cdot N\left(\frac{y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)\mathrm{d}y_T,$$

$$A_3=\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\phi(t)\exp(y_T)\cdot\exp\left(\frac{2\mu_H y_T}{\sigma_H^2}\right)\cdot\frac{1}{\sigma_H\sqrt{\tau}}n\left(\frac{y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)\mathrm{d}y_T.$$

A_1、A_2、A_3 的计算过程为：

$$A_1=\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\frac{\phi(t)}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[y_T-\frac{\left(\frac{-y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)^2}{2}\right]\mathrm{d}y_T=$$
$$\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\frac{\phi(t)}{\sigma_H\sqrt{2\pi\tau}}\cdot\exp\left[y_T-\frac{(-y_T+\mu_H\tau)^2}{2\sigma_H^2\tau}\right]\mathrm{d}y_T=$$
$$\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\frac{\phi(t)}{\sigma_H\sqrt{2\pi\tau}}\cdot\exp\left\{\left(-\frac{1}{2\sigma_H^2\tau}\right)\cdot[y_T-(\sigma_H^2+\mu_H)\tau]^2+\left(\frac{\sigma_H^2}{2}+\mu_H\right)\tau\right\}\mathrm{d}y_T=$$
$$\frac{\phi(t)\exp\left(\frac{\sigma_H^2}{2}+\mu_H\right)\tau}{\sigma_H\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\exp\left\{-\frac{[y_T-(\sigma_H^2+\mu_H)\tau]^2}{2\sigma_H^2\tau}\right\}\mathrm{d}y_T=\phi(t)\exp(\mu_\phi\tau)N(-d_1),$$
$$d_1=\frac{-\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\left(\mu_\phi+\frac{\sigma_H^2}{2}\right)\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}.$$

$$A_2=\frac{2\mu_H}{\sigma_H^2}\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\phi(t)\cdot\exp\left(y_T+\frac{2\mu_H y_T}{\sigma_H^2}\right)\cdot N\left(\frac{y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)\mathrm{d}y_T=$$
$$\frac{2\mu_H}{\sigma_H^2}\cdot\frac{\sigma_H^2\phi(t)}{\sigma_H^2+2\mu_H}\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}N\left(\frac{y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)\mathrm{d}\left[\exp\left(\frac{(\sigma_H^2+2\mu_H)y_T}{\sigma_H^2}\right)\right]=\frac{2\mu_H\phi(t)}{\sigma_H^2+2\mu_H}\cdot$$
$$\left\{\left[\exp\left(\frac{(\sigma_H^2+2\mu_H)y_T}{\sigma_H^2}\right)\cdot N\left(\frac{y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)\right]\Bigg|_{\infty}^{\ln m_{T_0}^t}-\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\exp\left(\frac{(\sigma_H^2+2\mu_H)y_T}{\sigma_H^2}\right)\mathrm{d}N\left(\frac{y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)\right\}=$$
$$\frac{2\mu_H\phi(t)}{\sigma_H^2+2\mu_H}\cdot\left\{\exp\left(\frac{(\sigma_H^2+2\mu_H)\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}{\sigma_H^2}\right)\cdot N\left(\frac{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)-\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\exp\left(\frac{(\sigma_H^2+2\mu_H)y_T}{\sigma_H^2}\right)\cdot\frac{1}{\sigma_H\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left[-\frac{\left(\frac{y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)^2}{2}\right]\mathrm{d}y_T\right\}. \tag{7}$$

计算式(7)中的各项：

$$\frac{2\mu_H\phi(t)}{\sigma_H^2+2\mu_H}=\frac{2\left(\mu_\phi-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right)\phi(t)}{\sigma_\phi^2+2\left(\mu_\phi-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right)}=\frac{(2\mu_\phi-\sigma_\phi^2)\phi(t)}{2\mu_\phi}=\left(1-\frac{\sigma_\phi^2}{2\mu_\phi}\right)\phi(t),$$

$$\exp\left(\frac{(\sigma_H^2+2\mu_H)\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}{\sigma_H^2}\right)=\exp\left[\frac{\sigma_\phi^2+2\left(\mu_\phi-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right)}{\sigma_\phi^2}\cdot\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}\right]=\exp\left[\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi^2}\cdot\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}\right]=\left(\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}\right)^{\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi^2}},$$

$$N\left(\frac{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)=N\left(\frac{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\left(\mu_\phi-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right)\tau}{\sigma_\phi\sqrt{\tau}}\right)=N\left(\frac{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}-\left(\mu_\phi+\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right)\tau}{\sigma_\phi\sqrt{\tau}}+\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi}\sqrt{\tau}\right)=$$

$$N\left(-d_1+\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi}\sqrt{\tau}\right),$$

$$\exp\left[\frac{\left(\sigma_\phi^2+2\left(\mu_\phi-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right)\right)y_T}{\sigma_\phi^2}\right]=\exp\left(\frac{2\mu_\phi y_T}{\sigma_\phi^2}\right).$$

将上述结果代入式(7),得:

$$A_2=\left(1-\frac{\sigma_\phi^2}{2\mu_\phi}\right)\phi(t)\left[\left(\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}\right)^{\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi^2}}\cdot N\left(-d_1+\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi}\sqrt{\tau}\right)-\exp(\mu_\phi\tau)N(-d_1)\right].$$

$$A_3=\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\frac{\phi(t)\exp(y_T)}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\cdot\exp\left(\frac{2\mu_H y_T}{\sigma_H^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)^2\right]\mathrm{d}y_T=$$

$$\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\frac{\phi(t)\exp(y_T)}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{2\mu_H y_T}{\sigma_H^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)^2\right]\mathrm{d}y_T=$$

$$\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}}\frac{\phi(t)\exp(y_T)}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\cdot n\left(\frac{-y_T+\mu_H\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}\right)\mathrm{d}y_T=\phi(t)\exp(\mu_\phi\tau)N(-d_1)=A_1.$$

综上可得

$$E[\min(m_{T_0}^t,m_t^T)]=m_{T_0}^t\left[N\left(\frac{-\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\left(\mu_\phi-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right)\tau}{\sigma_\phi\sqrt{\tau}}\right)-\left(\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}\right)^{\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi^2}-1}N\left(\frac{\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\left(\mu_\phi-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right)\tau}{\sigma_\phi\sqrt{\tau}}\right)\right]+$$

$$2\phi(t)\exp(\mu_\phi\tau)N(-d_1)+1-\frac{\sigma_\phi^2}{2\mu_\phi}\phi(t)\left[\left(\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}\right)^{\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi^2}}\cdot N\left(-d_1+\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi}\sqrt{\tau}\right)-\exp(\mu_\phi\tau)N(-d_1)\right].$$

整理上式得

$$E[\min(m_{T_0}^t,m_t^T)]=m_{T_0}^t\left[N(d_1-\sigma_\phi\sqrt{\tau})-\left(\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}\right)^{\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi^2}-1}\cdot N\left(-d_1-\frac{2\mu_\phi\sqrt{\tau}}{\sigma_\phi}\right)\right]+$$

$$2\phi(t)\exp(\mu_\phi\tau)N(-d_1)+\left(1-\frac{\sigma_\phi^2}{2\mu_\phi}\right)\phi(t)\left[\left(\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}\right)^{\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi^2}}\cdot N\left(-d_1+\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi}\sqrt{\tau}\right)-\exp(\mu_\phi\tau)N(-d_1)\right],$$

其中 $d_1=\dfrac{-\ln\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\left(\mu_\phi+\frac{\sigma_H^2}{2}\right)\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}$.

4.2 模型结论及展望

根据4.1中的各项结果,可以得到基于随机汇率条件下国外股票几何平均亚式回望期权的定价公式:

$$C(\phi,m_{T_0}^t,\tau)=\exp(-r\tau)E[\phi(T)-\min(m_{T_0}^t,m_t^T)]=$$

$$\exp(-r\tau)E[\phi(T)]-\exp(-r\tau)E[\min(m_{T_0}^t,m_t^T)]=\phi(t)-\exp(-r\tau)\cdot$$
$$\left\{m_{T_0}^t\left[N\left(d_1-\sigma_\phi\sqrt{\tau}\right)-\left(\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}\right)^{\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi^2}-1}\cdot N\left(-d_1-\frac{2\mu_\phi\sqrt{\tau}}{\sigma_\phi}\right)\right]+2\phi(t)\exp(\mu_\phi\tau)N(-d_1)+\right.$$
$$\left.\left(1-\frac{\sigma_\phi^2}{2\mu_\phi}\right)\phi(t)\left[\left(\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}\right)^{\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi^2}}\cdot N\left(-d_1+\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi}\sqrt{\tau}\right)-\exp(\mu_\phi\tau)N(-d_1)\right]\right\}.$$

化简上式得

$$C(\phi,m_{T_0}^t,\tau)=\phi(t)-\phi(t)\exp[(\mu_\phi-r)t]\cdot N(-d_1)-\exp(-r\tau)m_{T_0}^t\cdot N\left(d_1-\sigma_\phi\sqrt{\tau}\right)+$$
$$\exp(-r\tau)\ \frac{\sigma_\phi^2}{2\mu_\phi}\phi(t)\left[\left(\frac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}\right)^{\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi^2}}\cdot N\left(-d_1+\frac{2\mu_\phi}{\sigma_\phi}\sqrt{\tau}\right)-\exp(\mu_\phi\tau)N(-d_1)\right],$$

其中 $d_1=\dfrac{-\ln\dfrac{m_{T_0}^t}{\phi(t)}+\left(\mu_\phi+\dfrac{\sigma_H^2}{2}\right)\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}}$.

上述研究中，本文只考虑了离散的情况，这是因为在实际交易中所有亚式期权的标的变量都是采用离散的平均方式. 当 $n\to\infty$ 时，离散几何平均即成为连续几何平均，由此可求得基于随机汇率条件下国外股票连续几何平均亚式回望期权的定价公式. 在本文研究结果的基础上，还可以进一步考虑国内外无风险利率参数 r 和 r_f 是随机变量的情况. 例如：在传统经典模型的基础上，若假定利率遵从高斯利率过程，违约强度函数遵从 Poisson 随机过程，就可得到不完全市场下汇率随机时国外股票的几何平均亚式回望期权的定价公式. 本研究结果可为未来国内出现的同类期权的合理定价提供参考.

参考文献：

[1] GENTLE D. Basket weaving[J]. Risk，1993，6(6)：51-52.

[2] 左玲，李时银，丁海燕. 跳跃扩散型离散算术平均资产浮动执行价的回望买权定价[J]. 厦门大学学报(自然科学版)，2014，53(6)：774-779.

[3] FUH C D，LUO S F，YEN J F. Pricing discrete path-dependent options under a double exponential jump-diffusion model[J]. Journal of Banking & Finance，2013，37(8)：2702-2713.

[4] 黄东南，周圣武. 基于跳扩散过程的回望期权定价的数值算法[J]. 大学数学，2019，35(1)：14-19.

[5] KIM K I，PARK H S，QIAN X S. A mathematical modeling for the lookback option with jump-diffusion using binomial tree method[J]. Journal of Computational & Applied Mathematics，2011，235(17)：5140-5154.

[6] 吴永红，李琼，金勇. 随机利率下的外汇欧式期权定价[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版)，2011，35(5)：1020-1022.

[7] 潘素娟，陈逢明，李时银. 基于汇率和违约双重风险下的外国股票亚式交换期权的定价公式[J]. 延边大学学报(自然科学版)，2017，43(3)：198-204.

[8] 郭峰，李时银. 与汇率相关的几何平均亚式交换期权定价公式[J]. 福州大学学报(自然科学版)，2007(5)：685-688.

[9] 陈松男. 金融工程学[M]. 上海：复旦大学出版社，2002：51-62.

[10] MERTON R C. On the pricing of corporate debt：the risk structure of interest rates[J]. Journal of Finance，1974，29(2)：449-470.

[11] HULL J. Options，Futures，and Other Derivatives with Derivagem CD[M]. 7th Edition. India：Pearson Education，2010：240-253.

[12] MUSIELA M，RUTKOWSKI M. Martingale Methods in Financial Modeling[M]. New York：Springer，2005：137-142.

[13] AMMANN M. Credit Risk Valuation：Methods，Models，and Applications[M]. New York：Springer，2001：112-127.

[14] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2008：210-218.

[15] 金治明. 数学金融学基础[M]. 北京：科学出版社，2006：193-198.