文章编号: 1004-4353(2019)04-0299-04

一类次临界增长非局部问题的无穷多解

吴燕林, 钱晓涛
(阳光学院 基础教研部, 福建 福州 350015)

摘要: 在有界域上研究一类次临界增长的非局部问题. 应用对称山路定理, 在更一般的条件下证明了所考虑的问题有无穷多个解. 该结果拓展了文献[1]的研究结果.

关键词: 非局部问题; 非平凡解; 无穷多解; 变分方法
中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A

Infinitely many solutions for a class of nonlocal problem with subcritical growth

WU Yanlin, QIAN Xiaotao
(*Department of Basic Teaching and Research*, *Yango University*, *Fuzhou* 350015, *China*)

Abstract: We study a class of nonlocal problem with subcritical growth in a bounded domain. Under the more general condition, we prove the existence of infinitely many solutions for the considered problem by using the symmetric mountain pass theorem. Our result can be viewed as an extension of literature [1] concerning the existence of solutions.

Keywords: nonlocal problem; nontrivial solution; infinitely many solutions; variational method

本文考虑如下非局部边界值问题:

$$\begin{cases} -\left(a-b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x,u),\ x\in\Omega; \\ u=0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a,b>0$, Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的一个有光滑边界的有界区域, $N\geqslant 3$.

由于问题(1) 中的非局部项 $-b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x$ 使方程不再是一个逐点意义下的等式,因此该问题引起了许多学者的关注. 例如:当 $f(x,u)=|u|^{p-2}u$, $2<p<2^*$, $2^*=2N/(N-2)$ 时,文献[1] 研究了问题(1) 非平凡解的存在性. 文献[2-3] 分别研究了问题(1) 带次线性项和奇异项的情形,并证得问题(1) 至少存在两个正解. 文献[4] 考虑问题(1) 的共振问题,证明了问题(1) 至少存在一个非平凡解. 文献[5-6] 在全空间上对问题(1) 进行研究,获得了问题(1) 非平凡解的存在性. 受以上文献启发,本文在更一般情形下应用对称山路定理考虑问题(1) 无穷多解的存在性.

1 预备知识

首先,给出一些记号: $H_0^1(\Omega)$ 和 $L^s(\Omega)$ $(2\leqslant s\leqslant 2^*)$ 均为标准的 Sobolev 空间,范数分别为 $\|\cdot\|^2=$

收稿日期: 2019 − 10 − 25 **基金项目:** 福建省中青年教师教育厅科技类项目(JAT170772)
作者简介: 吴燕林(1984—),女,副教授,研究方向为非线性分析及其应用.

$\int_{\Omega}|\nabla\cdot|^2\mathrm{d}x$ 和 $\|\cdot\|_s^s=\int_{\Omega}|\cdot|^s\mathrm{d}x$，$\rightharpoonup$ 和 $\to$ 分别表示弱收敛和强收敛，c 和 C_i 表示正常数. 当无特别指出时，收敛默认为是在 $n\to\infty$ 情况下. 本文假设非线性项 $f(x,u)=f(u)$ 满足：

(f_1) $f\in C(\mathbf{R})$ 且 $|f(t)|\leqslant c(1+|t|^{p-1})$，其中 $2<p<2^*$；

(f_2) $\lim\limits_{|t|\to 0}\dfrac{f(t)}{|t|}=l\geqslant 0$；

(f_3) $\forall t\in\mathbf{R}$，有 $0<2F(t)\leqslant f(t)t$，其中 $F(t)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$；

(f_4) $f(-t)=-f(t)$，$\forall t\in\mathbf{R}$.

令 $\phi(u)=\int_{\Omega}F(u)\mathrm{d}x$，则有引理 1.

引理 1 当 f 满足(f_1)和(f_2)，则 $\phi(u)\in C^1(H_0^1,\mathbf{R})$ 且 $\langle\phi'(u),v\rangle=\int_{\Omega}f(u)v\,\mathrm{d}x$，$\forall u,v\in H_0^1(\Omega)$.

证明 先证 $\phi(u)$ 的 Gateaux 导数存在. 由条件(f_2)可知：$\forall\varepsilon>0$，存在充分小的 $d=d(\varepsilon)>0$，使 $|f(t)|\leqslant(l+\varepsilon)|t|$，当 $|t|\leqslant d$. 由条件(f_1)可知：存在充分大的 $M>0$，使 $|f(t)|\leqslant C_1|t|^{p-1}$，当 $|t|\geqslant M$. 再根据条件(f_1)中的连续性可知：存在正数 $K>0$，使得 $|f(t)|\leqslant K\leqslant K\left|\dfrac{t}{d}\right|^{p-1}=\dfrac{K}{d^{p-1}}|t|^{p-1}=c(\varepsilon)|t|^{p-1}$，当 $d\leqslant|t|\leqslant M$. 综上可得

$$|f(t)|\leqslant(l+\varepsilon)|t|+c(\varepsilon)|t|^{p-1},\ \forall t\in\mathbf{R}.\tag{2}$$

由式(2)可得

$$|F(t)|\leqslant\frac{(l+\varepsilon)}{2}|t|^2+\frac{c(\varepsilon)}{p}|t|^p.\tag{3}$$

因 $\forall u,v\in H_0^1(\Omega)$，$0<|t|<1$，再根据中值定理和式(2)可知，存在 $0<\theta<1$，使得

$$\frac{|F(u+tv)-F(u)|}{|t|}=|f(u+t\theta v)v|\leqslant(l+\varepsilon)|u+t\theta v||v|+c(\varepsilon)|u+t\theta v|^{p-1}|v|.$$

对上面的不等式应用 Hölder 不等式，可得 $(l+\varepsilon)|u+t\theta v||v|+c(\varepsilon)|u+t\theta v|^{p-1}|v|\in L^1(\Omega)$. 进而由 Lebesgue 控制收敛定理有 $\langle\phi'(u),v\rangle=\int_{\Omega}f(u)v\,\mathrm{d}x$.

再证 $\phi'(u):H_0^1(\Omega)\to(H_0^1(\Omega))^{-1}$ 是连续的. 假设 $u_n\rightharpoonup u$ 于 $H_0^1(\Omega)$. 由Sobolev 嵌入定理知 $u_n\to u$ 于 $L^s(\Omega)$，$2\leqslant s<2^*$. 在空间 $L^2(\Omega)\cap L^p(\Omega)$ 中，定义范数

$$\|u\|_{2\wedge p}=\|u\|_2+\|u\|_p.$$

在空间 $L^2(\Omega)+L^p(\Omega)$ 中，定义范数

$$\|u\|_{2\vee p}=\inf\{\|v\|_2+\|w\|_p:v\in L^2(\Omega),w\in L^p(\Omega),u=v+w\}.$$

类似文献[7]的证明，有 $f(u_n)\to f(u)$ 于 $L^2(\Omega)+L^p(\Omega)$. 对 $|\langle\phi'(u_n)-\phi'(u),v\rangle|$ 应用 Hölder 不等式，可得 $|\langle\phi'(u_n)-\phi'(u),v\rangle|\leqslant\|f(u_n)-f(u)\|_{2\vee p}\|v\|_{2\wedge p}\leqslant C\|f(u_n)-f(u)\|_{2\vee p}\|v\|$. 所以

$$\|\phi'(u_n)-\phi'(u)\|\leqslant C\|f(u_n)-f(u)\|_{2\vee p}\to 0,$$

即 $\phi'(u):H_0^1(\Omega)\to(H_0^1(\Omega))^{-1}$ 连续.

本文使用如下形式的对称山路定理(引理 2)[8] 证明本文的主要结果.

引理 2 设 $E=V\oplus W$ 是一个实 Banach 空间，且 $\dim V<\infty$. I 至少有 $\dim\tilde{V}-\dim V$ 对非平凡临界点，若 $I\in C^1(E,\mathbf{R})$ 是偶泛函且满足 $I(0)=0$ 及以下条件：

(I_1) 存在常数 $\rho,\alpha>0$，使得 $I|_{B_\rho(0)\cap W}\geqslant\alpha>0$；

(I_2) 存在一个 E 的子空间 $\tilde{V}$，使得 $\dim V<\dim\tilde{V}<\infty$ 且 $\max\limits_{u\in\tilde{V}}I(u)\leqslant c_*$，其中 c_* 是某个正常数；

(I_3) I 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件，其中 $0<c<c_*$.

2　主要结果及其证明

显然问题(1)所对应的泛函为：

$$I(u)=\frac{a}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{b}{4}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x.$$

称函数 $u\in H_0^1(\Omega)$ 是问题(1)的解，是指

$$\langle I'(u),v\rangle=(a-b\|u\|^2)\int_\Omega\nabla u\,\nabla v\,\mathrm{d}x-\int_\Omega f(u)v\,\mathrm{d}x=0,\forall v\in H_0^1(\Omega).$$

由 $H_0^1(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的紧嵌入和紧算子谱理论可知，线性问题 $-\Delta u=\lambda u$ 和 $u\in H_0^1(\Omega)$ 有一列正的特征值 $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$，且 $\lambda_n\to+\infty$. 记 φ_n 为相应的标准化特征函数，则有下面的不等式成立：

$$\lambda_{j+1}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x,\forall u\in\mathrm{span}\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_j\}^\perp.\tag{4}$$

定理 1　若条件(f_1)－(f_4)成立，则 $\forall k\in\mathbf{N}$，问题(1)存在 k 对非平凡解.

证明　由引理 1 和条件(f_4)可知，显然 I 是偶泛函，且 $I(0)=0$. 再根据引理 2 可知，只需验证泛函 I 满足条件(f_1)－(f_3)即可. 以下分 3 步来证明.

第 1 步　因为 $\lambda_n\to+\infty$，故存在 $j\in\mathbf{N}$ 使得 $l<a\lambda_{j+1}$. 令 $V=\mathrm{span}\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_j\}$，$W=V^\perp$，则 $H_0^1(\Omega)=V\oplus W$. 取足够小的 $\varepsilon>0$，使得 $0<l+\varepsilon<a\lambda_{j+1}$. 由 Sobolev 定理可知，存在 $C>0$ 使得 $\|u\|_p^p\leqslant C\|u\|^p$. 由式(4)有 $\lambda_{j+1}\|u\|_2^2<\|u\|^2$，$\forall u\in W$. 再根据式(3)可得：$\forall u\in W$，有

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{l+\varepsilon}{2}\|u\|_2^2-c(\varepsilon)\|u\|_p^p\geqslant$$

$$\frac{a}{2}\left(1-\frac{l+\varepsilon}{a\lambda_{j+1}}\right)\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-c_1(\varepsilon)\|u\|^p\geqslant\|u\|^2\left[\frac{a}{2}\left(1-\frac{l+\varepsilon}{a\lambda_{j+1}}\right)-\frac{b}{4}\|u\|^2-c_1(\varepsilon)\|u\|^{p-2}\right].$$

因 $l+\varepsilon<a\lambda_{j+1}$，所以 $\frac{a}{2}\left(1-\frac{l+\varepsilon}{a\lambda_{j+1}}\right)>0$. 再由 $2<p<2^*$ 可知，存在足够小的常数 $\rho,\alpha>0$，使得 $I|_{B_\rho(0)\cap W}\geqslant\alpha>0$，因此 I 满足条件(I_1).

第 2 步　对于任意给定的 $k\in\mathbf{N}$，令 $m=k+\dim V$. 考虑一列支集两两互不相容的光滑函数 $\{\psi_i\}_i^m\subset C_0^\infty(\Omega)$，并定义 $\tilde{V}=\mathrm{span}\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m\}$，则 $\dim\tilde{V}=m$ 且 $\dim\tilde{V}-\dim V=k$. 由(f_3)可知：$\forall u\in H_0^1(\Omega)$，$u\neq0$，有 $I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x<\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4\leqslant\frac{a^2}{4b}$. 再由 $\tilde{V}\subset H_0^1(\Omega)$ 可知，$\max\limits_{u\in\tilde{V}}I(u)\leqslant\max\limits_{u\in H_0^1(\Omega)}I(u)<\frac{a^2}{4b}$. 令 $c_*=\frac{a^2}{4b}$，则 I 满足条件(I_2).

第 3 步　设 $\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ 满足 $I(u_n)\to c$ 且 $I'(u_n)\to0$. 下证泛函 I 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件，其中 $0<c<c_*$. 为此需要证明当 $c<\frac{a^2}{4b}$ 时，$\{u_n\}$ 必存在强收敛子列即可. 假定 $c<\frac{a^2}{4b}$，由(f_3)有

$$2I(u_n)-\langle I'(u_n),u_n\rangle=\frac{b}{2}\|u_n\|^4-\int_\Omega[f(u_n)u_n-2F(u_n)]\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{b}{2}\|u_n\|^4,$$

所以 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 因此在子列的意义下，可以假设存在 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得 $u_n\rightharpoonup u$ 于 $H_0^1(\Omega)$；$u_n\to u$ 于 $L^s(\Omega)$，$2\leqslant s<2^*$；$u_n\to u$ a. e. 于 Ω. 由式(2)有

$$\left|\int_\Omega[f(u_n)-f(u)](u_n-u)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_\Omega[|f(u_n)|+|f(u)|]\,|u_n-u|\,\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_\Omega[(l+\varepsilon)(|u_n|+|u|)+c(\varepsilon)(|u_n|^{p-1}+|u|^{p-1})]\,|u_n-u|\,\mathrm{d}x\leqslant$$

$$(l+\varepsilon)\left[\int_\Omega|u_n|\,|u_n-u|\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|u|\,|u_n-u|\,\mathrm{d}x\right]+$$

$$c(\varepsilon)\left[\int_\Omega|u_n|^{p-1}|u_n-u|\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|u|^{p-1}|u_n-u|\,\mathrm{d}x\right]\leqslant$$

$$(l+\varepsilon)[\|u_n\|_2\|u_n-u\|_2+\|u\|_2\|u_n-u\|_2]+c(\varepsilon)[\|u_n\|_p^{p-1}\|u_n-u\|_p+\|u\|_p^{p-1}\|u_n-u\|_p]\leqslant$$
$$(l+\varepsilon)[\|u_n\|_2+\|u\|_2]\|u_n-u\|_2+c(\varepsilon)[\|u_n\|_p^{p-1}+\|u\|_p^{p-1}]\|u_n-u\|_p\leqslant$$
$$C_1\|u_n-u\|_2+C_2\|u_n-u\|_p,$$

其中倒数第 3 个不等式使用了 Hölder 不等式,最后 1 个不等式使用了$\{u_n\}$在$H_0^1(\Omega)$中的有界性.由此有$\int_\Omega[f(u_n)-f(u)](u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$.又因为

$$o(1)=\langle I'(u_n),u_n\rangle=(a-b\|u_n\|^2)\|u_n-u\|^2-\int_\Omega[f(u_n)-f(u)](u_n-u)\mathrm{d}x,$$

所以

$$(a-b\|u_n\|^2)\|u_n-u\|^2\to 0. \tag{5}$$

以下使用反证法来证明$(a-b\|u_n\|^2)\to 0$不成立.假设$(a-b\|u_n\|^2)\to 0$,由$\langle I'(u_n),v\rangle\to 0$和$\langle I'(u_n),v\rangle=(a-b\|u_n\|^2)\langle u_n,v\rangle-\langle\phi'(u_n),v\rangle$可知,$\phi'(u_n)\to 0$.类似引理 1 的证明,有

$$\sup_{\|v\|\leqslant 1}\int_\Omega|f(u_n)-f(u)||v|\mathrm{d}x\to 0,$$

所以

$$\|\phi'(u_n)-\phi'(u)\|=\sup_{\|v\|\leqslant 1}\left|\int_\Omega[f(u_n)-f(u)]v\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\sup_{\|v\|\leqslant 1}\int_\Omega|f(u_n)-f(u)||v|\mathrm{d}x\to 0.$$

综上可得$\phi'(u)=0$,进而有$\langle\phi'(u),v\rangle=\int_\Omega f(u)v\,\mathrm{d}x=0$,$\forall v\in H_0^1(\Omega)$.由变分方法的基本引理[9]可知$u=0$.根据式(3)有$\phi(u_n)=\int_\Omega F(u_n)\mathrm{d}x\to\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x=0$.再由$(a-b\|u_n\|^2)\to 0$知,$\|u_n\|^2\to\dfrac{a}{b}$,所以$I(u_n)=\dfrac{a}{2}\|u_n\|^2-\dfrac{b}{4}\|u_n\|^4-\int_\Omega F(u_n)\mathrm{d}x\to\dfrac{a^2}{4b}$.这与$I(u_n)\to c<\dfrac{a^2}{4b}$矛盾,因此$(a-b\|u_n\|^2)\to 0$不成立.于是由式(5)知$u_n\to u$于$H_0^1(\Omega)$,即$I$满足条件$(\mathrm{I}_3)$.

综合以上 3 步知,对泛函I可以使用引理 2,由此得问题(1)至少存在k对非平凡解.再由k的任意性可知,问题(1)有无穷多个解.

注 1 文献[1]的非线性项显然满足本文的条件(f_1)—(f_4),但本文得到的是无穷多个解,因此本文的结果拓展了文献[1]的研究结果.

参考文献:

[1] YIN G, LIU J. Existence and multiplicity of nontrivial solutions for a nonlocal problem[J]. Boundary Value Problems, 2015,2015(26):1-7.

[2] LEI C Y, LIAO J F, SUO H M. Multiple positive solutions for nonlocal problems involving a sign-changing potential[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2017,2017(9):1-8.

[3] LEI C Y, CHU C M, SUO H M. Positive solutions for a nonlocal problem with singularity[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2017,2017(85):1-9.

[4] ZHANG J, ZHANG Z Y. Existence of nontrivial solution for a nonlocal problem with subcritical nonlinearity[J]. Advances in Difference Equations, 2018,2018(359):1-8.

[5] WANG Y, SUO H M, LEI C Y. Multiple positive solutions for a nonlocal problem involving critical exponent[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2017,2017(275):1-11.

[6] 钱晓涛,石志高.一类 Kirchhoff 型方程解的存在性和多重性[J].延边大学学报(自然科学版),2018,44(4):302-305.

[7] WILLEM M. Minimax Theorems[M]. Birkhäuser Boston, 1996:133-134.

[8] FURTADO M, SILVA J, XAVIER M. Multiplicity of self-similar solutions for a critical equation[J]. Journal of Differential Equations, 2013,254(7):2732-2743.

[9] 陆文端.微分方程中的变分方法[M].北京:科学出版社,2003:8-9.