文章编号：1004-4353(2019)04-0283-09

具有 p-Laplacian 算子的 delta-nabla 分数阶差分边值问题正解的存在性

董强，　侯成敏*
(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要：考虑具有 p-Laplacian 算子的 delta-nabla 分数阶差分方程边值问题：

$$\begin{cases}\Delta_{\alpha-2}^{\beta}(\phi_p({}_b\nabla^{\alpha}x(t)))+\lambda f(t-\alpha+\beta+1,x(t-\alpha+\beta+1),[{}_b\nabla^{\varepsilon}x(t)]_{t-\alpha+\beta+\varepsilon+1})=0,\ t\in T;\\ x(b)=0,\ {}_{b-1}\nabla^{\alpha-1}x(\alpha-2)=[{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\omega}g(t,x(t))]_{t=\alpha-\omega-1};\\ [{}_b\nabla^{\alpha}x(t)]_{\alpha-2}=0,\ [{}_b\nabla^{\alpha}x(t)]_{\alpha+b-2}=0.\end{cases}$$

其中 $b\in\mathbf{Z}^+$，$T=[\alpha-\beta-1,b+\alpha-\beta-1]_{\mathrm{N}_{\alpha-\beta-1}}$，$1\leqslant\alpha,\beta\leqslant 2$，$3<\alpha+\beta\leqslant 4$，$0<\omega<1$，$\lambda\in(0,+\infty)$，$\Delta_{\alpha-2}^{\beta}$ 和 ${}_b\nabla^{\alpha}$ 分别是左右分数阶差分算子，并且 $\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$，$p>1$. 利用上下解方法和 Schauder 不动点定理，得到了上述边值问题正解的存在性.

关键词：delta-nabla 分数阶差分；边值问题；上解和下解；Schauder 不动点定理；p-Laplacian 算子
中图分类号：O175.8　　　　**文献标志码**：A

Existence of positive solutions for p-Laplacian fractional difference involving the discrete delta-nabla fractional boundary value problem

DONG Qiang，　HOU Chengmin*
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: Consider the boundary value problem of delta-nabla fractional difference equations with p-Laplacian operator:

$$\begin{cases}\Delta_{\alpha-2}^{\beta}(\phi_p({}_b\nabla^{\alpha}x(t)))+\lambda f(t-\alpha+\beta+1,x(t-\alpha+\beta+1),[{}_b\nabla^{\varepsilon}x(t)]_{t-\alpha+\beta+\varepsilon+1})=0,\ t\in T;\\ x(b)=0,\ {}_{b-1}\nabla^{\alpha-1}x(\alpha-2)=[{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\omega}g(t,x(t))]_{t=\alpha-\omega-1};\\ [{}_b\nabla^{\alpha}x(t)]_{\alpha-2}=0,\ [{}_b\nabla^{\alpha}x(t)]_{\alpha+b-2}=0.\end{cases}$$

Where $b\in\mathbf{Z}^+$, $T=[\alpha-\beta-1,b+\alpha-\beta-1]_{\mathrm{N}_{\alpha-\beta-1}}$, $1\leqslant\alpha,\beta\leqslant 2$, $3<\alpha+\beta\leqslant 4$, $0<\omega<1$, $\lambda\in(0,+\infty)$, $\Delta_{\alpha-2}^{\beta}$, ${}_b\nabla^{\alpha}$ are left and right fractional difference operator, and $\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$, $p>1$. By using the upper and lower solution method and the Schauder fixed point theorem, the existence of the positive solution of the above boundary value problem is obtained.

Keywords: delta-nabla fractional difference; boundary value problem; upper solution and lower solution; Schauder fixed point theorem; p-Laplacian operator

0　引言

近年来分数阶差分系统受到很多学者的关注，其相关研究成果已逐步被应用在电气工程、化学和生物医学等领域中[1-4]. 在分数阶差分方程的相关研究中，其初值、边值问题解的存在性、唯一性和多重性等成

收稿日期：2019－09－21
* 通信作者：侯成敏(1963—)，女，教授，研究方向为微分方程理论及其应用.

为广大学者的研究热点[5-7]. 2017 年 Liu 等[8]研究了如下带 p-Laplacian 算子的 delta-nabla 分数阶差分边值问题:

$$\begin{cases}\Delta_{v-2}^{\beta}(\phi_p({}_{b+\varepsilon-1}\nabla^{v-\varepsilon}y(t)))=-\lambda f(t',{}_{b+\varepsilon-1}\nabla^{-\varepsilon}y(t'),y(t'+\varepsilon));\\ y(b+\varepsilon)=0,\ [{}_{b+\varepsilon-1}\nabla^{v-\varepsilon}y(t)]_{v-2}=0;\\ [{}_{b+\varepsilon-1}\nabla^{-\varepsilon}y(t)]_{-1}=\sum\limits_{t=0}^{b-1}{}_{b+\varepsilon-1}\nabla^{-\varepsilon}y(t)A(t).\end{cases}$$

本文受文献[8]的启发,考虑在非齐次边界值条件下带有 p-Laplacian 算子的离散分数阶 delta-nabla 边值问题:

$$\begin{cases}\Delta_{\alpha-2}^{\beta}(\phi_p({}_b\nabla^{\alpha}x(t)))+\lambda f(t-\alpha+\beta+1,x(t-\alpha+\beta+1),[{}_b\nabla^{\varepsilon}x(t)]_{t-\alpha+\beta+\varepsilon+1})=0,\ t\in T;\\ x(b)=0,\ {}_{b-1}\nabla^{\alpha-1}x(\alpha-2)=[{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\omega}g(t,x(t))]_{t=\alpha-\omega-1};\\ [{}_b\nabla^{\alpha}x(t)]_{\alpha-2}=0,\ [{}_b\nabla^{\alpha}x(t)]_{\alpha+b-2}=0.\end{cases}\tag{1}$$

其中 $b\in\mathbf{Z}^+$, $T=[\alpha-\beta-1,b+\alpha-\beta-1]_{\mathrm{N}_{\alpha-\beta-1}}$, $1\leqslant\alpha,\beta\leqslant 2$, $3<\alpha+\beta\leqslant 4$, $0<\omega<1$, $\lambda\in(0,+\infty)$, $\Delta_{\alpha-2}^{\beta}$ 和 ${}_b\nabla^{\alpha}$ 分别是左右分数阶差分算子, $\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$, $p>1$, $\phi_p=\phi_q^{-1}$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 方程(1) 满足下列条件:

(H_1) $\alpha,\beta\in(1,2]$, $3<\alpha+\beta\leqslant 4$, $\omega\in(0,1)$, $\alpha-\varepsilon-1>0$.

(H_2) $g(t,x)$ 是定义在 $[0,b]_{\mathrm{N}_0}\times(0,+\infty)$ 上的非负函数,且 $0\leqslant g(t,x)\leqslant k(|x|)^l$, $l,k\in(0,+\infty)$.

(H_3) $f:[0,b]_{\mathrm{N}_0}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to[0,\infty)$ 是连续函数,对任何 $t\in[0,b]_{\mathrm{N}_0}$, $f(t,0,0)\neq 0$, $f(t,1,1)\neq 0$,并令

$$\sigma=\max_{t\in[0,b]_{\mathrm{N}_0}}f(t,1,1)\neq 0.\tag{2}$$

1 预备知识

对任意的实数 β, 令 $\mathrm{N}_\beta=\{\beta,\beta+1,\beta+2,\cdots\}$, ${}_\beta\mathrm{N}=\{\cdots,\beta-2,\beta-1,\beta\}$. 对任意的 $t,v\in\mathbf{R}$, 当 $t+1-v$ 不是 Γ-函数的一个极点时,定义 $t^{\underline{v}}=\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-v+1)}$; 当 $t+1$ 是极点时, $t^{\underline{v}}=0$.

定义 1[8]3 设 $f:\mathrm{N}_a\to\mathbf{R}$, 且 $v>0$ 时,函数 f 的左分数阶和的定义为:

$$\Delta_a^{-v}f(t)=\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{t-v}(t-s-1)^{\underline{v-1}}f(s),\ t\in\mathrm{N}_{a+v}.$$

定义 2[9]2 设 $f:{}_b\mathrm{N}\to\mathbf{R}$, 且 $v>0$ 时,函数 f 的右分数阶和的定义为:

$${}_b\nabla^{-v}f(t)=\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=t+v}^{b}(s-t-1)^{\underline{v-1}}f(s),\ t\in{}_{b-v}\mathrm{N}.$$

引理 1[9]3 设 $b\in\mathbf{R}$, 当 $\mu>0$ 时,对于变量 t 有 $\nabla(b-t)^{\underline{\mu}}=-\mu(b-t)^{\underline{\mu-1}}$. 此外,对 $v>0$, $N-1<v\leqslant N$, $N\in\mathbf{N}$, 有: ${}_{b-\mu}\nabla^{-v}(b-t)^{\underline{\mu}}=\mu^{\underline{-v}}(b-t)^{\underline{\mu+v}}$, $t\in{}_{b-\mu-v}\mathrm{N}$; ${}_{b-\mu}\nabla^{v}(b-t)^{\underline{\mu}}=\mu^{\underline{v}}(b-t)^{\underline{\mu-v}}$, $t\in{}_{b-\mu-N+v}\mathrm{N}$.

引理 2[8]4 设 $f:\mathrm{N}_a\to\mathbf{R}$, 当 $v,\mu>0$ 且 $N-1<v\leqslant N$ 时,有

$$\Delta_{a+\mu}^{v}\Delta_a^{-\mu}f(t)=\Delta_a^{v-\mu}f(t),\ t\in\mathrm{N}_{a+\mu+N-v}.$$

引理 3[8]4 设 $f:{}_b\mathrm{N}\to\mathbf{R}$, 当 $v,\mu>0$ 且 $N-1<v\leqslant N$ 时,有

$${}_{b-\mu}\nabla^{v}{}_b\nabla^{-\mu}f(t)={}_b\nabla^{v-\mu}f(t),\ t\in{}_{b-\mu-N+v}\mathrm{N}.$$

引理 4[8]4 设 $f:\mathrm{N}_a\to\mathbf{R}$, 当 $v>0$ 且 $N-1<v\leqslant N$ 时,以下两个关于函数 f 的左分数阶差分 $\Delta_a^v f:\mathrm{N}_{a+N-v}\to\mathbf{R}$ 的定义是等价的:

(i) $\Delta_a^v f(t)=\Delta^N\Delta_a^{-(N-v)}f(t)$.

(ii) $$\Delta_a^v f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-v)}\sum\limits_{s=a}^{t+v}(t-s-1)^{\underline{-v-1}}f(s),\ N-1<v\leqslant N;\\ \Delta^N f(t),\ v=N.\end{cases}$$

引理 5[9]3　设 $f: {}_b\mathbb{N} \to \mathbf{R}$，当 $v>0$，且 $N-1<v\leqslant N$ 时，下面两个关于函数 f 的右分数阶差分 ${}_b\nabla^v f: {}_{b-N+v}\mathbb{N} \to \mathbf{R}$ 的定义是等价的：

(i) ${}_b\nabla^v f(t)=(-1)^N\nabla^N {}_b\nabla^{-(N-v)}f(t)$.

(ii) $${}_b\nabla^v f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-v)}\displaystyle\sum_{s=t-v}^{b}(s-t-1)^{\underline{-v-1}}f(s),\ N-1<v\leqslant N;\\(-1)^N\nabla^N f(t),\ v=N.\end{cases}$$

引理 6[8]4　设 $f:\mathbb{N}_a\to\mathbf{R}$，当 $v>0$，$k\in\mathbb{N}_0$ 时，对任意的 $t\in\mathbb{N}_{a+M-\mu+v}$ 有

$$\Delta_a^{-v}\Delta^k f(t)=\Delta_a^{k-v}f(t)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Delta^j f(a)}{\Gamma(v-k+j+1)}(t-a)^{\underline{v-k+j}}.$$

此外，若 $\mu>0$，且 $M-1<\mu\leqslant M$，则对任意的 $t\in\mathbb{N}_{a+v}$ 有

$$\Delta_{a+M-\mu}^{-v}\Delta_a^{\mu}f(t)=\Delta_a^{\mu-v}f(t)-\sum_{j=0}^{M-1}\frac{\Delta_a^{j-M+\mu}f(v+M-\mu)}{\Gamma(v-M+j+1)}(t-a-M+\mu)^{\underline{v-M+j}}.$$

引理 7[8]4　设 $f: {}_b\mathbb{N}\to\mathbf{R}$，当 $v>0$，$k\in\mathbb{N}_0$ 时，对任意的 $t\in {}_{b-v}\mathbb{N}$ 有

$${}_b\nabla^{-v}{}_b\nabla^k f(t)={}_b\nabla^{k-v}f(t)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{{}_b\nabla^j f(b)}{\Gamma(v-k+j+1)}(b-t)^{\underline{v-k+j}}.$$

此外，若 $\mu>0$，且 $M-1<\mu\leqslant M$，则对任意的 $t\in {}_{b-M+\mu-v}\mathbb{N}$ 有

$${}_{b-M+\mu}\nabla^{-v}{}_b\nabla^{\mu}f(t)={}_b\nabla^{\mu-v}f(t)-\sum_{j=0}^{M-1}\frac{{}_b\nabla^{j-M+\mu}f(b-M+\mu)}{\Gamma(v-M+j+1)}(b-M+\mu-t)^{\underline{v-M+j}}.$$

定理 1　设 $h:[0,b]_{\mathbb{N}_0}\to\mathbf{R}$，则 nabla 边值问题

$$\begin{cases}{}_b\nabla^{\alpha}x(t)+h(t-\alpha+1)=0,\ t\in[\alpha-1,b+\alpha-1]_{\mathbb{N}_{\alpha-1}};\\x(b)=0,\ {}_{b-1}\nabla^{\alpha-1}x(\alpha-2)=[{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\omega}g(t,x(t))]_{t=\alpha-\omega-1}\end{cases}\tag{3}$$

有唯一解 $x(t)=\displaystyle\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}G(t,s)h(s-\alpha+1)+J(t)$. 其中：

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-1}}-(s-t-1)^{\underline{\alpha-1}},\ \alpha-1\leqslant t+\alpha-1<s\leqslant b+\alpha-2,\\(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-1}},\ \alpha-1\leqslant s\leqslant t+\alpha-1\leqslant b+\alpha-2;\end{cases}$$

$$J(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\omega)}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}g(s,x(s))(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-1}}.$$

证明　由引理 7 有 $x(t)=-{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\alpha}h(t-\alpha+1)+k_1(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-1}}+k_2(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-2}}$，由 $x(b)=0$ 知 $k_2=0$. 又由

$${}_{b-1}\nabla^{\alpha-1}x(t)=-{}_{b-1}\nabla^{\alpha-1}{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\alpha}h(t-\alpha+1)+k_1\,{}_{b-1}\nabla^{\alpha-1}(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-1}}=$$
$$-{}_{b-2}\nabla^{\alpha-1}{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\alpha}h(t-\alpha+1)+k_1\,{}_{b-1}\nabla^{\alpha-1}(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-1}}=-\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}h(s-\alpha+1)+k_1\Gamma(\alpha)$$

及 ${}_{b-1}\nabla^{\alpha-1}x(\alpha-2)=\dfrac{1}{\Gamma(\omega)}\displaystyle\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}g(s,x(s))$，可得

$$k_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\omega)}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}g(s,x(s))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}h(s-\alpha+1),$$

所以

$$x(t)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=t+\alpha}^{b+\alpha-2}(s-t-1)^{\underline{\alpha-1}}h(s-\alpha+1)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}h(s-\alpha+1)(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-1}}+$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\omega)}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}g(s,x(s))(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-1}}=\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}G(t,s)h(s-\alpha+1)+J(t).$$

定理 2　设 $L:[0,b]_{\mathbb{N}_0}\to\mathbf{R}$，则边值问题

$$\begin{cases}\Delta_{\alpha-2}^{\beta}(\phi_p(u(s)))+\lambda L(s-\alpha+1)=0,\\ u(\alpha-2)=0,\ u(b+\alpha-2)=0\end{cases}\tag{4}$$

有唯一解 $u(s)=-\phi_q[A(s,\tau)\lambda L(\tau-\alpha+1)]$. 其中

$$A(s,\tau)=\frac{(s-\alpha+\beta)^{\underline{\beta-1}}}{\Gamma(\beta)(b+\beta-2)^{\underline{\beta-1}}}\sum_{\tau=\alpha-\beta}^{b+\alpha-\beta-2}(b+\alpha-\tau-3)^{\underline{\beta-1}}-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{\tau=\alpha-\beta}^{s-\beta}(s-\tau-1)^{\underline{\beta-1}}.$$

证明 由引理 6 容易验证定理 2 成立,故省略.

下面记 $\tau'=\tau-\alpha+\beta+1$, $t'=t-\alpha+\beta+1$,则由定理 1 和定理 2 可得方程(1) 的解为

$$x(t)=\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}G(t,s)\phi_q[A(s,\tau)\lambda f(\tau',x(\tau'),[{}_b\nabla^{\varepsilon}x(\tau)]_{\tau'+\varepsilon})]+J(t).$$

定理 3 设 $h:[0,b]_{\mathbb{N}_0}\to\mathbf{R}$, 当 $1<\alpha-\varepsilon<2$ 时, nabla 边值问题(3) 等价于问题

$$\begin{cases}{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}y(t)+h(t-\alpha+1)=0,\ t\in[\alpha-\varepsilon-1,b+\alpha-\varepsilon-1]_{\mathbb{N}_{\alpha-\varepsilon-1}};\\ y(b+\varepsilon)=0,\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon-1}y(t)]_{\alpha-2}=[{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\omega}g(t,{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(t))]_{t=\alpha-\omega-1}.\end{cases}\tag{5}$$

证明 假定 $x(t)$ 是问题(3) 的一个解,令 $y(t)={}_b\nabla^{\varepsilon}x(t)$,则通过引理 7 及 $x(b)=0$,有 $y(b+\varepsilon)=0$ 且 $x(t)={}_{b+\varepsilon-1}\nabla^{-\varepsilon}y(t)$. 又因为 ${}_b\nabla^{\alpha}x(t)={}_{b-1}\nabla^{\alpha}x(t)={}_{b-1}\nabla^{\alpha}{}_{b+\varepsilon-1}\nabla^{-\varepsilon}y(t)={}_{b+\varepsilon-1}\nabla^{\alpha-\varepsilon}y(t)={}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}y(t)$, 所以问题(3) 与问题(5) 等价.

定理 4 当 $1<\alpha-\varepsilon<2$ 时,边值问题(1) 等价于问题

$$\begin{cases}\Delta_{\alpha-2}^{\beta}(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}y(t)))+\lambda f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(t'),y(t'+\varepsilon))=0,\\ y(b+\varepsilon)=0,\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon-1}y(t)]_{\alpha-2}=[{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\omega}g(t,{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(t))]_{t=\alpha-\omega-1},\\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}y(t)]_{\alpha-2}=0,\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}y(t)]_{\alpha+b-2}=0.\end{cases}\tag{6}$$

问题(6) 有唯一解 $y(t)=\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q[A(s,\tau)\lambda^{*}f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(\tau'),y(\tau'+\varepsilon))]+\bar{J}(t)$, 其中: $A(s,\tau)$ 与定理 2 中相同;

$$\bar{G}(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}\begin{cases}(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}-(s-t-1)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}},\\ \qquad\qquad \alpha-1\leqslant t+\alpha-\varepsilon-1<s\leqslant b+\alpha-1,\\ (b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}},\ \alpha-1\leqslant s\leqslant t+\alpha-\varepsilon-1\leqslant b+\alpha-1;\end{cases}$$

$$\bar{J}(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)\Gamma(\omega)}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}g(s,{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(s))(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}.$$

证明 证明类似于定理 3 的证明,故省略.

定理 5 函数 $\bar{G}(t,s)$ 有如下性质:

(i) $\bar{G}(t,s)\geqslant 0$, $(t,s)\in[\varepsilon,b+\varepsilon]_{\mathbb{N}_{\varepsilon}}\times[\alpha-1,b+\alpha-1]_{\mathbb{N}_{\alpha-1}}$.

(ii) $(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}m(s)\leqslant\bar{G}(t,s)\leqslant M(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}$, $t\in[\varepsilon,b+\varepsilon]_{\mathbb{N}_{\varepsilon}}$. 其中 $m(s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}\left(1-\frac{(s-\varepsilon-1)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}}{(b+\alpha-\varepsilon-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}}\right)$, $M=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}$, $\|m(s)\|=\max_{s\in[\alpha-1,b+\alpha-1]_{\mathbb{N}_{\alpha-1}}}|m(s)|$.

证明 由 $\bar{G}(t,s)$ 的定义知性质(i) 成立. 下面证明性质(ii). 令 $\hbar(t,s)=\frac{(s-t-1)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}}{(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}}$, 则有

$$\frac{(s-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}}{(b+\alpha-t-3)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}}-\frac{(s-t-1)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}}{(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}}=$$

$$\frac{\Gamma(s-t-1)\Gamma(b+\varepsilon-t-1)}{\Gamma(s-t-\alpha+\varepsilon)\Gamma(b+\alpha-t-2)}-\frac{\Gamma(s-t)\Gamma(b+\varepsilon-t)}{\Gamma(s-t-\alpha+\varepsilon+1)\Gamma(b+\alpha-t-1)}=$$

$$\frac{\Gamma(s-t-1)\Gamma(b-t+\varepsilon-1)}{\Gamma(s-t-\alpha+\varepsilon)\Gamma(b+\alpha-t-2)}\left[1-\frac{(s-t-1)(b-t+\varepsilon-1)}{(s-t-\alpha+\varepsilon)(b+\alpha-t-2)}\right]<0.$$

由此可知函数 $\hbar(t,s)$ 是关于 t 递减的,故

$$\bar{G}(t,s) \geqslant \frac{(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}\left(1-\frac{(s-\varepsilon)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}}{(b+\alpha-\varepsilon-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}}\right).$$

定理 6　称 $z(t)$ 为问题(6) 的下解,若函数 $z(t)$ 满足不等式组

$$\begin{cases} -\Delta_{\alpha-2}^{\beta}(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}z(t))) \leqslant \lambda f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}z(t'), z(t'+\varepsilon)); \\ z(b+\varepsilon) \geqslant 0,\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon-1}z(t)]_{\alpha-2} \geqslant [{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\omega}g(t, {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}z(t))]_{t=\alpha-\omega-1}; \\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}z(t)]_{\alpha-2} \geqslant 0,\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}z(t)]_{\alpha+b-2} \geqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

定理 7　称 $\kappa(t)$ 为问题(6) 的上解,若函数 $\kappa(t)$ 满足不等式组

$$\begin{cases} -\Delta_{\alpha-2}^{\beta}(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\kappa(t))) \geqslant \lambda f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\kappa(t'), \kappa(t'+\varepsilon)); \\ \kappa(b+\varepsilon) \leqslant 0,\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon-1}\kappa(t)]_{\alpha-2} \leqslant [{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\omega}g(t, {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\kappa(t))]_{t=\alpha-\omega-1}; \\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\kappa(t)]_{\alpha-2} \leqslant 0,\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\kappa(t)]_{\alpha+b-2} \leqslant 0. \end{cases} \tag{8}$$

引理 8(Schauder 不动点定理)　设 E 是一个 Banach 空间,$T: E \to E$ 是完全连续映射,集合$\{x \in E: x=\sigma Tx\}$ 对 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ 是有界的,则 T 有一个不动点.

2　主要结果及其证明

为了证明边值问题解的存在性,给出以下条件:

(H_4) $f(\cdot,u,s): [0,b]_{\mathbf{N}_0}\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是关于变量 u 和 s 的非增连续函数. 对 $\lambda\in(0,1)$,存在两个常数 $\mu_1,\mu_2>0$,且对任意的$(t,u,s)\in[0,b]_{\mathbf{N}_0}\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 有以下不等式成立:

$$f(t,\lambda u,s) \leqslant \lambda^{-\mu_1} f(t,u,s), \tag{9}$$

$$f(t,u,\lambda s) \leqslant \lambda^{-\mu_2} f(t,u,s). \tag{10}$$

注 1　不等式(9) 和(10) 分别等价于下列不等式:

$$f(t,\lambda u,s) \geqslant \lambda^{-\mu_1} f(t,u,s),\ \forall\lambda>1; \tag{11}$$

$$f(t,u,\lambda s) \geqslant \lambda^{-\mu_2} f(t,u,s),\ \forall\lambda>1. \tag{12}$$

令 $\gamma=l_y^{-(\mu_1+\mu_2)}$, $\eta=l_y^{\mu_1+\mu_2}$, $t''=b+2\alpha-t-\beta-3$, 且 $r(t')=f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}(t'')^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}, (t''+\varepsilon)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}})$, $t\in[\alpha-\beta-1, b+\alpha-\beta-1]_{\mathbf{N}_{\alpha-\beta-1}}$, $r(t')\in([0,b]_{\mathbf{N}_0},\mathbf{R})$, 对任意的 $m\in(0,1)$, 定义 $\|r\|_{\frac{1}{m}} := \left(\sum\limits_{s=\alpha-\beta}^{b+\alpha-\beta-2} r^{\frac{1}{m}}(s)\right)^m$.

定理 8　假设(H_4) 成立,则存在一个常数$\lambda^*>0$,使得其对任意的 $\lambda\in(\lambda^*,+\infty)$,边值问题(6) 至少存在一个解 $\omega(t)$,且存在一个常数 $0<l<1$,使得

$$l(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}} \leqslant \omega(t) \leqslant l^{-1}(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}.$$

证明　令 $F=C([\varepsilon,b+\varepsilon]_{\mathbf{N}_\varepsilon},\mathbf{R})$,并定义一个 F 的子集 P:

$$P=\{y\in F: \exists\, l\in(0,1), \text{使得 } l(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}} \leqslant y(t) \leqslant l^{-1}(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\}.$$

因为$(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\in P$,所以 P 是非空的. 定义 P 中的算子:

$$T_\lambda y(t)=\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q[A(s,\tau)\lambda f(\tau', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(\tau'), y(\tau'+\varepsilon))]+\bar{J}(t). \tag{13}$$

事实上,对任意的 $y\in P$,存在一个正常数 $0<l_y<1$,使得

$$l_y(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}} \leqslant y(t) \leqslant l_y^{-1}(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}},\ t\in[\varepsilon,b+\varepsilon]_{\mathbf{N}_\varepsilon}.$$

又由(H_2) 知, $0\leqslant g(s,x)\leqslant k(|x(s)|)^l=k|{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(s)|^l$, $l,k\in(0,+\infty)$, 而

$$\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}k\left|\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\sum_{\tau=s+\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\tau-s-1)^{\underline{\varepsilon-1}}l_y(b+\alpha-\tau-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\right|^l \leqslant \sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}\cdot$$

$$g(s, {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(s)) \leqslant \sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}k\left|\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\sum_{\tau=s+\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\tau-s-1)^{\underline{\varepsilon-1}}l_y^{-1}(b+\alpha-\tau-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\right|^l.$$

故 $0\leqslant \bar{J}(t)\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)\Gamma(\omega)}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}k\left|\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\sum_{\tau=s+\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\tau-s-1)^{\underline{\varepsilon-1}}l_y^{-1}(b+\alpha-\tau-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\right|^{l}(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}$. 由定理 5 和($H_4$) 以及 Holder's 不等式和 $m\in(0,1)$，有

$$
\begin{aligned}
&T_\lambda y(t)=\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q\left[A(s,\tau)\lambda f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(\tau'),y(\tau'+\varepsilon))\right]+\bar{J}(t)\leqslant\\
&\lambda^{q-1}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q\left[A(s,\tau)f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}l_y(\tau'')^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}},l_y(\tau''-\varepsilon)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}})\right]+\\
&\frac{(b+\alpha-t-2)^{\underline{\varepsilon-1}}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)\Gamma(\omega)}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}k\left|\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\sum_{\tau=s+\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\tau-s-1)^{\underline{\varepsilon-1}}l_y^{-1}(b+\alpha-\tau-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\right|^{l}\leqslant\\
&\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\left\{(\lambda\eta)^{q-1}M\phi_q\left[A(s,\tau)r(\tau')\right]+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)\Gamma(\omega)}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}\cdot\right.\\
&\left.k\left|\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\sum_{\tau=s+\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\tau-s-1)^{\underline{\varepsilon-1}}l_y^{-1}(b+\alpha-\tau-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\right|^{l}\right\}(b+\alpha-2-t)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\leqslant\\
&\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\left\{(\lambda\eta)^{q-1}M\phi_q\left[\frac{(s-\alpha+\beta)^{\underline{\beta-1}}r(\tau')}{\Gamma(\beta)(b+\beta-2)^{\underline{\beta-1}}}\sum_{\tau=\alpha-\beta}^{b+\alpha-\beta-2}(b+\alpha-\tau-3)^{\underline{\beta-1}}\right]+\right.\\
&(\lambda\eta)^{q-1}M\phi_q\left[\frac{r(\tau')}{\Gamma(\beta)}\sum_{\tau=\alpha-\beta}^{s-\beta}(s-\tau-1)^{\underline{\beta-1}}\right]+\frac{(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}\cdot\\
&\left.k\left|\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\sum_{\tau=s+\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\tau-s-1)^{\underline{\varepsilon-1}}l_y^{-1}(b+\alpha-\tau-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\right|^{l}\right\}(b+\alpha-2-t)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\leqslant\\
&\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\left\{(\lambda\eta)^{q-1}M\|r\|_{\frac{1}{m}}^{q-1}\left[\sum_{s=\alpha-\beta}^{b+\alpha-\beta-2}\left|\frac{(s-\alpha+\beta)^{\underline{\beta-1}}(b+\alpha-\tau-3)^{\underline{\beta-1}}}{\Gamma(\beta)(b+\beta-2)^{\underline{\beta-1}}}\right|^{\frac{1}{1-m}}+\right.\right.\\
&\left.\sum_{\tau=\alpha-\beta}^{s-\beta}\left|\frac{(s-\tau-1)^{\underline{\beta-1}}}{\Gamma(\beta)}\right|\right]^{(1-m)(q-1)}+\frac{(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}\cdot\\
&\left.k\left|\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\sum_{\tau=s+\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\tau-s-1)^{\underline{\varepsilon-1}}l_y^{-1}(b+\alpha-\tau-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\right|^{l}\right\}(b+\alpha-2-t)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}<+\infty.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

再利用定理 5、定理 6 和注 1，可得

$$
\begin{aligned}
&T_\lambda y(t)=\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q\left[A(s,\tau)\lambda f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(\tau'),y(\tau'+\varepsilon))\right]+\bar{J}(t)\geqslant\\
&\lambda^{q-1}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q\left[A(s,\tau)f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}l_y^{-1}(\tau'')^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}},l_y^{-1}(\tau''-\varepsilon)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}})\right]\geqslant\\
&(\lambda\gamma)^{q-1}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}m(s)(b+\alpha-2-t)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\left[A(s,\tau)r(\tau')\right]^{q-1}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

令

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}=&\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\left\{(\lambda\eta)^{q-1}M\|r\|_{\frac{1}{m}}^{q-1}\left[\sum_{s=\alpha-\beta}^{b+\alpha-\beta-2}\left|\frac{(s-\alpha+\beta)^{\underline{\beta-1}}(b+\alpha-\tau-3)^{\underline{\beta-1}}}{\Gamma(\beta)(b+\beta-2)^{\underline{\beta-1}}}\right|^{\frac{1}{1-m}}+\right.\right.\\
&\left.\sum_{\tau=\alpha-\beta}^{s-\beta}\left|\frac{(s-\tau-1)^{\underline{\beta-1}}}{\Gamma(\beta)}\right|^{\frac{1}{1-m}}\right]^{(1-m)(q-1)}+\frac{(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}\cdot\\
&\left.k\left|\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\sum_{\tau=s+\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\tau-s-1)^{\underline{\varepsilon-1}}l_y^{-1}(b+\alpha-\tau-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\right|^{l}\right\}.
\end{aligned}
$$

取

$$
I_y=\min\left\{\frac{1}{2},(\tilde{\omega})^{-1},(\lambda\gamma)^{q-1}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}m(s)\left[A(s,\tau)r(\tau')\right]^{q-1}\right\}.\tag{16}
$$

根据式(14) 和(15) 可得

$$
I_y(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\leqslant T_\lambda y(t)\leqslant I_y^{-1}(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}.\tag{17}
$$

下面求分数阶边值问题(6)的上下解. 令 $e(t)=\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q[A(s,\tau)r(\tau')]$，则由定理5、定理6和($H_2$)知，$e(t)\geqslant(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}m(s)\phi_q[A(s,\tau)\gamma r(\tau')]$，并且存在一个常数 $\lambda_1\geqslant 1$，使得 $\lambda_1 e(t)\geqslant(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}$. 因此，对任意的 $\lambda>\lambda_1$，根据条件(H_4)有：

$$\begin{aligned}&\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q[A(s,\tau)f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\lambda e(\tau'),\lambda e(\tau'+\varepsilon))]+\bar{J}(t)\leqslant\\&\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q[A(s,\tau)f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\lambda_1 e(\tau'),\lambda_1 e(\tau'))]+\\&\frac{(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)\Gamma(\omega)}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}k\left|\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\sum_{\tau=s+\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\tau-s-1)^{\underline{\varepsilon-1}}l_y^{-1}(b+\alpha-\tau-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\right|^{l}\leqslant\\&\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\Bigg\{\lambda_1^{-(\mu_1+\mu_2)(q-1)}(\eta)^{q-1}M\|r\|_{\frac{1}{m}}^{q-1}\Bigg[\sum_{s=\alpha-\beta}^{b+\alpha-\beta-2}\left|\frac{(s-\alpha+\beta)^{\underline{\beta-1}}(b+\alpha-\tau-3)^{\underline{\beta-1}}}{\Gamma(\beta)(b+\beta-2)^{\underline{\beta-1}}}\right|^{\frac{1}{1-m}}+\\&\sum_{\tau=\alpha-\beta}^{s-\beta}\left|\frac{(s-\tau-1)^{\underline{\beta-1}}}{\Gamma(\beta)}\right|^{\frac{1}{1-m}}\Bigg]^{(1-m)(q-1)}+\frac{(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}\cdot\\&k\left|\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\sum_{\tau=s+\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\tau-s-1)^{\underline{\varepsilon-1}}l_y^{-1}(b+\alpha-\tau-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\right|^{l}\Bigg\}(b+\alpha-2-t)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}<+\infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e(t)\leqslant&\Bigg[\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}M\phi_q[A(s,\tau)r(\tau')]+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)\Gamma(\omega)}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}}\cdot\\&k\left|\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\sum_{\tau=s+\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\tau-s-1)^{\underline{\varepsilon-1}}l_y^{-1}(b+\alpha-\tau-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\right|^{l}\Bigg](b+\alpha-2-t)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}<+\infty.\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}\rho=&M(b+\alpha-2-t)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\|r\|_{\frac{1}{m}}^{q-1}\Bigg[\sum_{s=\alpha-\beta}^{b+\alpha-\beta-2}\left|\frac{(s-\alpha+\beta)^{\underline{\beta-1}}(b+\alpha-\tau-3)^{\underline{\beta-1}}}{\Gamma(\beta)(b+\beta-2)^{\underline{\beta-1}}}\right|^{\frac{1}{1-m}}+\\&\sum_{\tau=\alpha-\beta}^{s-\beta}\left|\frac{(s-\tau-1)^{\underline{\beta-1}}}{\Gamma(\beta)}\right|^{\frac{1}{1-m}}\Bigg]^{(1-m)(q-1)}+1,\end{aligned}$$

并且取 $\lambda^*=\max\left\{\lambda_1^{\frac{1}{q-1}},\ \rho^{-(\mu_1+\mu_2)(q-1)}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}m(s)\phi_q[A(s,\tau)f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}1,1)]^{\frac{1}{[(\mu_1+\mu_2)(q-1)-1](q-1)}}\right\}$，则根据定理5和注1知，对于 $\forall t\in[\varepsilon,b+\varepsilon]_{\mathbb{N}_\varepsilon}$ 有

$$\begin{aligned}+\infty>&\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q[A(s,\tau)\lambda^*f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}(\lambda^*)^{q-1}e(\tau'),(\lambda^*)^{q-1}e(\tau'+\varepsilon))]+\bar{J}(t)\geqslant\\&(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}(\lambda^*)^{[1-(\mu_1+\mu_2)(q-1)](q-1)}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}m(s)\phi_q[A(s,\tau)f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}e(\tau'),e(\tau'+\varepsilon))]\geqslant\\&(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}(\lambda^*)^{[1-(\mu_1+\mu_2)(q-1)](q-1)}\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}m(s)\phi_q[A(s,\tau)f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\rho,\rho)]\geqslant\\&(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}(\lambda^*)^{[1-(\mu_1+\mu_2)(q-1)](q-1)}\rho^{-(\mu_1+\mu_2)(q-1)}\cdot\\&\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}m(s)\phi_q[A(s,\tau)f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}1,1)]\geqslant(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}.\end{aligned}$$

故

$$\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q[A(s,\tau)\lambda^*f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}(\lambda^*)^{q-1}e(\tau'),(\lambda^*)^{q-1}e(\tau'+\varepsilon))]+\bar{J}(t)\geqslant(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}.\tag{18}$$

令

$$\varphi(t)=(\lambda^*)^{q-1}e(t)=T_{\lambda^*}((b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}),\ \psi(t)=T_{\lambda^*}\varphi(t).\tag{19}$$

对 $t\in[\varepsilon,b+\varepsilon]_{\mathbb{N}_\varepsilon}$，利用式(17) 和(18)，有以下不等式成立：

$$\begin{cases}\varphi(t)=\sum\limits_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q[A(s,\tau)\lambda^* r(\tau')]+\bar{J}(t)\geqslant\lambda_1 e(t)\geqslant(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}},\\ \psi(t)=\sum\limits_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q[A(s,\tau)\lambda^* f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}(\lambda^*)^{q-1}e(\tau'),(\lambda^*)^{q-1}e(\tau'+\varepsilon))]+\bar{J}(t).\end{cases}\tag{20}$$

再通过式(19) 和(20) 可得

$$\begin{cases}\varphi(b+\varepsilon)=0,\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\varphi(t)]_{\alpha-2}=0,\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\varphi(t)]_{b+\alpha-2}=0;\\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon-1}\varphi(t)]_{\alpha-2}=[{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\omega}g(t,{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\varphi(t))]_{t=\alpha-\omega-1};\\ \psi(b+\varepsilon)=0,\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\psi(t)]_{\alpha-2}=0,\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\psi(t)]_{b+\alpha-2}=0;\\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon-1}\psi(t)]_{\alpha-2}=[{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\omega}g(t,{}_{b+\alpha}\nabla^{-\varepsilon}\psi(t))]_{t=\alpha-\omega-1}.\end{cases}\tag{21}$$

类似式(14)—(16) 的证明过程，可得 $\varphi(t),\psi(t)\in P$. 由式(18) 可得

$$\psi(t)=(T_{\lambda^*}\varphi)(t)\geqslant(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}.\tag{22}$$

再由式(19) 可知

$$\psi(t)=(T_{\lambda^*}\varphi)(t)=\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q[A(s,\tau)\lambda^* f(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}(\lambda^*)^{q-1}e(\tau'),(\lambda^*)^{q-1}e(\tau'+\varepsilon))]+\bar{J}(t)\leqslant$$
$$\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q[A(s,\tau)\gamma\lambda^* r(\tau')]+\bar{J}(t)=\varphi(t).\tag{23}$$

考虑到 f 是非递增的，则通过式(19)、(22) 和(23) 可得：

$$\begin{aligned}&\Delta^{\beta}_{\alpha-2}(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\psi(t)))+\lambda^* f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\psi(t'),\psi(t'+\varepsilon))=\\ &\quad\Delta^{\beta}_{\alpha-2}(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}(T_{\lambda^*}(\varphi(t)))))+\lambda^* f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\psi(t'),\psi(t'+\varepsilon))\geqslant\\ &\quad\Delta^{\beta}_{\alpha-2}(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}(T_{\lambda^*}(\varphi(t)))))+\lambda^* f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\varphi(t'),\varphi(t'+\varepsilon))=\\ &\quad-\lambda^* f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\varphi(t'),\varphi(t'+\varepsilon))+\lambda^* f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\varphi(t'),\varphi(t'+\varepsilon))=0,\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\Delta^{\beta}_{\alpha-2}(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\varphi(t)))+\lambda^* f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\varphi(t'),\varphi(t'+\varepsilon))=\\ &\quad\Delta^{\beta}_{\alpha-2}(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}(T_{\lambda^*}(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}})))+\lambda^* f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\varphi(t'),\varphi(t'+\varepsilon))=\\ &\quad-\lambda^* f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}(t'')^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}},(t''-\varepsilon)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}})+\lambda^* f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\varphi(t'),\varphi(t'+\varepsilon))\leqslant\\ &\quad-\lambda^* f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}(t'')^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}},(t''-\varepsilon)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}})+\lambda^* f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}(t'')^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}},(t''+\varepsilon)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}})=0.\end{aligned}\tag{25}$$

根据式(21)—(25) 知，$\psi(t)$ 和 $\varphi(t)$ 是差分边值问题(6) 的上解和下解. 定义如下函数：

$$F(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(t'),y(t'))=\begin{cases}f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\psi(t'),\psi(t'+\varepsilon)),\ y(t)<\psi(t);\\ f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(t'),y(t'+\varepsilon)),\ \psi(t)\leqslant y(t)\leqslant\varphi(t);\\ f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\varphi(t'),\varphi(t'+\varepsilon)),\ y(t)>\varphi(t).\end{cases}\tag{26}$$

根据性质(H_4) 和式(26) 的定义知 $F(t,u,s)$：$[0,b]_{\mathbb{N}_0}\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续的.

下证差分边值问题

$$\begin{cases}\Delta^{\beta}_{\alpha-2}(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}y(t)))+\lambda^* F(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(t'),y(t'+\varepsilon))=0,\\ y(b+\varepsilon)=0,\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon-1}y(t)]_{\alpha-2}=[{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\omega}g(t,{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(t))]_{t=\alpha-\omega-1},\\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}y(t)]_{\alpha-2}=0,\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}y(t)]_{\alpha+b-2}=0\end{cases}\tag{27}$$

有一个正解. 首先定义算子 D_{λ^*} 为

$$D_{\lambda^*}y(t)=\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\bar{G}(t,s)\phi_q[A(s,\tau)\lambda^* F(\tau',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(\tau'),y(\tau'+\varepsilon))]+\bar{J}(t),\tag{28}$$

则 D_{λ^*}：$C([\varepsilon,b+\varepsilon]_{\mathbb{N}_\varepsilon},\mathbf{R})\to C([\varepsilon,b+\varepsilon]_{\mathbb{N}_\varepsilon},\mathbf{R})$，且 D_{λ^*} 中的一个不动点是差分边值问题(27) 的一个解. 另外，从 F 的定义和函数 f 对第 2 变量和第 3 变量是非递增的条件可知：

当 $f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\varphi(t'),\varphi(t'+\varepsilon))\leqslant F(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}y(t'),y(t'+\varepsilon))\leqslant f(t',{}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\psi(t'),\psi(t'+\varepsilon))$ 时，

有 $\psi(t) \leqslant y(t) \leqslant \varphi(t)$；

当 $F(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon} y(t'), y(t'+\varepsilon)) = f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\psi(t'), \psi(t'+\varepsilon))$ 时，有 $y(t) < \psi(t)$；

当 $F(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon} y(t'), y(t'+\varepsilon)) = f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\varphi(t'), \varphi(t'+\varepsilon))$ 时，有 $y(t) > \varphi(t)$.

故 $f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\varphi(t'), \varphi(t'+\varepsilon)) \leqslant F(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon} y(t'), y(t'+\varepsilon)) \leqslant f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\psi(t'), \psi(t'+\varepsilon))$. 由式(21)、(22) 和上式可得

$$f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\varphi(t'), \varphi(t'+\varepsilon)) \leqslant f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\psi(t'), \psi(t'+\varepsilon)) \leqslant f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}(t'')^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}, (t''+\varepsilon)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}). \tag{29}$$

再由定理 5 和式(29) 可知，对任意的 $y \in P$ 有

$$\begin{aligned} D_{\lambda^*} y(t) = &\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2} \bar{G}(t,s)\phi_q[A(s,\tau)\lambda^* F(\tau', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon} y(\tau'), y(\tau'+\varepsilon))] + \bar{J}(t) \leqslant \\ &\sum_{s=\alpha-1}^{b+\alpha-2}\Big[M\phi_q[A(s,\tau)r(\tau')] + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)\Gamma(\omega)}(s+\omega-\alpha)^{\underline{\omega-1}} \cdot \\ &k\left|\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\sum_{\tau=s+\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\tau-s-1)^{\underline{\varepsilon-1}} l_y^{-1}(b+\alpha-\tau-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}\right|^{l}\Big](b+\alpha-2-t)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}} < +\infty, \end{aligned} \tag{30}$$

即算子 D_{λ^*} 是一致有界的.

令 $\Omega \subset P$ 是有界的. 因为式(28) 的右边是有限和，因此可以证明 D^* 是等度连续的. 根据 Arzela-Ascoli 定理可知 $D_{\lambda^*}: P \to P$ 是完全连续的，再由式(30) 知 D_{λ^*} 满足引理 8 的条件. 根据 Schauder 不动点定理可知，D_{λ^*} 至少有一个不动点 w，使得 $w = D_{\lambda^*} w$ 成立.

下证 $\psi(t) \leqslant w(t) \leqslant \varphi(t)$，$t \in [\varepsilon, b+\varepsilon]_{\mathbb{N}_\varepsilon}$. 由于 w 是 D_{λ^*} 中的一个不动点，所以有

$$\begin{cases} w(b+\varepsilon) = 0, \ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon} w(t)]_{\alpha-2} = 0, \ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon} w(t)]_{b+\alpha-2} = 0; \\ [{}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon-1} w(t)]_{\alpha-2} = [{}_{b+\alpha-2}\nabla^{-\omega} g(t, {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon} w(t))]_{t=\alpha-\omega-1}. \end{cases} \tag{31}$$

由于 w 是 D_{λ^*} 中的一个不动点，则由式(19) 和(29) 可知

$$\begin{aligned} &\Delta_{\alpha-2}^{\beta}(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\varphi(t))) - \Delta_{\alpha-2}^{\beta}(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon} w(t))) = \\ &\quad -\lambda^* f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}(t'')^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}, (t''-\varepsilon)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}) + \lambda^* F(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon} w(t'), w(t'+\varepsilon)) = \\ &\quad -\lambda^* f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}(t'')^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}, (t''-\varepsilon)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}) + \lambda^* f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon}\psi(t'), \psi(t'+\varepsilon)) \leqslant \\ &\quad -\lambda^* f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}(t'')^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}, (t''-\varepsilon)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}) + \lambda^* f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}(t'')^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}, (t''-\varepsilon)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}) = 0. \end{aligned}$$

令 $z(t) = (\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\varphi(t))) - (\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon} w(t)))$，则有：

$$\Delta_{\alpha-2}^{\beta} z(t) = \Delta_{\alpha-2}^{\beta}(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\varphi(t))) - \Delta_{\alpha-2}^{\beta}(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon} w(t))) \leqslant 0, \ t \in [\varepsilon, b+\varepsilon]_{\mathbb{N}_\varepsilon},$$

$$z(\alpha+\varepsilon-2) = (\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\varphi(\alpha+\varepsilon-2))) - (\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon} w(\alpha+\varepsilon-2))) = 0.$$

故 $z(t) \leqslant 0$，即 $(\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}\varphi(t))) - (\phi_p({}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon} w(t))) \leqslant 0$. 事实上，如果定义 $\Delta_{\alpha-2}^{\beta} z(t) = -\zeta(t) \leqslant 0$，则根据引理 6 可得 $z(t) = -\Delta_{\alpha-\beta}^{-\beta}\zeta(t) + K_1(t-\alpha+\beta)^{\underline{\beta-1}}$，$z(\alpha+\varepsilon-2) = 0$，其中 $K_1 = 0$，因此 $z(t) \leqslant 0$.

注意到 ϕ_p 是单调递增的，且 ${}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}$ 是线性算子，所以有 ${}_{b+\varepsilon}\nabla^{\alpha-\varepsilon}(\varphi-\omega)(t) \leqslant 0$. 根据式(31) 可得 $\varphi(t) - w(t) \geqslant 0$，因此对任意的 $t \in [\varepsilon, b+\varepsilon]_{\mathbb{N}_\varepsilon}$ 有 $w(t) \leqslant \varphi(t)$. 同理可得，对任意的 $t \in [\varepsilon, b+\varepsilon]_{\mathbb{N}_\varepsilon}$ 有 $w(t) \geqslant \psi(t)$. 故

$$\psi(t) \leqslant w(t) \leqslant \varphi(t), \ t \in [\varepsilon, b+\varepsilon]_{\mathbb{N}_\varepsilon}, \tag{32}$$

且 $F(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon} w(t'), w(t'+\varepsilon)) = f(t', {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon} w(t'), w(t'+\varepsilon))$，$t \in [\varepsilon, b+\varepsilon]_{\mathbb{N}_\varepsilon}$. 因此，$w(t)$ 是差分边值问题(27) 的一个正解，$y(t) = {}_{b+\varepsilon}\nabla^{-\varepsilon} w(t)$ 是差分边值问题(1) 的一个正解.

再根据式(32) 和 $\varphi, \psi \in P$，有 $l_\psi(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}} \leqslant \psi(t) \leqslant w(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant l_\varphi^{-1}(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}$，令 $l_y = \min\{l_\psi, l_\varphi\}$，则 $l_y(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}} \leqslant \psi(t) \leqslant w(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant l_y^{-1}(b+\alpha-t-2)^{\underline{\alpha-\varepsilon-1}}$.

(下转第 369 页)

参考文献：

[1] 文学洙，赵德金．影响振动式挖掘机土壤分离能力的主要参数[J]．延边大学学报（自然科学版），2003，29(2)：127-130．
[2] KANG W S，WEN X Z．Developing a small commercial vibrating potato digger（I）：assessment of kinematic design parameters[J]．Applied Engineering in Agriculture，2005，21(5)：807-811．
[3] 文学洙，廉哲满．振动式挖掘机的设计与试验[J]．农业机械学报，2006，37(10)：77-82．
[4] 文学洙，廉哲满．影响振动式马铃薯挖掘机作业性能的主要参数[J]．延边大学学报（自然科学版），2007，33(3)：199-202．
[5] 张华，吴建民，孙伟，等．4UM-640 型振动式马铃薯挖掘机的设计与试验[J]．干旱地区农业研究，2014，32(2)：264-268．
[6] 戴飞，杨杰，赵武云，等．振动式阶梯铲状马铃薯挖掘机作业性能试验[J]．干旱地区农业研究，2014，32(3)：263-267．
[7] 吕金庆，田忠恩，吴金娥，等．4UIZ 型振动式马铃薯挖掘机的设计与试验[J]．农业工程学报，2015，31(12)：39-47．
[8] 马海军．4U-600 型振筛式马铃薯挖掘机研制与试验[J]．农业技术与装备，2017，327(3)：75-78．
[9] 王虎存，张育豪，孙伟，等．振铲式马铃薯挖掘机设计与试验[J]．中国农机化学报，2018，39(7)：1-5．
[10] 文学洙．影响振动式挖掘机牵引力的参数分析[J]．延边大学学报（自然科学版），2008，34(3)：219-221．
[11] 吴海平，候建丽，郝琴，等．4S-80马铃薯振动挖掘机牵引阻力的测试分析[J]．山西农业大学学报（自然科学版），2009，29(4)：351-354．
[12] 文学洙．影响振动式挖掘机驱动扭矩的参数分析[J]．农机化研究，2009，31(12)：130-132．
[13] 李紫辉，杨颖，尚琴琴，等．基于振动机理的马铃薯挖掘机的试验研究[J]．农机化研究，2016(9)：186-190．
[14] 李祥，王春光，邓伟刚．马铃薯挖掘阻力测试装置研究[J]．农机化研究，2018(8)：174-187．
[15] 邓伟刚，王春光．马铃薯收获机挖掘铲牵引阻力分析与测试[J]．农机化研究，2020(3)：35-41．
[16] 武涛，黄伟风，黄積佰，等．马铃薯振动挖掘机试验台的设计与试验[J]．农机化研究，2020(2)：44-50．
[17] 文学洙．影响振动式挖掘机牵引动力的参数分析[J]．延边大学农学学报，2009，31(3)：205-208．
[18] 文学洙．影响振动式挖掘机消耗动力的参数分析[J]．农机化研究，2010，32(10)：115-117．
[19] 文学洙．影响振动式挖掘机性能的主要参数[J]．农机化研究，2012，34(4)：127-129．

（上接第 291 页）

参考文献：

[1] AGRAWAL O P．Formulation of Euler-Lagrange equations[J]．Math Anal Appl，2002，272：368-379．
[2] CHHETRI M．Positive solutions for classes of p-Laplacian equations[J]．Differ Integral Equ，2004，17(11/12)：1255-1261．
[3] ORUGANTI S．Logistic equation with the p-Laplacian and constant yield harvesting[J]．Abstr Appl Anal，2004，9：723-727．
[4] LIU C C．Weak solutions for a viscous p-Laplacian equation[J]．Electronic Journal of Differential Equations，2003，63：1-11．
[5] LYU W．Existence of solutions for discrete fractional boundary value problems with a p-Laplacian operator[J]．Adv Differ Equ，2012，1：163-173．
[6] GOODRIVH C S．Systems of discrete fractional boundary value problems with nonlinearities satisfying no growth conditions[J]．Differ Equ Appl，2015，21(5)：437-453．
[7] XIE Z S，JIN Y F，HOU C M．Multiple solutions for a fractional difference boundary value problem via variational approach[J]．Abstr Appl Anal，2012，137：137-138．
[8] LIU H，JIN Y F，HOU C M．Existence of positive solutions for discrete delta-nabla fractional boundary value problems with p-Laplacian[J]．Springer，2017，60：39A(06-22)．
[9] XIE Z S，HOU C M．Properties of right fractional sum and right fractional difference operators and application[J]．Adv Differ Equ，2015，2015(1)：288-304．