文章编号：1004-4353(2019)03-0241-05

求解二阶锥互补问题的一种非精确光滑化牛顿算法

薛文娟

（福建农林大学 计算机与信息学院，福建 福州 350002）

摘要： 为解决二阶锥互补问题，构造了一种新的非精确光滑化牛顿算法. 在适当的条件下，该算法具有全局收敛性，并且由该算法所得序列的任一聚点均是二阶锥规划问题的解. 数值试验表明，该算法可有效求解较大规模的二阶锥互补问题.

关键词： 二阶锥互补问题；光滑化函数；非精确光滑化牛顿法；若当代数

中图分类号： O221　　**文献标识码：** A

An inexact smoothing Newton algorithm for the second-order cone complementary problems

XUE Wenjuan

(*School of Computer and Information Science, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou* 350002, *China*)

Abstract: To solve the second-order cone complementary programming problem, we construct an inexact smoothing Newton algorithm. Under some proper assumptions, it proves that the proposed algorithm is globally convergent and any accumulation point of the generated sequence is a solution to the second-order cone programming. The numerical experiment shows that the proposed algorithm is effective to solve the big second-order cone programming.

Keywords: second-order cone complementary problem; smoothing function; inexact smoothing Newton method; Jordan algebra

0 引言

定义 $\mathbf{R}^n$ 中的二阶锥(SOC) 为：

$$K^n=\{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}\mid \boldsymbol{x}_1\geqslant\|\boldsymbol{x}_2\|\},$$

其中 $\|\cdot\|$ 为欧式范数，即 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$. 为方便，本文用 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$ 代表 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

不失一般性，本文考虑单个二阶锥上的二阶锥规划，其原问题(PSOCP) 为：

$$\min\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\in K^n\},$$

其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$ 为给定的已知量，$\boldsymbol{x}\in K^n$ 为变量. 原问题的对偶问题(DSOCP) 为：

$$\max\{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{t}\in K^n,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^m\},$$

其中 $\boldsymbol{t}\in K^n$ 为松弛变量，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^m$ 为变量.

收稿日期： 2019－03－28　　**基金项目：** 福建省教育厅青年基金资助项目(JAT170183)

作者简介： 薛文娟(1981—)，女，讲师，研究方向为运筹优化.

二阶锥互补规划问题作为数学领域的一个重要分支，在工程、金融等领域具有广泛地应用[1]. 2002 年，Qi 等[2]提出了一种光滑化牛顿法用于求解变分不等式等问题，因为该方法具有较好的收敛性和计算效果，所以被广泛地应用于二阶锥规划问题的求解中[3-7]. 但目前为止，该方法大多用于求解线性互补问题，而较少应用于锥互补问题的研究；因此，本文基于一个向量函数，给出二阶锥规划问题的一种非精确光滑化牛顿算法，并证明该算法具有全局收敛性.

本文假设 PSOCP 和 DSOCP 都存在最优解且最优解相等. 用 $\mathbf{R}^n$ 表示维实列向量，$\mathbf{R}^n_{++}$ 表示正列向量，$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 的列向量，$\boldsymbol{I}$ 表示 $n\times n$ 单位阵. 对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，若 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in K^n$，则记 $\boldsymbol{x}\geqslant_{K^n}\boldsymbol{y}$ (or $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in\operatorname{int}K^n$，其中 $\operatorname{int}K^n$ 表示 K^n 的内部).

1 预备知识

首先给出欧氏若当代数中与二阶锥 K^n 有关的基本知识. 对于 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\bar{\boldsymbol{x}})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$ 以及 $\boldsymbol{t}=(\boldsymbol{t}_1,\bar{\boldsymbol{t}})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$，定义它们的若当积为：

$$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{t}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{t}_1\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{x}_1\bar{\boldsymbol{t}}\end{pmatrix}. \tag{1}$$

用 $\boldsymbol{x}^2$ 表示 $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t}$ 表示向量加法，于是$(\circ,+,\varepsilon)$ 构成一个若当代数，其中 $\varepsilon=(1,0)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$.

定义线性算子 $L_{\boldsymbol{x}}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为 $L_{\boldsymbol{x}}:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\\ \bar{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 代表$(n-1)\times(n-1)$ 单位矩阵. 根据线性算子定义得 $L_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{x}=L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{t}=\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{t},\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^n$，$L_{\boldsymbol{x}-\varepsilon}=L_{\boldsymbol{x}}-L_{\varepsilon}$. 进一步可得，$L_{\boldsymbol{x}}$ 是正半定(正定)的充要条件是 $\boldsymbol{x}\in K^n$(or $\boldsymbol{x}\in\operatorname{int}K^n$).

以下给出二阶锥中 K^n 向量的谱分解定义. 对于任意给出的向量 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\bar{\boldsymbol{x}})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$，其谱分解为：

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\lambda_2\boldsymbol{u}_2; \tag{2}$$

$$\lambda_i=\boldsymbol{x}_1+(-1)^i\,\|\boldsymbol{x}_2\|; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}_i=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1,(-1)^i\,\dfrac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|}\right),\ \boldsymbol{x}_2\neq0;\\[2ex] \dfrac{1}{2}(1,(-1)^ik),\ \boldsymbol{x}_2=0.\end{cases} \tag{4}$$

其中：$i=1,2$；$k\in\mathbf{R}^{n-1}$，满足 $\|k\|=1$；λ_1,λ_2 和 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ 分别表示 $\boldsymbol{x}$ 的特征值和相应的特征向量. 因为 $\boldsymbol{x}\in K^n$ 的充要条件是 $\lambda_1\geqslant0,\lambda_2\geqslant0$，故对任意的函数 $\hat{g}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，可定义其在 K^n 上的函数如下：

$$g(\boldsymbol{x})=g(\lambda_1)\mu_1+g(\lambda_2)\mu_2,\ \boldsymbol{x}\in K^n. \tag{5}$$

由式(5)可得：

$$[\boldsymbol{x}]_+=[\lambda_1]_+\boldsymbol{u}_1+[\lambda_2]_+\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n;$$

$$\ln\boldsymbol{x}=\ln\lambda_1\cdot\boldsymbol{u}_1+\ln\lambda_2\cdot\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{x}\in K^n.$$

定义一个向量值函数 $\phi:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_{++}\to\mathbf{R}^n$ 为

$$\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)=\boldsymbol{x}-\mu\ln(\varepsilon+\mathrm{e}^{\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}}{\mu}}),\ \mu>0. \tag{6}$$

令 $\boldsymbol{z}:=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)$，定义函数 $H(\boldsymbol{z}):\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}_{++}\to\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_{++}$ 为

$$H(\boldsymbol{z})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\\ \phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\mu)\\ \mu\end{pmatrix}. \tag{7}$$

以下给出 $\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)$ 的一些性质.

性质 1 对 $\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)=\boldsymbol{x}-\mu\ln(\varepsilon+\mathrm{e}^{\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}}{\mu}})$，$\mu>0$，有：

i) $\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)=\boldsymbol{x}-\mu[\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{\lambda_1}{\mu}})\boldsymbol{u}_1+\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{\lambda_2}{\mu}})\boldsymbol{u}_2]$，其中 $\lambda_i=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{t}_1+(-1)^i\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{t}_2\|$，$\boldsymbol{u}_i=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1,(-1)^i\frac{\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{t}_2}{\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{t}_2\|}\right), & \boldsymbol{x}_2\neq\boldsymbol{t}_2;\\ \frac{1}{2}(1,(-1)^ik), & \boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{t}_2,\end{cases}$ $\|k\|=1$，$k\in\mathbf{R}^{n-1}$，$i=1,2$，$\boldsymbol{t}=(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$.

ii) 对任意 $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\mu)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}_{++}$，函数 $\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)$ 均为连续可微，且此函数的雅可比为

$$\phi'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)=\begin{pmatrix}L_{\boldsymbol{w}}^{-1}\\ \mu L_{\boldsymbol{w}-\varepsilon}L_{\boldsymbol{w}}^{-1}\\ -\ln\boldsymbol{w}+\frac{1}{\mu}\frac{\boldsymbol{w}-\varepsilon}{\boldsymbol{w}}\end{pmatrix}，其中\ \boldsymbol{w}=\varepsilon+\mathrm{e}^{\frac{x-t}{\mu}}.$$

iii) $\lim\limits_{\mu\to0^+}\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)=\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},0)=\boldsymbol{x}-[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}]_+$.

iv) $\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},0)=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\in K^n$，$\boldsymbol{t}\in K^n$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}=0$.

证明　1) 由式(2)—(5) 和 $\hat{g}(\boldsymbol{x})=\ln(1+\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}})$ 可证得 i).

2) 由函数 $\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)$ 的表达式易知，函数在任一点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}_{++}$ 连续可微. 因 $\boldsymbol{w}\in\operatorname{int}K$，则可知 L_w 是可逆的，且 $w'_x=\frac{1}{\mu}(L_w-L_\varepsilon)$，$w'_t=-\frac{1}{\mu}(L_w-L_\varepsilon)$，$w'_\mu=-\frac{1}{\mu^2}(L_w-L_\varepsilon)$. 故由 $\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)$ 的定义可知 $\phi'_x=L_w^{-1}$，$\phi'_t=\boldsymbol{I}-L_w^{-1}$，$\phi'_\mu=-\ln L_w+\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{I}-L_w^{-1})$.

3) $\lim\limits_{\mu\to0^+}\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)=\boldsymbol{x}-\lim\limits_{\mu\to0^+}\mu\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{\lambda_1}{\mu}+1})\boldsymbol{u}_1-\lim\limits_{\mu\to0^+}\mu\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{\lambda_2}{\mu}+1})\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{x}-[\lambda_1]_+\boldsymbol{u}_1-[\lambda_2]_+\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{x}-[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}]_+$.

4) 由于 $K^n=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\geqslant0,\forall\boldsymbol{t}\in K^n\}$ 是一个闭的自对偶凸锥，则根据文献[8]中的引理 2.2 可得对任意两个向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，满足 $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}]_+\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\in K^n$，$\boldsymbol{t}\in K^n$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}=0$.

定理 1　定义函数 $H(\boldsymbol{z})$ 如式(7)，则有如下结论：

i) 问题 PSOCP 和 DSOCP 的解与方程组 $H(\boldsymbol{z})=0$ 的解一致.

ii) 对任意 $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\mu)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}_{++}$，$H(\boldsymbol{z})$ 连续可微，其雅可比为

$$H'(\boldsymbol{z})=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{A} & 0 & 0\\ M(\boldsymbol{z}) & N(\boldsymbol{z}) & P(\boldsymbol{z})\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\tag{8}$$

其中 $M(\boldsymbol{z})=L_w^{-1}$，$N(\boldsymbol{z})=\mu L_{w-\varepsilon}L_w^{-1}$，$P(\boldsymbol{z})=-\ln\boldsymbol{w}+\frac{1}{\mu}\frac{\boldsymbol{w}-\varepsilon}{\boldsymbol{w}}$.

iii) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性独立，则对任意 $\mu>0$，$H'(\boldsymbol{z})$ 为非奇异.

证明　1) 因求解问题 PSOCP 和 DSOCP 等价于求解

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{t}=0,\ \boldsymbol{x}\in K^n,\ \boldsymbol{t}\in K^n,$$

则由性质 1 的 iv) 知问题 PSOCP 和 DSOCP 的解与方程组 $H(\boldsymbol{z})=0$ 的解一致，结论 i) 得证.

2) 由式(7) 和性质 1 中的 $\phi'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)$ 表达式易得结论 ii) 成立.

3) 为证明结论 iii)，令 $\Delta\boldsymbol{z}:=(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y},\Delta\mu)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}$. 在此只要证明方程 $H'(\boldsymbol{z})\Delta\boldsymbol{z}=0$ 只有零解即可. 由式(8) 知方程 $H'(\boldsymbol{z})\Delta\boldsymbol{z}=0$ 等价于

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{z}=0,\\ \Delta\mu=0,\\ M(\boldsymbol{z})\Delta\boldsymbol{x}=N(\boldsymbol{z})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}.\end{cases}\tag{9}$$

对式(9) 中第 3 个等式 $M(\boldsymbol{z})\Delta\boldsymbol{x}=N(\boldsymbol{z})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}$，即式 $L_w^{-1}\Delta\boldsymbol{x}=\mu(\boldsymbol{I}-L_w^{-1})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}$ 两边同时左乘以 L_w，

得 $\Delta\boldsymbol{x}=\mu(L_w-\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}$. 再左乘以 $\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(L_w-\boldsymbol{I})^{-1}$, 得 $\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(L_w-\boldsymbol{I})^{-1}\Delta\boldsymbol{x}=\mu\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}$. 因为 $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}=0$, 所以 $\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(L_w-\boldsymbol{I})^{-1}\Delta\boldsymbol{x}=0$. 又由于 $\boldsymbol{w}^2-\boldsymbol{I}^2=0$, 因此 $L_w-\boldsymbol{I}\succ 0$. 故 $(L_w-\boldsymbol{I})^{-1}\succ 0$, 由此得 $\Delta\boldsymbol{x}=0$. 由式(9)得 $N(\boldsymbol{z})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}=0$, 即 $\mu(\boldsymbol{I}-L_w^{-1})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}=0$. 因为 $\mu>0$, 所以 $(\boldsymbol{I}-L_w^{-1})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}=0$. 对 $(\boldsymbol{I}-L_w^{-1})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}=0$ 两边同时左乘 $L_w\succ 0$, 得 $(L_w-\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}=0$, 因为 $L_w-\boldsymbol{I}\succ 0$, 所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}=0$. 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关,所以 $\Delta\boldsymbol{y}=0$.

2 光滑化牛顿算法及其收敛性

给定 $\bar{\mu}>0$, 定义函数 ψ,β 为:

$$\psi(\boldsymbol{z}):=\|H(\boldsymbol{z})\|^2,\ \beta(\boldsymbol{z}):=r\min\{1,\psi(\boldsymbol{z})\}.$$

算法1 对于固定的任意小的正数 ξ, 选取 $\delta\in(0,1)$, $\sigma\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 并令 $(x_0,t_0,\mu_0)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}_{++}$ 为任意初始点. 设 $\mu_0=\bar{\mu}$, $z_0:=(x_0,t_0,\mu_0)$, 再选取常数 $r\in(0,1)$, 使得 r 满足下列条件:

$$r\bar{\mu}<1,\ r\|H(z_0)\|^2<1,\ \boldsymbol{e}_0:=(0,0,\mu_0)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}_{++},\ k:=0.$$

第 1 步 若 $\psi(z_k):=\|H(z_k)\|^2\leqslant\xi$, 则停止算法;否则计算

$$\beta_k:=\beta(z_k):=r\min\{1,\|H(z_k)\|^2\}. \tag{10}$$

第 2 步 求解方程(11)得 $\Delta z_k:=(\Delta x_k,\Delta t_k,\Delta\mu_k)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_{++}$.

$$DH(z_k)\Delta z_k=-H(z_k)+\beta_k\|H(z_k)\|^2\boldsymbol{e}_0, \tag{11}$$

其中 $DH(z_k)$ 为 $H(\boldsymbol{z})$ 在点 z_k 处的雅可比表达式.

第 3 步 α_k 是 $1,\delta,\delta^2,\cdots$ 中满足条件

$$\psi(z_k+\alpha_k\Delta z_k)\leqslant[1-\sigma(1-r\mu_0)\alpha_k]\psi(z_k) \tag{12}$$

的最大数.

第 4 步 令 $\Delta z_{k+1}:=z_k+\alpha_k\Delta z_k$, $k:=k+1$; 转到第 1 步.

定理2 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行向量线性独立,则算法1可产生无穷序列 $\{z_k:=(x_k,t_k,\mu_k)\}$, 且下述结果成立:

i) $\{\psi(z_k)\}$、$\{\|H(z_k)\|\}$ 和 $\{\beta_k\}$ 均是单调下降的,且 $\{\psi(z_k)\}$、$\{\|H(z_k)\|\}$ 收敛于 0.

ii) 记 $\Omega:=\{\boldsymbol{z}:=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\mu)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_{++},\ \mu\geqslant\mu_0\beta(\boldsymbol{z})\|H(\boldsymbol{z})\|^2\}$, 则 $z_k\in\Omega$.

证明 1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行向量线性独立,则类似文献[9]中的定理3.1的证明,可得算法1是可行的. 因此,算法 1 能产生无穷序列 $\{z_k:=(x_k,t_k,\mu_k)\}$. 由式(12)可得 $\{\psi(z_k)\}$ 是单调下降的,因此 $\{\|H(z_k)\|\}$ 和 $\{\beta_k\}$ 均是单调下降的.

2) 利用归纳法证明 ii). 由于 $\beta(z_0)\|H(z_0)\|^2=r\|H(z_0)\|^2\min\{1,\|H(z_0)\|^2\}\leqslant r\|H(z_0)\|^2<1$, 因此 $\mu_0\geqslant\mu_0\beta(z_0)\|H(z_0)\|^2$, 故 $z_0\in\Omega$. 假设 $z_k\in\Omega$, 即 $\mu_k\geqslant\mu_0\beta_k\|H(z_k)\|^2$, 则

$$\begin{aligned}&\mu_{k+1}-\mu_0\beta_{k+1}\|H(z_{k+1})\|^2=\mu_k+\alpha_k\Delta\mu_k-\mu_0\beta_{k+1}\|H(z_{k+1})\|^2=\\&\quad\mu_k+\alpha_k[-\mu_k+\mu_0\beta_k\|H(z_k)\|^2]-\mu_0\beta_{k+1}\|H(z_{k+1})\|^2=(1-\alpha_k)\mu_k+\\&\quad\alpha_k\mu_0\beta_k\|H(z_k)\|^2-\mu_0\beta_{k+1}\|H(z_{k+1})\|^2\geqslant(1-\alpha_k)\mu_0\beta_k\|H(z_k)\|^2+\\&\quad\alpha_k\mu_0\beta_k\|H(z_k)\|^2-\mu_0\beta_{k+1}\|H(z_{k+1})\|^2=\mu_0\beta_k\|H(z_k)\|^2-\mu_0\beta_{k+1}\|H(z_{k+1})\|^2=\\&\quad\mu_0[\beta_k\|H(z_k)\|^2-\beta_{k+1}\|H(z_{k+1})\|^2]\geqslant 0.\end{aligned} \tag{13}$$

式(13)中的第1个不等式可由 $z_k\in\Omega$ 得到,第2个等式可由式(10)得到,最后的不等式($\geqslant 0$)可由结果 i) 得到.

假设1 问题 SCCP 的解集 $S:=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n:\boldsymbol{x}\in K^n,\boldsymbol{t}\in K^n,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}=0,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{c}\}$ 为非空有界.

定理3 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行向量线性独立, $\{z_k:=(x_k,t_k,\mu_k)\}$ 是由算法1得到的无限序列,则 $\{z_k:=(x_k,t_k,\mu_k)\}$ 任一聚点 $z_*=(x_*,t_*,\mu_*)$ 是 $H(\boldsymbol{z})=0$ 的解.

证明　因证明类似于文献[9]中定理 3.2 的证明，故在此省略证明.

3　数值试验

本文利用 Matlab 编写程序来测试算法 1，数值试验的参数设置为：$\sigma=0.25$，$r=0.2$，$\delta=0.95$，$\mu_0=0.1$，$\boldsymbol{e}_0=(0,0,0.1)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}_{++}$，$x_0=0.5\varepsilon\in\mathbf{R}^n$，$t_0=0\in\mathbf{R}^m$，$z_0=(x_0,t_0,\mu_0)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}_{++}$.

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4 & 3 & & & & \\ -3 & 4 & 3 & & & \\ & -3 & 4 & 3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -3 & 4 & 3 \\ & & & & -3 & 4\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{m\times m},\ \boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B}\ \mathrm{randn}(m,n-m)],\ \boldsymbol{c}=10\boldsymbol{e}_n+4\mathrm{randn}(n,1)-$$

$2\mathrm{ones}(n,1)$，$\boldsymbol{b}=10\boldsymbol{e}_m+4\mathrm{randn}(m,1)-2\mathrm{ones}(m,1)$. 试验结果如表 1 所示. 表 1 中 CPU-time 为算法所需时间，iter 为迭代次数. 从表 1 可以看出，算法 1 在很短时间内即可找到符合条件的解，说明其对求解较大规模二阶锥互补问题是有效的.

表 1　算法 1 的数值试验结果

m	n	CPU-time/s	iter
100	300	0.129 084	2
200	600	0.694 650	2
300	900	5.040 654	3
400	1200	8.509 695	2
500	1500	15.830 116	2
800	2000	39.793 548	2

参考文献：

[1]　CHEN X，TSENG P. Non-interior continuation methods for solving semidefinite complementarity problems[J]. Math Program A，2003，95：431-474.

[2]　QI L，SUN D. Smoothing funchtions and smoothing Newton method for complementarity and variational inequality problems[J]. J Opt Theory and Appl，2002，113(1)：121-147.

[3]　CHI X N，LIU S Y. A one-step smoothing Newton method for second-order cone programming[J]. J Comput Appl Math，2009，223：114-123.

[4]　CHI X N，LIU S Y. A non-interior continuation method for second-order cone programming[J]. Optimization，2009，58：965-979.

[5]　FANG L，HE G P，HU Y H. A new smoothing Newton-type method for second-order cone programming problems[J]. Appl Math Comput，2009，215：1020-1029.

[6]　FUKUSHIMA M，LUO Z，TSENG P. Smoothing functions for second-order-cone complementarity problems[J]. SIAM J Optim，2002，12：436-460.

[7]　ZHANG J，ZHANG K. A variant smoothing Newton method for P_0-NCP based on a new smoothing function[J]. J Comput Appl Math，2009，225：1-8.

[8]　ZARANTONELLO E H. Projections on Convex Sets in Hilbert Space and Spectral Theory. In Contributions to Nonlinear Functional Analysis[M]. New York：Academic Press，1971：237-424.

[9]　芮绍平，张杰. 一种具有全局收敛性的求解二阶锥规划的非精确光滑算法[J]. 系统科学与数学，2012，32：257-264.