

文章编号: 1004-4353(2019)03-0194-07

# 基于 IGOWLA 算子及三元区间数相似度的 区间型组合预测模型

杜康, 袁宏俊

(安徽财经大学 统计与应用数学学院, 安徽 蚌埠 233030)

**摘要:** 为了提高区间型数据的预测精度, 构建了一种基于诱导广义有序加权对数平均(IGOWLA)算子及三元区间数相似度的区间型组合预测模型. 首先将传统的区间数转化为三元区间数, 然后利用 IGOWLA 算子对三元区间数进行集结, 最后选取三元区间数相似度作为相关性指标构建模型. 实例分析表明, 该模型能有效地提高区间型数据的预测精度, 是一种优性组合预测模型. 另外, 通过分析模型中的参数  $\lambda$ , 给出了参数  $\lambda$  的最优取值范围.

**关键词:** IGOWLA 算子; 相似度; 三元区间数; 区间型组合预测

中图分类号: F224

文献标识码: A

## The interval combination forecasting model based on the IGOWLA operator and the similarity of ternary interval numbers

DU Kang, YUAN Hongjun

(School of Statistics and Applied Mathematics, Anhui University of Finance and Economics, Bengbu 233030, China)

**Abstract:** In order to improve the prediction accuracy of interval data, the interval combination prediction model based on the induced generalized ordered weighted logarithmic averaging (IGOWLA) operator and the similarity of ternary interval numbers is constructed. Firstly, the traditional interval numbers are converted into the ternary interval numbers. Then the IGOWLA operator is used to aggregate the ternary interval numbers. Finally, the similarity of ternary interval numbers is selected as the correlation index to construct the model. The result of the example shows that the model can effectively improve the prediction accuracy of interval data, and it is a superior combination prediction model. In addition, through the analysis of parameter  $\lambda$  in the model, the optimum range of parameter  $\lambda$  is given.

**Keywords:** IGOWLA operator; similarity; ternary interval numbers; interval combination forecasting

### 0 引言

由于预测对象的复杂性和不确定性, 利用单一方法进行预测其结果往往不够精确, 甚至可能产生较大的偏差. 为了解决这一问题, 1969 年 Bates 等<sup>[1]</sup>首次提出了组合预测方法. 由于组合预测方法能有效地提高预测精度, 因此受到国内外学者的关注. 早期的组合预测模型主要研究的是实数型数据, 但由于预测对象往往受很多不确定性因素的影响, 因此区间型组合预测方法逐渐受到人们的重视. 目前, 区间型组合预测方法的研究主要分为以下 3 种: ①利用区间数的左、右端点或区间数的中点和半径构建组

合预测模型.例如:文献[2]利用诱导有序加权几何平均(IOWGA)算子分别对区间数的左、右端点进行集结,以对数误差平方和作为准则构建了一种组合预测模型.文献[3]利用诱导有序加权平均(IOWA)算子分别对区间数的中点和半径进行集结,以相关系数作为准则构建了一种组合预测模型.文献[4]利用区间数的中点和半径,并将灰色关联度作为准则构建了一种定权系数和变权系数的组合预测模型.②通过信息集成算子(COWA算子<sup>[5]</sup>、COWHA算子<sup>[6]</sup>等)将区间数转化为实数,然后利用该实数构建组合预测模型.例如:文献[7]提出了一种诱导有序加权连续区间广义有序加权平均(IOWC-GOWA)算子,然后利用该算子将区间数转化为实数,并选取指数支撑度作为准则构建了一种组合预测模型.文献[8]提出了一种连续区间有序几何加权平均 Power(COWG-WPA)算子,然后利用该算子将区间数转化为实数,并选用广义绝对误差 $\lambda$ 次和作为准则构建了一种组合预测模型.文献[9]利用诱导连续有序加权平均(ICOWA)算子将区间数转化为实数,并通过引入 Theil 不等系数构建了一种组合预测模型.③将区间数进行等价转化,目前相关研究主要是先将区间数转化为联系数,然后利用该联系数构建组合预测模型.例如:文献[10]首先将区间数转化为二元联系数,然后利用诱导有序加权调和平均(IOWHA)算子分别对二元联系数的同部和异部进行集结,并选取向量夹角余弦作为准则构建了一种组合预测模型.文献[11]也先将区间数转化为二元联系数,然后选取联系数贴进度作为准则构建了一种组合预测模型.由于上述前两种研究方法没有充分利用区间数的信息,因此其构建的组合预测模型的预测精度相对较低.基于此,本文利用第3种研究方法将传统的区间数转化为三元区间数,以此构建一种新的区间型组合预测模型,并通过实例分析验证该模型的有效性.

## 1 基本概念

**定义 1**<sup>[12]43</sup> 若  $X = [a^l, a^u] = \{x \mid a^l \leq x \leq a^u, a^l, a^u \in \mathbf{R}\}$ , 则称  $X$  为二元区间数, 简称为区间数. 其中,  $a^l$  和  $a^u$  分别表示区间数的左端点和右端点. 当  $a^l = a^u$  时, 区间数退化为一个实数. 若  $Y = [a^l, a^*, a^u] = \{y \mid a^l \leq a^* \leq a^u, a^l, a^*, a^u \in \mathbf{R}\}$ , 则称  $Y$  为三元区间数, 又称三参数区间数. 同理,  $a^l$  和  $a^u$  分别表示三元区间数的左端点和右端点,  $a^*$  表示在区间范围内取值可能性最大的点, 称为三元区间数的重心. 另外, 当  $a^l = a^* = a^u$  时, 三元区间数退化为一个实数.

**定义 2**<sup>[12]44</sup> 设  $a = [a^l, a^*, a^u]$  和  $b = [b^l, b^*, b^u]$  为任意两个非负三元区间数, 则  $a$  和  $b$  之间有如下运算关系: ①  $a = b \Leftrightarrow a^l = b^l, a^* = b^*, a^u = b^u$ ; ②  $a + b = [a^l + b^l, a^* + b^*, a^u + b^u]$ ; ③  $ab = [a^l b^l, a^* b^*, a^u b^u]$ ; ④  $\mu a = [\mu a^l, \mu a^*, \mu a^u]$ ,  $\mu > 0$ .

**定义 3**<sup>[13]</sup> 设  $V = \{\langle v_1, a_1 \rangle, \langle v_2, a_2 \rangle, \dots, \langle v_n, a_n \rangle\}$  为诱导二维数组,  $v_i$  为  $a_i$  的诱导值,  $b_i$  是由  $a_1, a_2, \dots, a_n$  根据诱导值  $v_1, v_2, \dots, v_n$  的大小降序排列的第  $i$  个数. 加权向量  $\mathbf{W} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  满足  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0$ . 若  $f_w(\langle v_1, a_1 \rangle, \langle v_2, a_2 \rangle, \dots, \langle v_n, a_n \rangle) = \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (\ln b_i)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\}$ , 则称函数  $f_w$  为广义诱导有序加权对数平均(IGOWLA)算子. 其中,  $\omega_i$  与  $a_i$  无关, 但与  $b_i$  有关,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

特别地, 当  $\lambda = 1$  时,  $f_w(\langle v_1, a_1 \rangle, \langle v_2, a_2 \rangle, \dots, \langle v_n, a_n \rangle) = \exp\left\{\sum_{i=1}^n \omega_i \ln b_i\right\}$ , 则称函数  $f_w$  为诱导有序加权算术对数平均(IOWLA)算子; 当  $\lambda = -1$  时,  $f_w(\langle v_1, a_1 \rangle, \langle v_2, a_2 \rangle, \dots, \langle v_n, a_n \rangle) = 1 / \exp\left\{\sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\ln b_i}\right\}$ , 则称函数  $f_w$  为诱导有序加权调和对数平均(IOWHLA)算子; 当  $\lambda \rightarrow 0$  时,  $f_w(\langle v_1, a_1 \rangle, \langle v_2, a_2 \rangle, \dots, \langle v_n, a_n \rangle) = \exp\left\{\sum_{i=1}^n (\ln b_i)^{\omega_i}\right\}$ , 则称函数  $f_w$  为诱导有序加权几何对数平均(IOWGLA)算子.

**定义 4**<sup>[14]</sup> 设  $a$  和  $b$  为正三元区间数,  $a = [a^l, a^*, a^u]$ ,  $b = [b^l, b^*, b^u]$ , 则称

$$s(a, b) = \frac{a^l b^l + a^* b^* + a^u b^u}{\max\{(a^l)^2 + (a^*)^2 + (a^u)^2, (b^l)^2 + (b^*)^2 + (b^u)^2\}}$$

为  $a$  和  $b$  的相似度.

根据定义 4 可知,  $s(a, b)$  具有性质: ①  $0 < s(a, b) \leq 1$ ; ②  $s(a, b) = s(b, a)$ ; ③  $s(a, b) = 1 \Leftrightarrow a = b$ .

**证明** 由三元区间数相似度的定义可知, 上述性质 ② 和 ③ 显然成立. 下证性质 ①. 不妨设  $(a^1)^2 + (a^*)^2 + (a^u)^2 \geq (b^1)^2 + (b^*)^2 + (b^u)^2$ , 则可得

$$0 < s(a, b) = \frac{a^1 b^1 + a^* b^* + a^u b^u}{(a^1)^2 + (a^*)^2 + (a^u)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(a^1 b^1 + a^* b^* + a^u b^u)}{(a^1)^2 + (a^*)^2 + (a^u)^2} = \frac{[(a^1)^2 + (a^*)^2 + (a^u)^2] + [(b^1)^2 + (b^*)^2 + (b^u)^2] - [(a^1 - b^1)^2 + (a^* - b^*)^2 + (a^u - b^u)^2]}{2[(a^1)^2 + (a^*)^2 + (a^u)^2]} \leq 1 - \frac{(a^1 - b^1)^2 + (a^* - b^*)^2 + (a^u - b^u)^2}{2[(a^1)^2 + (a^*)^2 + (a^u)^2]} \leq 1.$$

## 2 区间型组合预测模型的构建

设某一预测对象的实际区间数序列为  $\{X_t = [a_t^l, a_t^u] \mid t = 1, 2, \dots, N\}$ , 现有  $m$  种单项预测方法对其进行预测, 记第  $i$  种单项预测方法在第  $t$  时刻的预测区间数序列为  $\{X_{it} = [a_{it}^l, a_{it}^u] \mid i = 1, 2, \dots, m; t = 1, 2, \dots, N\}$ , 第  $t$  时刻的  $m$  种单项预测方法的组合预测区间数序列为  $\{\hat{X}_t = [\hat{a}_t^l, \hat{a}_t^u] \mid t = 1, 2, \dots, N\}$ . 设  $\mathbf{W} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$  为组合预测中各单项预测方法的加权系数向量, 且  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1, \omega_i \geq 0$ . 由于预测对象的复杂性和不确定性, 可取区间数的中点作为该区间上取值可能性最大的点, 从而将区间数转化成三元区间数; 则预测对象的实际区间数序列对应的三元区间数序列为  $\{Y_t = [a_t^l, a_t^s, a_t^u] \mid t = 1, 2, \dots, N\}$ , 第  $i$  种单项预测方法在第  $t$  时刻对应的三元区间预测值序列为  $\{Y_{it} = [a_{it}^l, a_{it}^s, a_{it}^u] \mid i = 1, 2, \dots, m; t = 1, 2, \dots, N\}$ , 第  $t$  时刻对应的三元区间组合预测值序列为  $\{\hat{Y}_t = [\hat{a}_t^l, \hat{a}_t^s, \hat{a}_t^u] \mid t = 1, 2, \dots, N\}$ .

**定义 5** 设  $v_{it}^l, v_{it}^s$  和  $v_{it}^u$  分别为第  $i$  种单项预测方法在第  $t$  时刻的三元区间预测值的左端点、重心以及右端点的预测精度(分别简称为左精度、重心精度和右精度), 则  $v_{it}^l, v_{it}^s$  和  $v_{it}^u$  可表示为:

$$v_{it}^l = \begin{cases} 1 - \left| \frac{a_t^l - a_{it}^l}{a_t^l} \right|, & 0 \leq \left| \frac{a_t^l - a_{it}^l}{a_t^l} \right| < 1; \\ 0, & \left| \frac{a_t^l - a_{it}^l}{a_t^l} \right| \geq 1; \end{cases} \quad v_{it}^s = \begin{cases} 1 - \left| \frac{a_t^s - a_{it}^s}{a_t^s} \right|, & 0 \leq \left| \frac{a_t^s - a_{it}^s}{a_t^s} \right| < 1; \\ 0, & \left| \frac{a_t^s - a_{it}^s}{a_t^s} \right| \geq 1; \end{cases}$$

$$v_{it}^u = \begin{cases} 1 - \left| \frac{a_t^u - a_{it}^u}{a_t^u} \right|, & 0 \leq \left| \frac{a_t^u - a_{it}^u}{a_t^u} \right| < 1; \\ 0, & \left| \frac{a_t^u - a_{it}^u}{a_t^u} \right| \geq 1. \end{cases}$$

将左精度  $v_{it}^l$  作为诱导值, 可诱导出第  $t$  时刻左端点的二维数组  $\{\langle v_{1t}^l, a_{1t}^l \rangle, \langle v_{2t}^l, a_{2t}^l \rangle, \dots, \langle v_{mt}^l, a_{mt}^l \rangle\}$ . 同理, 以重心精度  $v_{it}^s$  和右精度  $v_{it}^u$  可诱导出第  $t$  时刻重心和右端点的二维数组  $\{\langle v_{1t}^s, a_{1t}^s \rangle, \langle v_{2t}^s, a_{2t}^s \rangle, \dots, \langle v_{mt}^s, a_{mt}^s \rangle\}$  和  $\{\langle v_{1t}^u, a_{1t}^u \rangle, \langle v_{2t}^u, a_{2t}^u \rangle, \dots, \langle v_{mt}^u, a_{mt}^u \rangle\}$ .

**定义 6** 令  $\hat{a}_t^l, \hat{a}_t^s$  和  $\hat{a}_t^u$  分别为第  $t$  时刻基于 IGOWLA 算子的三元区间组合预测值的左端点、重心以及右端点, 则根据定义 3 可得:

$$\hat{a}_t^l = f_w(\langle v_{1t}^l, a_{1t}^l \rangle, \langle v_{2t}^l, a_{2t}^l \rangle, \dots, \langle v_{mt}^l, a_{mt}^l \rangle) = \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^m \omega_i (\ln b_{it}^l)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\},$$

$$\hat{a}_t^s = f_w(\langle v_{1t}^s, a_{1t}^s \rangle, \langle v_{2t}^s, a_{2t}^s \rangle, \dots, \langle v_{mt}^s, a_{mt}^s \rangle) = \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^m \omega_i (\ln b_{it}^s)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\},$$

$$\hat{a}_t^u = f_w(\langle v_{1t}^u, a_{1t}^u \rangle, \langle v_{2t}^u, a_{2t}^u \rangle, \dots, \langle v_{mt}^u, a_{mt}^u \rangle) = \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^m \omega_i (\ln b_{it}^u)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\}.$$

其中,  $b_{it}^l$  是由  $a_{1t}^l, a_{2t}^l, \dots, a_{mt}^l$  根据诱导值  $v_{1t}^l, v_{2t}^l, \dots, v_{mt}^l$  大小降序排列的第  $i$  个数,  $b_{it}^s$  是由  $a_{1t}^s, a_{2t}^s, \dots, a_{mt}^s$  根据诱导值  $v_{1t}^s, v_{2t}^s, \dots, v_{mt}^s$  大小降序排列的第  $i$  个数,  $b_{it}^u$  是由  $a_{1t}^u, a_{2t}^u, \dots, a_{mt}^u$  根据诱导值  $v_{1t}^u, v_{2t}^u, \dots, v_{mt}^u$  大小降序排列的第  $i$  个数.  $\mathbf{W} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$  为 IGOWLA 算子的加权系数向量, 且满足  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$ ,

$w_i \geq 0$ . 显然,  $\hat{a}_i^l, \hat{a}_i^*$  和  $\hat{a}_i^u$  均为加权向量  $\mathbf{W}$  的函数.

**定义 7** 令  $s(Y_{it}, Y_t)$  为第  $i$  种单项预测方法的三元区间预测值序列与实际三元区间数序列的相似度,  $s(\hat{Y}_t, Y_t)$  为组合预测方法的三元区间预测值序列与实际三元区间数序列的相似度, 则由定义 4 可得:

$$s(Y_{it}, Y_t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{a_{it}^l a_t^l + a_{it}^* a_t^* + a_{it}^u a_t^u}{\max\{(a_{it}^l)^2 + (a_{it}^*)^2 + (a_{it}^u)^2, (a_t^l)^2 + (a_t^*)^2 + (a_t^u)^2\}},$$

$$s(\hat{Y}_t, Y_t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\hat{a}_i^l a_t^l + \hat{a}_i^* a_t^* + \hat{a}_i^u a_t^u}{\max\{(\hat{a}_i^l)^2 + (\hat{a}_i^*)^2 + (\hat{a}_i^u)^2, (a_t^l)^2 + (a_t^*)^2 + (a_t^u)^2\}}.$$

根据定义 6 可知, 三元区间组合预测值序列  $\{\hat{Y}_t = [\hat{a}_t^l, \hat{a}_t^*, \hat{a}_t^u] \mid t=1, 2, \dots, N\}$  是加权系数  $w_1, w_2, \dots, w_m$  的函数, 所以  $s(\hat{Y}_t, Y_t)$  也是加权系数  $w_1, w_2, \dots, w_m$  的函数. 根据定义 4 可知,  $s(\hat{Y}_t, Y_t)$  在  $(0, 1]$  上取值越大, 三元区间预测值序列与实际三元区间数序列越相似, 由此可以构建如下基于 IGOWLA 算子及相似度的区间型组合预测模型:

$$\max s(\hat{Y}_t, Y_t);$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{i=1}^m w_i = 1, \\ w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (\text{I})$$

模型(I)的加权系数向量( $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ )可以通过 Lingo 或者 Matlab 软件进行求解.

**定义 8** 设  $s_{\min} = \min s(Y_{it}, Y_t)$ ,  $s_{\max} = \max s(Y_{it}, Y_t)$ , 若:

- 1)  $s(\hat{Y}_t, Y_t) < s_{\min}$ , 则区间型组合预测模型(I)是劣性组合预测模型;
- 2)  $s_{\min} \leq s(\hat{Y}_t, Y_t) \leq s_{\max}$ , 则区间型组合预测模型(I)是非劣性组合预测模型;
- 3)  $s(\hat{Y}_t, Y_t) > s_{\max}$ , 则区间型组合预测模型(I)是优性组合预测模型.

### 3 实例分析

为了验证本文提出的区间型组合预测模型(I)的有效性, 选用文献[15]中的数据对其进行实例分析, 数据见表 1. 评价指标选用平均区间位置误差平方和(MSEP)、平均区间长度误差平方和(MSEL)、平均区间误差平方和(MSEI)以及平均区间相对误差和(MRIE), 各指标的计算公式为:

$$MSEP = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (c_t - \hat{c}_t)^2, \quad MSEL = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_t - \hat{r}_t)^2,$$

$$MSEI = MSEP + MSEL = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N (c_t - \hat{c}_t)^2 + \sum_{i=1}^N (r_t - \hat{r}_t)^2 \right), \quad MRIE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|c_t - \hat{c}_t|}{r_t + \hat{r}_t}.$$

表 1 区间数及其等价的三元区间数

实际区间数		方法 1 的预测区间数		方法 2 的预测区间数		方法 3 的预测区间数	
$[a^l, a^u]$	$[a^l, a^*, a^u]$	$[\hat{a}_1^l, \hat{a}_1^u]$	$[\hat{a}_1^l, \hat{a}_1^*, \hat{a}_1^u]$	$[\hat{a}_{2r}^l, \hat{a}_{2r}^u]$	$[\hat{a}_{2r}^l, \hat{a}_{2r}^*, \hat{a}_{2r}^u]$	$[\hat{a}_{3r}^l, \hat{a}_{3r}^u]$	$[\hat{a}_{3r}^l, \hat{a}_{3r}^*, \hat{a}_{3r}^u]$
[3.0, 4.0]	[3.0, 3.5, 4.0]	[2.4, 5.0]	[2.4, 3.7, 5.0]	[3.6, 5.4]	[3.6, 4.5, 5.4]	[3.0, 3.6]	[3.0, 3.3, 3.6]
[5.0, 5.6]	[5.0, 5.3, 5.6]	[2.2, 6.0]	[2.2, 4.1, 6.0]	[5.0, 6.0]	[5.0, 5.5, 6.0]	[4.0, 5.2]	[4.0, 4.6, 5.2]
[4.0, 6.0]	[4.0, 5.0, 6.0]	[3.0, 8.0]	[3.0, 5.5, 8.0]	[5.2, 7.0]	[5.2, 6.1, 7.0]	[4.3, 5.1]	[4.3, 4.7, 5.1]
[6.0, 10.0]	[6.0, 8.0, 10.0]	[4.6, 11.0]	[4.6, 7.8, 11.0]	[6.8, 11.6]	[6.8, 9.2, 11.6]	[6.1, 7.3]	[6.1, 6.7, 7.3]
[6.6, 8.8]	[6.6, 7.7, 8.8]	[6.0, 12.4]	[6.0, 9.2, 12.4]	[8.0, 9.6]	[8.0, 8.8, 9.6]	[7.0, 8.0]	[7.0, 7.5, 8.0]
[9.0, 11.0]	[9.0, 10.0, 11.0]	[7.0, 15.0]	[7.0, 11.0, 15.0]	[9.6, 12.0]	[9.6, 10.8, 12.0]	[9.1, 9.9]	[9.1, 9.5, 9.9]

根据定义 5 可分别求得 3 种单项预测方法在不同时刻的左精度、重心精度、右精度及其所诱导的二维数组, 结果见表 2. 根据定义 7 可分别求得 3 种单项预测方法的三元区间预测值序列与实际三元区间数序列的相似度, 结果见表 3.

表 2 3 种单项预测方法在不同时刻的诱导二维数组

诱导二维数组	不同时刻的诱导二维数组					
	1	2	3	4	5	6
$\langle v_{1t}^I, a_{1t}^I \rangle$	$\langle 0.800, 2.4 \rangle$	$\langle 0.440, 2.2 \rangle$	$\langle 0.750, 3.0 \rangle$	$\langle 0.767, 4.6 \rangle$	$\langle 0.909, 6.0 \rangle$	$\langle 0.778, 7.0 \rangle$
$\langle v_{1t}^*, a_{1t}^* \rangle$	$\langle 0.943, 3.7 \rangle$	$\langle 0.774, 4.1 \rangle$	$\langle 0.900, 5.5 \rangle$	$\langle 0.975, 7.8 \rangle$	$\langle 0.805, 9.2 \rangle$	$\langle 0.900, 11.0 \rangle$
$\langle v_{1t}^u, a_{1t}^u \rangle$	$\langle 0.750, 5.0 \rangle$	$\langle 0.929, 6.0 \rangle$	$\langle 0.667, 8.0 \rangle$	$\langle 0.900, 11.0 \rangle$	$\langle 0.591, 12.4 \rangle$	$\langle 0.636, 15.0 \rangle$
$\langle v_{2t}^I, a_{2t}^I \rangle$	$\langle 0.800, 3.6 \rangle$	$\langle 1.000, 5.0 \rangle$	$\langle 0.700, 5.2 \rangle$	$\langle 0.867, 6.8 \rangle$	$\langle 0.788, 8.0 \rangle$	$\langle 0.933, 9.6 \rangle$
$\langle v_{2t}^*, a_{2t}^* \rangle$	$\langle 0.714, 4.5 \rangle$	$\langle 0.962, 5.5 \rangle$	$\langle 0.780, 6.1 \rangle$	$\langle 0.850, 9.2 \rangle$	$\langle 0.857, 8.8 \rangle$	$\langle 0.920, 10.8 \rangle$
$\langle v_{2t}^u, a_{2t}^u \rangle$	$\langle 0.650, 5.4 \rangle$	$\langle 0.929, 6.0 \rangle$	$\langle 0.833, 7.0 \rangle$	$\langle 0.840, 11.6 \rangle$	$\langle 0.909, 9.6 \rangle$	$\langle 0.909, 12.0 \rangle$
$\langle v_{3t}^I, a_{3t}^I \rangle$	$\langle 1.000, 3.0 \rangle$	$\langle 0.800, 4.0 \rangle$	$\langle 0.925, 4.3 \rangle$	$\langle 0.983, 6.1 \rangle$	$\langle 0.939, 7.0 \rangle$	$\langle 0.989, 9.1 \rangle$
$\langle v_{3t}^*, a_{3t}^* \rangle$	$\langle 0.943, 3.3 \rangle$	$\langle 0.868, 4.6 \rangle$	$\langle 0.940, 4.7 \rangle$	$\langle 0.838, 6.7 \rangle$	$\langle 0.974, 7.5 \rangle$	$\langle 0.950, 9.5 \rangle$
$\langle v_{3t}^u, a_{3t}^u \rangle$	$\langle 0.900, 3.6 \rangle$	$\langle 0.929, 5.2 \rangle$	$\langle 0.850, 5.1 \rangle$	$\langle 0.730, 7.3 \rangle$	$\langle 0.909, 8.0 \rangle$	$\langle 0.900, 9.9 \rangle$

为了计算方便,首先利用 Lingo 软件计算不同  $\lambda$  取值下的加权向量  $W$ , 然后根据定义 7 计算组合预测方法的三元区间预测值序列与实际三元区间数序列的相似度, 结果见表 4.

根据定义 6, 可以计算出不同  $\lambda$  取值下的组合预测区间数, 结果见表 5.

表 3 3 种单项预测方法的三元区间预测值序列与实际三元区间数序列的相似度

	方法 1	方法 2	方法 3
相似度	0.862 9	0.871 4	0.910 7

表 4 不同  $\lambda$  取值下组合预测方法的加权系数以及相似度

参数取值	$w_1$	$w_2$	$w_3$	相似度
$\lambda = -2$	0.809 6	0.071 1	0.119 3	0.977 9
$\lambda = -0.1$	0.876 0	0	0.124 0	0.981 7
$\lambda = 1$	0.884 8	0	0.115 2	0.983 1

表 5 实际区间数和不同  $\lambda$  取值下的组合预测区间数

实际区间数	组合预测区间数		
	$\lambda = -2$	$\lambda = -0.1$	$\lambda = 1$
[3.0, 4.0]	[3.03, 3.91]	[3.07, 3.82]	[3.07, 3.81]
[5.0, 5.6]	[4.59, 5.90]	[4.65, 5.90]	[4.68, 5.91]
[4.0, 6.0]	[4.31, 6.98]	[4.41, 7.12]	[4.40, 7.12]
[6.0, 10.0]	[5.97, 10.60]	[5.91, 10.54]	[5.93, 10.57]
[6.6, 8.8]	[7.05, 8.64]	[7.12, 8.55]	[7.12, 8.51]
[9.0, 11.0]	[8.89, 12.21]	[8.84, 12.37]	[8.86, 12.35]

根据上述 4 种误差指标的计算公式, 分别计算单项预测方法以及本文所提出的组合预测方法的 MSEP、MSEL、MSEI 和 MRIE, 结果见表 6.

表 6 不同预测方法的误差指标值

预测方法	MSEP	MSEL	MSEI	MRIE
单项方法 1	0.836 7	3.383 3	4.220 0	0.231 1
单项方法 2	0.923 3	0.083 3	1.006 6	0.459 8
单项方法 3	0.433 3	0.528 3	0.961 6	0.370 7
组合预测方法( $\lambda = -2$ )	0.137 8	0.145 2	0.283 0	0.118 1
组合预测方法( $\lambda = -0.1$ )	0.171 6	0.180 8	0.352 4	0.126 0
组合预测方法( $\lambda = 1$ )	0.169 6	0.177 3	0.347 0	0.123 4
文献[7]的方法( $\lambda = 3$ )	0.278 9	0.388 8	0.667 7	0.165 8
文献[16]的方法( $\alpha = 0.5$ )	0.266 5	0.234 1	0.500 6	0.237 2

利用表 3、表 4 和表 6 中结果,可从以下 2 个方面对区间型组合预测模型(I) 的有效性进行判定:① 从三元区间数的相似度方面看,区间型组合预测模型(I) 的相似度明显大于单项预测方法的相似度,且均大于单项预测方法相似度的最大值,这说明区间型组合预测模型(I) 是优性组合预测模型;② 从 4 种误差指标值来看,区间型组合预测模型(I) 的误差指标值显著低于各单项预测方法,且低于文献[7] 和文献[16] 中的方法,这说明区间型组合预测模型(I) 不仅优于各单项预测方法,而且优于文献[7] 和文献[16] 中的组合预测方法.由此说明,本文所提出的基于 IGOWLA 算子及其相似度的区间型组合预测模型(I) 是有效的.

### 3.1 比较分析

为了进一步说明区间型组合预测模型(I) 的优缺点,将模型(I) 的误差指标值与引言中的前两类区间型组合预测模型的误差指标值(见表 7) 进行比较.

表 7 两类区间型组合预测方法的 4 种误差指标值

类别	预测方法	MSEP	MSEL	MSEI	MRIE
第 1 类	文献[17] 的方法( $k = 0.2$ )	0.076 4	0.137 6	0.214 0	0.124 3
	文献[18] 的方法( $\lambda = -1$ )	0.117 6	0.082 2	0.199 8	0.118 1
	文献[2] 的方法( $\alpha = 0.8$ )	0.131 2	0.074 6	0.205 8	0.121 8
第 2 类	文献[7] 的方法( $\lambda = 3$ )	0.278 9	0.388 8	0.667 7	0.165 8
	文献[19] 的方法( $\lambda = 2$ )	0.297 7	0.364 0	0.661 7	0.189 8
	文献[20] 的方法( $\lambda = 5$ )	0.341 2	0.324 3	0.665 4	0.216 8

由表 6 和表 7 可知,区间型组合预测模型(I) 的预测精度略低于第 1 类区间型组合预测模型的预测精度,但二者都高于第 2 类区间型组合预测模型的预测精度.第 1 类区间型组合预测模型的预测精度虽然略高于区间型组合预测模型(I) 的预测精度,但因为区间型组合预测模型(I) 充分利用了区间的信息,所以相对更为可靠.

### 3.2 灵敏度分析

为了更加直观地观察参数  $\lambda$  对各单项方法预测的加权系数、相似度以及 4 种误差指标的影响,对参数  $\lambda$  进行灵敏度分析,结果见图 1—图 3.

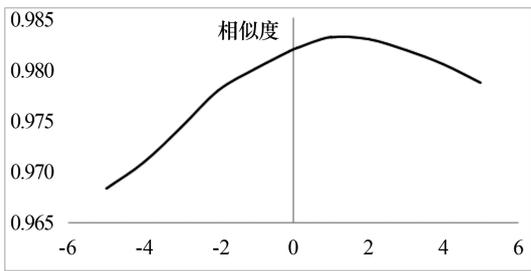


图 1 不同的  $\lambda$  值对相似度的影响

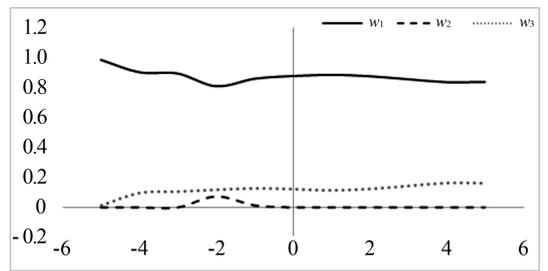


图 2 不同的  $\lambda$  值对加权系数的影响

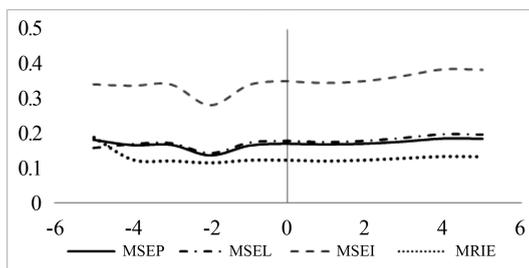


图 3 不同的  $\lambda$  值对 4 种误差指标的影响

由图 1 可以看出： $\lambda$  值对三元区间数的相似度影响较小，总体保持在(0.965,0.985)之间，并且当  $\lambda \in (-2,5)$  时，相似度相对最大，即此时区间型组合预测模型(I)的有效性相对最高. 由图 2 可以看出， $\lambda$  值对加权系数的影响较小，当  $\lambda \leq -2$  时，随着  $\lambda$  的增加， $w_1$  有所下降， $w_2$  和  $w_3$  略微有所上升，且当  $\lambda > -2$  时， $w_1, w_2$  和  $w_3$  基本保持稳定. 由图 3 可以看出， $\lambda$  值对 4 种误差指标的影响也较小，当  $\lambda \in (-4,4)$  时，区间型组合预测模型(I)的预测效果相对最好. 综上所述，为了使本文提出的区间型组合预测模型(I)的预测精度相对最佳，其参数  $\lambda$  的取值范围应在  $(-2,5) \cap (-4,4) = (-2,4)$  上.

#### 4 结束语

研究表明，本文基于 IGOWLA 算子及三元区间数相似度构建的区间型组合预测模型(I)的预测精度优于各单项预测方法和引言中所提的第 1 类、第 2 类区间型组合预测模型，因此模型(I)是一种优性组合预测模型，同时也为构建高精度的区间型组合预测模型提供了一种新思路. 本文在模型(I)中只研究 IGOWLA 算子，并没有研究其他集成算子对该模型预测结果的影响；因此，今后将探讨不同集成算子对该模型预测结果的影响，以得到更高精度的区间型组合预测模型.

#### 参考文献：

- [1] BATES J M, GRANGER C W J. Combination of forecasts[J]. Operations Research Quarterly, 1969,20(4):451-468.
- [2] 胡凌云,袁宏俊. 基于左右端点的 IOWGA 算子的区间型组合预测模型[J]. 统计与决策,2013(11):22-25.
- [3] 陈华友,李翔,金磊,等. 基于相关系数及 IOWA 算子的区间组合预测方法[J]. 统计与决策,2012(6):83-86.
- [4] 钟梅,袁宏俊. 基于改进的组合预测误差区间数组合预测模型[J]. 统计与决策,2017(22):5-10.
- [5] YAGER R R. OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, Cybernetics-Part B, 2004,34(5):1952-1963.
- [6] 陈华友,刘金培,王慧. 一类连续区间数据的有序加权调和(C-OWH)平均算子及其应用[J]. 系统工程理论与实践,2008(7):86-92.
- [7] 江立辉,陈华友,丁芳清,等. 基于 IOWC-GOWA 算子的区间组合预测模型[J]. 计算机工程与应用,2015,51(3):50-54.
- [8] 袁宏俊,胡凌云. 基于连续区间有序几何加权平均 Power 算子的区间型组合预测模型[J]. 数理统计与管理,2019,38(2):270-280.
- [9] 沈永昌,袁宏俊,宋马林. ICOWA 算子的区间组合预测模型[J]. 统计与决策,2016(17):66-69.
- [10] 林义征,袁宏俊,宋马林. 基于 IOWHA 算子与向量夹角余弦的联系数型区间组合预测[J]. 统计与决策,2016(5):84-86.
- [11] 袁宏俊,韦晨珺娃,钟梅. 基于联系数贴近度的区间型组合预测模型及其有效性[J]. 统计与信息论坛,2017,32(6):31-37.
- [12] 广志,张宇文. 基于三参数区间数的灰色模糊综合评判[J]. 系统工程与电子技术,2001,23(9):43-45.
- [13] 江立辉,陈华友,丁芳清,等. 基于 IGOWLA 算子的最优组合预测模型及应用[J]. 统计与决策,2015(4):82-85.
- [14] 徐泽水. 对方案有偏好的三角模糊数型多属性决策方法研究[J]. 系统工程与电子技术,2002,24(8):9-12.
- [15] 徐惠莉,吴柏林,江韶珊. 区间时间序列预测准确度探讨[J]. 数量经济技术经济研究,2008,12(1):133-140.
- [16] 王晓,刘兮,陈华友,等. 基于 IOWA 算子的区间组合预测方法[J]. 武汉理工大学学报(信息与管理工程版),2010,32(2):221-225.
- [17] 胡纪纲,芮源,袁宏俊. 基于区间关联度的 IOWGA 算子的区间组合预测[J]. 统计与决策,2016(12):19-22.
- [18] 胡凌云,袁宏俊,周洁. 基于区间数距离的 IGOWLA 算子的区间型组合预测模型[J]. 延边大学学报(自然科学版),2018,44(2):109-115.
- [19] 曹晓俊,袁宏俊. 连续区间广义有序加权调和平均算子及其在区间组合预测中应用[J]. 南京理工大学学报,2017,41(1):123-131.
- [20] 杜康,袁宏俊. 基于 IOWC-GOWA 算子及相对熵的区间型组合预测模型[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2019,36(4):63-71.