文章编号： 1004-4353(2019)03-0189-05

无穷区间上有序分数阶 q-差分方程边值问题正解的存在性

闫雅雯， 侯成敏*， 孙明哲
(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要： 研究一类定义在无穷区间上的有序分数阶 q-差分方程边值问题. 首先，求出该边值问题解的表达式，并分析其中格林函数的性质；其次，利用锥理论和单调迭代的方法得到了边值问题解的存在性. 最后，举例证明了论文所得结果的有效性.

关键词： 格林函数；无穷区间；单调迭代法
中图分类号： O175.6　　**文献标识码：** A

Existence of positive solution for boundary value problems of ordered fractional q-differences equations on infinite intervals

YAN Yawen, HOU Chengmin*, SUN Mingzhe
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: In this paper, we study a class of ordered fractional q-difference equations defined on infinite intervals. Firstly, the expression of the solution of the boundary value problem is obtained, and the properties of the Green's function are analyzed. Secondly, the monotone iterative method is used to obtain the existence of the solution to the boundary value problem. Finally, an example is given to illustrate the validity of the result.

Keywords: Green's function; infinite interval; monotone iterative method

0 引言

边值问题是微分方程理论的一个重要分支，它被广泛应用于物理、机械、生物等领域. 近年来，许多学者对整数阶、分数阶 q-差分方程边值问题进行了研究，并取得了较好的研究成果[1-4]，但对在无穷区间上的有序分数阶 q-差分问题研究的较少.

文献[5]利用 Banach 不动点定理研究了如下分数阶 q-差分边值问题解的存在性和唯一性：

$$\begin{cases} D_q^\alpha x(t) = f(t, x(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ \alpha \in (n-1, n); \\ (D_q^k x)(0) = 0,\ k = 0, 1, \cdots, n-2,\ D_q^{(n-1)} x(1) = 1. \end{cases}$$

文献[6]利用 Schauder 不动点定理和 Leggett-Willians 不动点定理得到了分数阶 q-差分边值问题：

$$\begin{cases} D_q^\alpha u(t) + f(t, x(t)) = 0,\ t \in [0, \infty); \\ u(0) = 0,\ D_q^{\alpha-1} u(+\infty) = \sum_{i=1}^{m} a_i u(\xi_i) \end{cases}$$

解的存在性和多重性，其中 $0 < q < 1$，$1 < \alpha < 2$，$0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_i \xi_i^{\alpha-1} < \Gamma_q(\alpha)$，$f:([0,\infty), \mathbf{R}) \to [0, \infty)$

收稿日期： 2019-08-10　　**基金项目：** 吉林省教育厅“十三五”科学技术项目(JJKH20170454KJ)
* **通信作者：** 侯成敏(1963—)，女，教授，研究方向为微分方程理论及其应用.

是连续函数.

受上述研究的启发,本文考虑如下边值问题极小非负解的存在性:

$$\begin{cases}D_q^{\beta}(D_q^{\alpha}u(t))+f(t,u(t),Tu(t),Su(t))=0;\\ u(0)=0,\ D_q^{\alpha}u(0)=0,\ D_q^{\alpha-1}u(\infty)=u^*.\end{cases}\tag{1}$$

其中:$t\in J=[0,+\infty)$, $f\in C[J\times P\times P\times P,P]$, $1<\alpha\leqslant 2$, $0<\beta\leqslant 1$, $0<q<1$, D_q^{α} 是 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数, $Su(t)=\int_0^{\infty}h(t,s)u(s)\mathrm{d}_qs$, $Tu(t)=\int_0^t k(t,s)u(s)\mathrm{d}_qs$. $h(t,s)\in C[D_0,\mathbf{R}^+]$, $k(t,s)\in C[D,\mathbf{R}^+]$, $\mathbf{R}^+=[0,+\infty]$, $D=\{(t,s)\in\mathbf{R}^2\mid 0\leqslant s\leqslant t\}$, $D_0=\{(t,s)\in J\times J\}$, $u^*\in\mathbf{R}$. 为计算方便,令 $k^*=\sup\limits_{t\in J}\int_0^t k(t,s)\mathrm{d}_qs<\infty$, $h^*=\sup\limits_{t\in J}\int_0^{\infty}h(t,s)(1+s^{\alpha-1})\mathrm{d}_qs<\infty$,且

$$\lim_{t'\to t}\int_0^{\infty}|h(t',s)-h(t,s)|(1+s^{\alpha-1})\mathrm{d}_qs=0,\ t,t'\in J.$$

假设$(E,\|\cdot\|)$是实 Banach 空间, P 是 E 中的非空闭凸子集. 如果 P 满足如下条件(a)和(b),则称 P 是 E 中的锥:(a) $x\in P$, $\lambda\geqslant 0\Rightarrow\lambda x\in P$;(b) $x\in P$, $-x\in P\Rightarrow x=0$.

给定 E 中锥 P,由此可定义 E 中的半序关系:若 $x,y\in E$, $y-x\in P$,则称 $x\leqslant y$. 本文所用的基本空间 $C_{\infty}([0,\infty),\mathbf{R})=\left\{u\in C([0,\infty),\mathbf{R}):\sup\limits_{t\in J}\dfrac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}}<+\infty\right\}$ 的范数为 $\|u\|_F=\sup\limits_{t\in J}\dfrac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}}$,显然 C_{∞} 是 Banach 空间.

1 预备知识

定义 1[7] 定义函数 $f:J\to\mathbf{R}$ 上的 $\alpha(\geqslant 0)$ 阶 Riemann-Liouville 型 q-积分为:

$$I_q^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^t(t-qs)^{(\alpha-1)}f(s)\mathrm{d}_qs,$$

其中$(I_q^0f)(t)=f(t)$,且等式右侧积分在区间 J 上逐点有定义.

定义 2[8] 定义函数 $f:J\to\mathbf{R}$ 上的 $\alpha(>0)$ 阶 Riemann-Liouville 型 q-导数为:

$$D_q^{\alpha}f(t)=D_q^mD_q^{m-\alpha}h(t),$$

其中 $m=\lceil\alpha\rceil+1$, $\lceil\alpha\rceil$ 表示实数 α 的整数部分,等式右侧积分在区间 J 上逐点有定义,且

$$I_q^{\alpha}D_q^{\alpha}f(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n},\ c_i\in\mathbf{R},\ t\in J.$$

引理 1 令 $y\in C[0,1]\cap L[0,+\infty)$,边值问题

$$\begin{cases}D_q^{\alpha}u(t)+y(t)=0;\\ u(0)=0,\ D_q^{\alpha-1}u(\infty)=u^*\end{cases}\tag{2}$$

有唯一解 $u(t)=\dfrac{u^*t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\int_0^{\infty}G(t,s)y(s)\mathrm{d}_qs$,其中

$$G(t,qs)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\begin{cases}t^{\alpha-1}-(t-qs)^{(\alpha-1)},\ 0\leqslant qs\leqslant t<\infty;\\ t^{\alpha-1},\ 0\leqslant t\leqslant qs<\infty.\end{cases}\tag{3}$$

则边值问题

$$\begin{cases}D_q^{\beta}(D_q^{\alpha}u(t))+y(t)=0;\\ u(0)=0,\ D_q^{\alpha}u(0)=0,\ D_q^{\alpha-1}u(\infty)=u^*\end{cases}\tag{4}$$

的解为

$$u(t)=\frac{u^*t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta)}\int_0^{\infty}G(t,qs)\int_0^s(s-q\tau)^{(\beta-1)}y(\tau)\mathrm{d}_q\tau\,\mathrm{d}_qs.\tag{5}$$

证明 用 I_q^{α} 算子作用式(2)中的方程两端,得

$$u(t)=-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^t(t-qs)^{(\alpha-1)}y(s)\mathrm{d}_qs+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}.\tag{6}$$

由 $u(0)=0$，$D_q^{\alpha-1}u(\infty)=u^*$，得 $c_2=0$，$c_1=\dfrac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\left(\int_0^\infty y(s)\mathrm{d}_qs+u^*\right)$. 将 c_1 和 c_2 代入式(6) 得

$$u(t)=\frac{u^*t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}+\int_0^\infty G(t,qs)y(s)\mathrm{d}_qs.$$

用 I_q^β 算子作用式(4) 的方程两端，得 $D_q^\alpha u(t)=c_1't^{\beta-1}-I_q^\beta y(t)$. 再由边值条件 $D_q^\alpha u(0)=0$，得 $c_1'=0$，即 $D_q^\alpha u(t)=-I_q^\beta y(t)$. 故式(2) 等价于 $\begin{cases}D_q^\alpha u(t)+I_q^\beta y(t)=0;\\ u(0)=0,\ D_q^{\alpha-1}u(\infty)=u^*,\end{cases}$ 所以边值问题(4) 的解为式(5).

引理 2　格林函数 $G(t,qs)$ 的性质：

1) $G(t,qs)$ 是连续的且 $G(t,qs)\geqslant 0$，$(t,s)\in J\times J$；

2) $\dfrac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}\leqslant\dfrac{1}{\Gamma_q(\alpha)}$，$(t,s)\in J\times J$；$\dfrac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}=\begin{cases}\dfrac{t^{\alpha-1}-(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)(1+t^{\alpha-1})}\leqslant\dfrac{1}{\Gamma_q(\alpha)},\ 0\leqslant qs\leqslant t<\infty;\\ \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1+t^{\alpha-1})}\leqslant\dfrac{1}{\Gamma_q(\alpha)},\ 0\leqslant t\leqslant qs<\infty.\end{cases}$

定义算子 A：

$$Au(t)=\frac{u^*t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta)}\int_0^\infty G(t,qs)\int_0^s(s-q\tau)^{(\beta-1)}f(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau),(Su)(\tau))\mathrm{d}_q\tau\,\mathrm{d}_qs.$$

为便于分析，本文做如下假设：

(H_1) $\exists\, a(t),b(t)\in C(J,\mathbf{R}^+)$，$c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R}^+$，使得

$$\|f(t,u,v,w)\|\leqslant a(t)+b(t)(c_1\|u\|+c_2\|v\|+c_3\|w\|),\ t\in J,\ u,v,w\in P.$$

令 $a^*=\int_0^\infty a(s)\mathrm{d}_qs<\infty$，$b^*=\int_0^\infty(1+s^{\alpha-1})b(s)\mathrm{d}_qs<\infty$，$\int_0^s(s-q\tau)^{(\beta-1)}\mathrm{d}_q\tau<\infty$.

(H_2) $f(t,u,v,w)$ 是增函数，且 $f(t,u,v,w)\leqslant f(t,\bar u,\bar v,\bar w)$，$t\in J$，$\bar u\geqslant u\geqslant\theta$，$\bar v\geqslant v\geqslant\theta$，$\bar w\geqslant w\geqslant\theta$.

引理 3　若假设(H_1)成立，则算子 $A:C_\infty\to C_\infty$.

证明　令 $u(t)\in C_\infty$，即 $u(t)\geqslant\theta$ 且 $\|u\|_F<\infty$. 因为 $f\in C[J\times P\times P\times P,P]$，$G(t,qs)>0$，故$(Au)(t)\geqslant\theta$. 由假设$(\mathrm{H}_1)$有

$$\begin{aligned}\|(Au)(t)\|\leqslant{}&\frac{\|u^*\|t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta)}\int_0^\infty G(t,qs)\cdot\\&\int_0^s(s-q\tau)^{(\beta-1)}\|f(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau),(Su)(\tau))\|\mathrm{d}_q\tau\,\mathrm{d}_qs\leqslant\frac{\|u^*\|t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{1+t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}\cdot\\&\int_0^\infty a(s)+b(s)(c_1\|u(s)\|+c_2\|Tu(s)\|+c_3\|Su(s)\|)\int_0^s(s-q\tau)^{(\beta-1)}\mathrm{d}_q\tau\,\mathrm{d}_qs\leqslant\\&\frac{\|u^*\|t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{1+t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}\left[a^*+b^*(c_1+c_2k^*+c_3h^*)\int_0^s(s-q\tau)^{(\beta-1)}\mathrm{d}_q\tau\,\|u\|_F\right]<\infty,\end{aligned}$$

即 $\|(Au)(t)\|_F=\sup\limits_{t\in J}\dfrac{\|(Au)(t)\|}{1+t^{\alpha-1}}<\infty$，因此 $A:C_\infty\to C_\infty$.

2　主要结果及其证明

定理 1　设 P 为全正则锥，满足假设(H_1)和(H_2)，且 $r:=\dfrac{b^*(c_1+c_2k^*+c_3h^*)\int_0^s(s-q\tau)^{(\beta-1)}\mathrm{d}_q\tau}{\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(\alpha)}<1$，则在区间 J 上存在一个非减数列$\{u_n\}\subset C_\infty$ 一致收敛到极小解 $\bar u$，即边值问题(1) 的任意解 $u(t)\geqslant\bar u(t)$，$\forall\, t\in J$，$\|\bar u\|_F\leqslant\dfrac{d}{1-r}$，其中 $d=\dfrac{\Gamma_q(\beta)\|u^*\|_F+a^*}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}$.

证明　令 $u_0(t)=\theta$，$u_n(t)=Au_{n-1}(t)$，$n=1,2,3,\cdots$，其中

$$u_n(t)=\frac{u^*t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{\int_0^\infty G(t,qs)\int_0^s(s-q\tau)^{(\beta-1)}f(\tau,u_{n-1}(\tau),(Tu_{n-1})(\tau),(Su_{n-1})(\tau))\mathrm{d}_q\tau\,\mathrm{d}_qs}{\Gamma_q(\beta)}.\tag{7}$$

由引理 3 知,$u_n(t)\in C_\infty$,所以 $u_n(t)\geqslant 0$. 根据 $G(t,qs)$ 的非负性以及函数 f 的连续性,有

$$\theta=u_0(t)\leqslant u_1(t)\leqslant u_2(t)\leqslant\cdots\leqslant u_n(t)\leqslant\cdots,\ t\in J. \tag{8}$$

再利用迭代公式可得

$$\|u_n\|_F=\|Au_{n-1}\|_F=\sup_{t\in J}\frac{\|Au_{n-1}(t)\|}{1+t^{\alpha-1}}\leqslant$$

$$\sup_{t\in J}\left\{\frac{\|u^*\|_F}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(\alpha)}\left[a^*+b^*(c_1+c_2k^*+c_3h^*)\int_0^s(s-q\tau)^{(\beta-1)}\mathrm{d}_q\tau\|u_{n-1}\|_F\right]\right\}\leqslant$$

$$\frac{\Gamma_q(\beta)\|u^*\|_F+a^*}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}+r\|u_{n-1}\|_F=d+r\|u_{n-1}\|_F=d+r(d+r\|u_{n-2}\|_F)\leqslant$$

$$d+r(d+r(d+r\|u_{n-3}\|_F))\leqslant\cdots\leqslant d\left(\frac{1-r^{n-2}}{1-r}+r^n\|u_0\|_F\right).$$

当 $n\to\infty$ 时,$\|u_n\|_F\leqslant\dfrac{d}{1-r}$,$n=1,2,3,\cdots$. 再由 P 的全正则性知

$$\lim_{n\to\infty}u_n(t)=\bar{u},\ t\in J. \tag{9}$$

又由于 C_∞ 是非空闭凸集,所以 $\bar{u}\in C_\infty$,$\|u\|_F\leqslant\dfrac{d}{1-r}$. 同理有 $f(s,u(s),(Tu)(s),(Su)(s))\to f(s,\bar{u}(s),(T\bar{u})(s),(S\bar{u})(s))$. 因此,$\|f(s,u(s),(Tu)(s),(Su)(s))-f(s,\bar{u}(s),(T\bar{u})(s),(S\bar{u})(s))\|\leqslant 2a(s)+2b(s)(c_1+c_2k^*+c_3h^*)\dfrac{d}{1-r}$,$s\in J$,$n=1,2,\cdots$. 当 $n\to\infty$ 时,式(7) 变为

$$\bar{u}(t)=\frac{u^*t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta)}\int_0^\infty G(t,qs)\int_0^s(s-q\tau)^{(\beta-1)}f(s,\bar{u}(s),(T\bar{u})(s),(S\bar{u})(s))\mathrm{d}_q\tau\,\mathrm{d}_qs.$$

由引理 1 知,$\bar{u}$ 是边值问题(1) 的非负解.

下面证明 $\bar{u}$ 是边值问题(1) 的极小解. 设 $u(t)$ 是边值问题(1) 的任意解,由引理 1 知,$u(t)\geqslant\theta=u_0(t)$,$t\in J$. 假设 $u(t)\geqslant u_{n-1}(t)$,$t\in J$,则由式(8) 知 $u(t)\geqslant u_n(t)$. 当 $n\to\infty$ 时,$u(t)\geqslant\bar{u}(t)$,$t\in J$,即 $\bar{u}$ 是边值问题(1) 的极小解. 证毕.

定理 2 P 是全正规锥,且满足假设(H_1) 和(H_2). 假设存在函数 $w\in C_\infty$ 满足:

$$\begin{cases}D_q^\alpha w(t)+f(t,w(t),Tw(t),Sw(t))=0;\\ w(0)=0,\ D_q^{\alpha-1}w(\infty)\geqslant u^*,\end{cases} \tag{10}$$

则 $\bar{u}$ 是边值问题(1) 的极小非负解,$\bar{u}\in C_\infty$,$\bar{u}\leqslant w(t)$,$\forall\, t\in J$.

证明 由引理 1 知,

$$w(t)\geqslant\frac{u^*t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta)}\int_0^\infty G(t,qs)\int_0^s(s-q\tau)^{(\beta-1)}f(s,w)(s),(Tw)(s),(Sw)(s))\mathrm{d}_q\tau\,\mathrm{d}_qs. \tag{11}$$

定义算子 A:

$$Aw(t)=\frac{u^*t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta)}\int_0^\infty G(t,qs)\int_0^s(s-q\tau)^{(\beta-1)}f(s,w(s),(Tw)(s),(Sw)(s))\mathrm{d}_q\tau\,\mathrm{d}_qs,\ t\in J.$$

则由式(11) 有 $w(t)\geqslant(Aw)(t)$,$\forall\, t\in J$. 令 $u_0(t)=\theta$,$u_n(t)=Au_{n-1}(t)$,$n=1,2,3,\cdots$. 类似定理 1 的证明,可得 $\theta=u_0(t)\leqslant u_1(t)\leqslant u_2(t)\leqslant\cdots\leqslant u_n(t)\leqslant\cdots$,$t\in J$. 令 $u_0(t)\leqslant w(t)$,并假设对于 $\forall\, t\in J$,$u_{n-1}(t)\leqslant w(t)$,则根据数学归纳法和式(9) 有 $u_n(t)=(Au_{n-1})(t)\leqslant(Aw)(t)\leqslant w(t)$,$\forall\, t\in J$. 再由式(7) 可得 $\bar{u}(t)\leqslant w(t)$,$\forall\, t\in J$. 故 $\|\bar{u}(t)\|\leqslant N\|w(t)\|$,$\forall\, t\in J$,其中 N 是锥 P 中的正规常数. 由定理 1 知,$\{u_n(t)\}$ 在区间 J 上一致收敛到极小解 $\bar{u}(t)$. 因此,$\bar{u}\in C_\infty$ 是边值问题(1) 的极小非负解.

4 算例

例 1 考虑如下分数阶 q-差分边值问题:

$$
\begin{cases}
D_q^1(D_q^{3/2}u_n(t))+\dfrac{e^{-t}u_{n+1}}{5(1+t^{3/2})^5}+\dfrac{e^{-2t}\sqrt{1+2u_n+u_{2n+1}}}{2^{n+3}(1+t^{3/2})^3}+\\
\qquad\dfrac{e^{-3t}}{10(1+t^{3/2})^2}\left[1+\displaystyle\int_0^t e^{-(t+1)s}u_{2n}(s)\mathrm{d}_qs\right]^{1/5}+\dfrac{e^{-2t}}{2^{n+1}(1+t^{3/2})}\left[\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{u_n(s)}{1+t+s^2}\mathrm{d}_qs\right]^{\frac{1}{3}}=\theta,\ t\in J;\\
x(0)=\theta,\ D_q^{3/2}u_n(t)=\theta,\ D_q^{1/2}u_n(t)=\dfrac{1}{n^3}.
\end{cases}
$$

其中：$k(t,s)=e^{-(t+1)s}$，$h(t,s)=(1+t+s^2)^{-1}$，$u=(u_1,\cdots,u_n,\cdots)$，$v=(v_1,\cdots,v_n,\cdots)$，$w=(w_1,\cdots,w_n,\cdots)$，$f=(f_1,\cdots,f_n,\cdots)$，$\theta=(0,\cdots,0,\cdots)$，$u^*=\{1,\cdots,\dfrac{1}{n^3},\cdots\}$，

$$
f_n(t,u,v,w)=\frac{e^{-t}u_{n+1}}{5(1+t^{3/2})^5}+\frac{e^{-2t}\sqrt{1+2u_n+u_{2n+1}}}{2^{n+3}(1+t^{3/2})^3}+\frac{e^{-3t}}{10(1+t^{3/2})^2}\left[1+\int_0^t e^{-(t+1)s}v_{2n}(s)\mathrm{d}_qs\right]^{1/5}+\frac{e^{-2t}}{2^{n+1}(1+t^{3/2})}\left[\int_0^{\infty}\frac{w_n(s)}{1+t+s^2}\mathrm{d}_qs\right]^{\frac{1}{3}},
$$

证明　显然，$f\in C(J\times P\times P\times P,P)$，且 $\theta,u^*\in P$，所以假设(H_2)成立.注意到，

$$
k^*=\sup_{t\in J}\int_0^t e^{-(t+1)s}\mathrm{d}_qs=\sup_{t\in J}\frac{1-e^{-(t+1)t}}{t+1}\mathrm{d}_qs\leqslant 1,\ h^*=\sup_{t\in J}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t+s^2}\mathrm{d}_qs\leqslant\frac{\pi}{2}.
$$

且当 $n\to\infty$ 时，

$$
\lim_{t'\to t}\int_0^{\infty}\left|\frac{1}{1+t'+s^2}-\frac{1}{1+t+s^2}\right|\mathrm{d}_qs=\lim_{t'\to t}\int_0^{\infty}\frac{|t'-t|}{(1+t'+s^2)(1+t+s^2)}\mathrm{d}_qs=0,\ t',t\in J.
$$

对函数 $f_n(t,u,v,w)$ 进一步计算可得 $0\leqslant f_n(t,u,v,w)\leqslant\dfrac{e^{-t}u_{n+1}}{5(1+t^{3/2})^5}+\dfrac{e^{-2t}(1+2u_n+u_{2n+1})}{2^{n+3}(1+t^{3/2})^3}+\dfrac{e^{-3t}}{10(1+t^{3/2})^2}(1+\dfrac{1}{5}v_{2n})+\dfrac{e^{-2t}}{2^{n+1}(1+t^{3/2})}(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}w_n)\leqslant\dfrac{e^{-2t}}{10(1+t^{3/2})}+\dfrac{e^{-t}}{(1+t^{3/2})}\left[\dfrac{1}{5}u_{n+1}+\dfrac{1}{2^{n+3}}u_n+\dfrac{1}{2^{n+4}}u_{2n+1}+\dfrac{1}{50}v_{2n}+\dfrac{1}{3\times 2^{n+2}}w_n\right]$，故 $\|f(t,u,v,w)\|\leqslant\dfrac{e^{-2t}}{10(1+t^{3/2})}+\dfrac{e^{-t}}{(1+t^{3/2})}\left[\dfrac{41}{70}\|u\|+\dfrac{1}{50}\|v\|+\dfrac{1}{12}\|w\|\right]$，$a^*=\displaystyle\int_0^{\infty}a(s)\mathrm{d}_qs=\int_0^{\infty}\dfrac{e^{-2s}}{10+s^{3/2}}\mathrm{d}_qs\leqslant\dfrac{1}{18}$，$b^*=\displaystyle\int_0^{\infty}(1+s^{3/2})b(s)\mathrm{d}_qs=\int_0^{\infty}e^{-s}\mathrm{d}_qs=1$.由以上证明知($H_1$)成立.另外，因 $r:=\dfrac{b^*(c_1+c_2k^*+c_3h^*)\displaystyle\int_0^s(s-q\tau)^{(\beta-1)}\mathrm{d}_q\tau}{\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(\alpha)}<0.736\,61<1$，满足定理1的所有条件，故边值问题在区间 J 上有极小解.

参考文献：

[1] 刘一丁，侯成敏.一类带有扰动项的分数阶 q-差分方程解的存在唯一性[J].延边大学学报(自然科学版)，2018，44(4)：292-301.

[2] CUI Y，SUN Q，SU X. Monotone iterative technique for nonlinear boundary value problems of fractional order $p\in(2,3]$[J]. Adv Differ Equ，2017，248：1-15.

[3] ZHANG X，ZHONG Q. Uniqueness of solution for higher-order fractional differential equations with conjugate type integral conditions[J]. Fract Calc Appl Anal，2017，20(6)：1471-1484.

[4] ZHANG L，AHMAD B，WANG G. Monotone iterative method for a class of nonlinear fractional differential equations on unbounded domains in Banach spaces[J]. Filomat，2017，31(5)：1331-1338.

[5] 张禄禄，孙书荣.一类分数阶 q-差分方程的边值问题[J].滨州学院学报，2017，33(6)：41-43.

[6] MA K，LI X，SUN S. Boundary value problems of fractional q-difference equations on the half-line[J]. Boundary Value Problems，2019，2019(1)：46.

[7] 葛琦，侯成敏.一类有序分数 q-差分方程解的存在性[J].吉林大学学报(理学版)，2015，53(3)：377-382.

[8] 李新慧.分数阶 q-差分方程边值问题及其应用[D].济南：济南大学，2015.