

文章编号: 1004-4353(2019)02-0150-03

动能定理不依赖惯性参考系选取的证明

苏石磊, 闫磊磊, 潘志峰

(郑州大学 物理工程学院, 郑州 河南 450001)

摘要: 大多数大学物理教材仅将动能定理简单地描述为“动能定理的形式不依赖于惯性参考系”, 而没有给出严格的证明, 这使得学生难以真正理解动能定理. 针对这一问题, 本文首先利用不同惯性参考系之间的速度变换方法证明了动量定理形式不依赖于参考系的选取, 然后基于此证明并利用类似的方法严格证明了动能定理形式不依赖于参考系的选取. 该结果不仅能够丰富大学物理的教学内容, 有利于学生全面掌握动能定理, 而且还有助于提高学生的创新思维.

关键词: 动量定理; 动能定理; 基本参考系; 运动参考系

中图分类号: O411.1

文献标识码: A

Proof of the kinetic energy theorem does not depend on the inertial reference system

SU Shilei, YAN Leilei, PAN Zhifeng

(School of Physics and Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: Most university physics textbooks simply describe the kinetic energy theorem as “the form of the kinetic energy theorem does not depend on the inertial reference system”, and does not give a strict proof, which makes it difficult for students to truly understand the kinetic energy theorem. To address this issue, the paper firstly uses the velocity transformation method between different inertial reference systems to prove that the form of momentum theorem does not depend on the reference system. Then, based on this proof, the similar physical method is used to prove that the form of the kinetic energy theorem does not depend on the reference system. The results of this paper can not only enrich the teaching content of university physics and help students to fully grasp the kinetic energy theorem, but also improve students' ability of innovative thinking.

Keywords: momentum theorem; kinetic energy theorem; basic reference system; motion reference system

0 引言

牛顿第二定律指出:“质点的运动状态发生改变的前提是受到外力的作用, 获得加速度.” 牛顿第二定律描述的是力对物体的瞬时作用, 但在很多实际情况时, 作用在物体上的力会持续一段时间, 移动一定的位移. 力在时间上的累积作用 $\mathbf{F} \Delta t$ 对物体运动状态的影响体现在动量定理^[1]. 力在

空间上的累计作用 $\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$ 对物体运动状态的影响由动能定理体现^[2]. 目前, 大多数大学物理教材^[1-4]在介绍动能定理的特点时, 仅将其简单地描述为:“动能定理不依赖于惯性系的选取”, 并没有给出严格的证明, 这使得学生难以真正掌握动能定理, 影响后续大学物理知识的学习. 针对这一问题, 本文利用基本惯性参考系和运动惯性参考系来证明动能定理不依赖于惯性参考系的选取, 以

收稿日期: 2019-02-26

作者简介: 苏石磊(1988—), 男, 博士, 讲师, 研究方向为量子计算与量子信息.

基金项目: 教育部高等学校教学研究项目(DWJZW201701zn-1); 河南省高等教育教学改革研究与实践项目(2017SJGLX186)

此加深学生对动能定理的理解,帮助学生提高创新思维和发散思维^[5-8].

1 预备知识

1) 动量定理. 牛顿第二定律为:

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

式中 \boldsymbol{F} 代表作用在系统上的合外力, $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ 为系统的动量, t 为时间, m 为系统质量. 对公式(1) 变形并积分可得:

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1, \tag{2}$$

式中 \boldsymbol{p}_1 为系统在 t_1 时刻的动量, \boldsymbol{p}_2 为系统在 t_2 时刻的动量. 公式(2) 即为动量定理的积分形式, 其物理意义为: 在给定的时间间隔内, 外力作用在质点上的冲量, 等于质点在此时间内动量的增量. 如果力为恒力, 则积分变为力与时间的乘积.

2) 动能定理. 如图 1 所示, 质量为 m 的质点在合力 \boldsymbol{F} 的作用下, 自 A 点沿曲线移动到 B 点. 质点在点 A 和点 B 的速率分别为 v_1 和 v_2 . 设作用在位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 上的合力 \boldsymbol{F} 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 之间的夹角为 θ , 则合力对质点所做的元功为

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=F\cos\theta|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|.$$

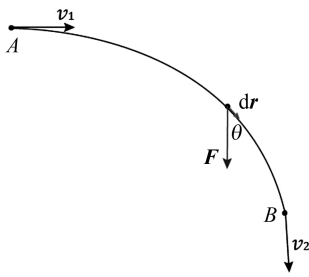


图 1 动能定理示意图

由牛顿第二定律及切向加速度的定义可得:

$$F\cos\theta=ma_t=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

因为 $\mathrm{d}s=v\mathrm{d}t$, 得 $\mathrm{d}W=mv\mathrm{d}v$. 再对 $\mathrm{d}W=mv\mathrm{d}v$ 进行积分可得动能定理:

$$W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2. \tag{3}$$

3) 相对运动. 如图 2 所示, 考虑 2 个参考系, 一个为 oxy 坐标系(S 系), 另一个为 $o'x'y'$ 坐标系(S' 系). 初始时 2 个参考系重合. 本文研究的质

点, 在 S 系中的位置以 P 表示, 在 S' 系中的位置用 P' 表示. 在 Δt 时间内, S' 系相对于基本参考系以速度 \boldsymbol{u} 沿 y 轴运动. 在 S 系中, 质点从 P 点运动到 Q 点, 其位矢为 $\Delta\boldsymbol{r}$. 在 S' 系中, 质点从 P' 点运动到 Q 点, 其位矢为 $\Delta\boldsymbol{r}'$. 这些矢量之间满足以下关系^[3]:

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{r}'+\Delta\boldsymbol{D}, \quad \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}'}{\Delta t}+\boldsymbol{u}. \tag{4}$$

当取 $\Delta t\rightarrow 0$, 可得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}, \tag{5}$$

其中 \boldsymbol{v} 为质点相对于基本参考系的速度, \boldsymbol{v}' 为质点相对于运动参考系的速度.

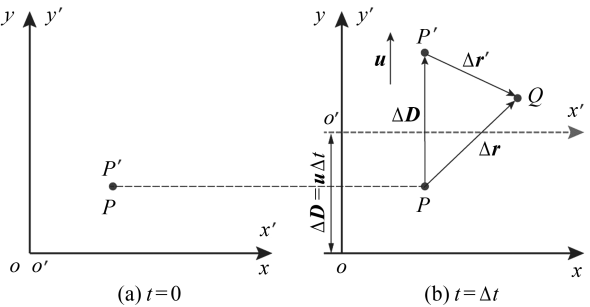


图 2 质点在相对作匀速直线运动的两个惯性参考系中的力学量

2 动能定理形式不依赖于参考系选取的证明

首先证明动量定理形式不依赖于参考系的选取, 然后按照类似的思想去证明动能定理形式不依赖于参考系的选取.

假设运动惯性参考系 S' 相对运动基本惯性参考系 S 沿某一固定方向以速度 \boldsymbol{u} 运动, 质点受一恒力 \boldsymbol{F} 作用, 作用时间为 Δt . 则在 S 系中, 动量定理的表达形式为:

$$\boldsymbol{F}\Delta t=m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1, \tag{6}$$

其中 t 为作用时间, m 为质点质量, \boldsymbol{v}_1 为初速度, \boldsymbol{v}_2 为末速度. 公式(6) 可以变形为

$$\boldsymbol{F}\Delta t=m(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{u})-m(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{u}).$$

由相对运动的公式(5) 可得:

$$\boldsymbol{F}\Delta t=m\boldsymbol{v}'_2-m\boldsymbol{v}'_1. \tag{7}$$

从公式(6) 和公式(7) 可以看出, 动量定理形式不依赖于参考系的选取.

假设质点在基本惯性参考系中移动的位移矢

量为 $\Delta \boldsymbol{r}$, 在运动惯性参考系中移动的位移矢量为 $\Delta \boldsymbol{r}'$, 运动惯性参考系相对于基本惯性参考系的移动速度为 \boldsymbol{u} . 在基本惯性参考系中, 质点的初始速度和末速度分别为 \boldsymbol{v}_1 和 \boldsymbol{v}_2 ; 在运动惯性参考系中, 质点的初始速度和末速度分别为 \boldsymbol{v}'_1 和 \boldsymbol{v}'_2 . 在基本惯性参考系中, 质点的动能定理可以表示为:

$$\boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_1^2. \tag{8}$$

在动量定理式(6) 两侧右端同时点乘 \boldsymbol{u} 可得:

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u} \Delta t = m \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u} - m \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{u}. \tag{9}$$

公式(8) 减公式(9), 得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} \cdot (\Delta \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u} \Delta t) &= \frac{1}{2} m (\boldsymbol{v}_2^2 - 2 \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}) - \\ &\frac{1}{2} m (\boldsymbol{v}_1^2 - 2 \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{u}). \end{aligned} \tag{10}$$

公式(10) 可变形为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} \cdot (\Delta \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u} \Delta t) &= \frac{1}{2} m (\boldsymbol{v}_2^2 - 2 \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^2) - \\ &\frac{1}{2} m (\boldsymbol{v}_1^2 - 2 \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^2). \end{aligned} \tag{11}$$

利用公式 $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^2$ 简化公式(11), 同时考虑标量积特点($\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$) 及相对运动公式(4) 和(5) 后, 公式(11) 可变形为

$$\boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r}' = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}'_2{}^2 - \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}'_1{}^2. \tag{12}$$

通过对比公式(8)和公式(12)可知, 质点动能定理在不同参考系下的形式是一致的. 上述证明

过程是在恒力的作用下, 对于变力的情况, 也可以利用类似的方法证明.

3 结论

本文利用基本惯性参考系中的动能定理和矢量运算法则, 求解出运动惯性参考系中的动能定理, 即证明了动能定理形式不依赖于参考系的选择. 该证明不仅有利于学生掌握动能定理和提高学生分析问题、解决问题的能力, 而且有利于培养学生的探究精神和创新思维.

参考文献:

[1] 叶伟国, 余国祥. 大学物理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012: 37-43.

[2] 卢德馨. 大学物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 45-58.

[3] 马文蔚, 周雨青. 物理学[M]. 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 57-69.

[4] 戴坚舟, 钱水兔, 阴其浚, 等. 大学物理[M]. 2 版. 上海: 华东理工大学出版社, 2007: 48-77.

[5] 张萍, Ding Lin, 张静. 传统大学物理教学的困境及成因分析[J]. 物理与工程, 2019, 29(1): 167-173.

[6] 吴宏伟, 权家琪. 大学物理教学模式的改革与创新构想[J]. 科教文汇, 2019, 446(中): 71-72.

[7] 臧小飞, 周桃. 浅析大学物理力学教学中的矢量思想[J]. 科教文汇, 2018, 443(中): 57-58.

[8] 赵德刚, 项林川. 旧瓶装新酒: 大学物理教学中开放式问题的探讨[J]. 物理与工程, 2019, 29(1): 8-10.