文章编号: 1004-4353(2019)01-0011-04

May 谱序列某些直和项

高姗[1], 钟立楠[2*]
(1. 太原工业学院, 山西 太原 030008; 2. 延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 计算了 Dykin 图为 A_n 的李代数的正根系上同调的一些非零直和项. 首先列出了 R_6 的全部权子复形,然后利用链同构关系的相关定理对权子复形进行了分类. 最后通过对分类权子空间秩的计算,得出了 R_6 的模 3 系数的上同调的所有非零直和项. 本文的研究结果补充了文献[4] 的相关结论.

关键词: May 谱序列; 上同调; 稳定同伦群

中图分类号: O154 **文献标识码:** A

Direct sum summand of May spectral sequence

GAO Shan[1], ZHONG Linan[2*]
(1. *Taiyuan Institute of Technology*, *Taiyuan* 030008, *China*;
2. *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: In this paper, we compute some non-zero direct sum summand of the cohomology of the positive system of the Lie algebra with Dynkin graph. First we list all of the weight subcomplexes of R_6 are established, then theroems about chain isomorphism are used to classify this weight subcomplexes. Finally, through the calculation of the rank of the weight subcomplexes, all of the nonzero direct sum summand of the cohomology of R_6 are obtained. The research results supplement the related results of the literature [4].

Keywords: May spectral sequence; cohomology; stable homotopy group

0 引言

球面稳定同伦群的计算是代数拓扑的一个重要问题. 目前,球面稳定同伦群的计算方法主要是利用经典 Adams 谱序列. 经典 Adams 谱序列的 E_2-项是 Steenrod 代数[1] 的上同调. Steenrod 代数的上同调的计算可由 May 谱序列的逼近来完成,因此又可利用 May 谱序列来计算经典 Adams 谱序列. 复数域上紧致半单李代数的分类可由相关李代数的 Dynkin 图的分类确定,对于 Dykin 图为 A_n 的李代数的正根系 $\mathcal{G}_n$,它的模 p 系数上同调群在代数拓扑中直接为 May 谱序列的一个直和项. 文献[2]给出了如下定理:设 Dynkin 图为 A_n 的李代数的正根系为 $\mathcal{G}_n$, 基为 $\{e_{i,j}, 0 \leqslant i < j \leqslant n\}$, 李代数的运算定义为:

$$[e_{s,t}, e_{m,n}] = \begin{cases} e_{s,n}, \text{ 若 } t = m; \\ -e_{t,m}, \text{ 若 } s = n; \\ 0, \text{ 其他情况.} \end{cases}$$

$\mathcal{G}_n$ 的上同调为上链复形 (R_n, d) 的上同调, 其中 R_n 为外代数 $\{e_{i,j}, 0 \leqslant i < j \leqslant n\}$, $de_{i,j} = \sum_{s=i+1}^{j-1} e_{i,s} e_{s,j}$ $(de_{i,i+1} = 0)$. 需要注意的是, 上述 $e_{i,j}$ 在 May 谱序列中记作 $h_{j-1,i}$. May 谱序列的第 2 个谱序列的 E_1-项

收稿日期: 2018-11-25 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11261062)

* **通信作者:** 钟立楠(1982—),女,博士,副教授,研究方向为代数拓扑.

作为代数等于 $E(h_{i,j}\mid n=1,2,\cdots;j=0,1,\cdots)\otimes P(b_{n,j}\mid n=1,2,\cdots;j=0,1,\cdots)\otimes P(a_m\mid m=0,1,\cdots)$[3],其中 E 表示外代数,P 表示多项式.在以上复形中,由 $h_{i,j}$ 生成的子复形的上同调群即为$\mathcal{G}_n$的上同调群,它为 E_1-项的一个直和分量群.本文在文献[4]的研究基础上,通过直接计算权子复形秩和在权子复形上构造谱序列,得出 $H^*(R_6,Z_3)$ 中全部可能的非零直和项以及 $H^*(R_6,Z_3)$ 中的某些可能非零直和项的上同调.

1 预备知识

定义 1[5] 令 R_n, $n=1,2,\cdots$ 为形如 $[a_{i,j}]=\begin{bmatrix} a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} & \cdots & a_{0,n} \\ & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ & & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & & \cdots & \cdots \\ & & & & a_{n-1,n}\end{bmatrix}$的上三角矩阵所组成的集合,其中 $a_{i,j}=0$ 或者 1,称$(i_0,i_1,\cdots,i_n)$为上三角矩阵 $[a_{i,j}]\in R_n$ 的权,$i_s=\sum\limits_{k=0}^{s-1}(1-a_{k,s})+\sum\limits_{k=s+1}^{n}a_{s,k}$,$s=0,1,\cdots,n$.

定义 2[5] R_n 中权为$(i_0,i_1,\cdots,i_n)$的所有基元素生成的子空间称为权子空间 $R(i_0,i_1,\cdots,i_n)$.

性质 1[2] 权子空间满足以下性质:

1) 若$(j_0,j_1,\cdots,j_n)$为$(i_0,i_1,\cdots,i_n)$的一个重新排列,则 $R(j_0,j_1,\cdots,j_n)$ 和 $R(i_0,i_1,\cdots,i_n)$ 作为线性空间的维数相等.

2) 由链复形 R_n 到自身的反射同构导出:

$\dim H^*(R(i_0,i_1,\cdots,i_n))=\dim H^*(R(n-i_n,n-i_{n-1},\cdots,n-i_0))$.

3) 由链复形 R_n 到自身的对偶同构导出:

$\dim H^*(R(i_0,i_1,\cdots,i_n))=\dim H^*(R(n-i_0,n-i_1,\cdots,n-i_n))$.

4) 由链复形 R_n 到自身的旋转同构导出:$\dim H^*(R(i_0,i_1,\cdots,i_n))=\dim H^*(R(i_1,\cdots,i_n,i_0))$.

定理 1[2] 对于 $m,n\geqslant 0$,权$(k_0,\cdots,k_{m+1})$称为可约的,如果它为$(i_0,\cdots,i_m,j_0+m+1,j_1+m+1,\cdots,j_n+m+1)$的一个置换且保持子序列$(i_0,\cdots,i_m)$和$(j_0+m+1,j_1+m+1,\cdots,j_n+m+1)$的顺序不变,则有以下权子复形的链同构:

$$R(i_0,\cdots,i_m,j_0+m+1,j_1+m+1,\cdots,j_n+m+1)\cong R(i_0,i_1,\cdots,i_m)\times R(j_0,j_1,\cdots,j_n).$$

特别地,当 $m=0$ 和 $n=0$ 时,有:

$R(j_0+1,\cdots,j_{k-1}+1,0,j_k+1,\cdots,j_n+1)\cong R(j_0,j_1,\cdots,j_{k-1},j_k,\cdots,j_n)$,

$R(i_0,\cdots,i_{k-1},m+1,i_k,\cdots,i_m)\cong R(i_0,\cdots,i_{k-1},i_k,\cdots,i_m)$.

定理 2[4] 在(R_4,d)中,如果(j_0,j_1,j_2,j_3,j_4)为$(0,1,2,3,4)$的一个排列,则:

$\dim H^*(R(j_0,j_1,j_2,j_3,j_4))=1$;

$\dim H^*(R(2,1,3,1,3))=\dim H^*(R(1,2,3,1,3))=\dim H^*(R(1,3,2,1,3))=$
$\dim H^*(R(1,3,1,2,3))=\dim H^*(R(3,1,3,1,2))=\dim H^*(R(2,3,1,3,1))=$
$\dim H^*(R(3,2,1,3,1))=\dim H^*(R(3,1,2,3,1))=\dim H^*(R(3,1,3,2,1))=$
$\dim H^*(R(3,1,3,1,2))=2$;

其他情况的上同调群为 0.

定理 3[6] 在(R_5,d)中,

$\dim H^*(R(j_0,j_1,j_2,j_3,j_4,5))=\dim H^*(R(j_0,j_1,j_2,j_3,j_4))$;

$\dim H^*(R(0,j_1,j_2,j_3,j_4,j_5))=\dim H^*(R(j_1-1,j_2-1,j_3-1,j_4-1,j_5-1))$;

$\dim H^*(R(1,2,3,2,3,4))=\dim H^*(R(2,1,3,2,3,4))=\dim H^*(R(2,3,1,2,3,4))=$
$\dim H^*(R(2,3,2,1,3,4))=\dim H^*(R(2,3,2,3,1,4))=\dim H^*(R(1,3,2,3,2,4))=$
$\dim H^*(R(3,1,2,3,2,4))=\dim H^*(R(3,2,1,3,2,4))=\dim H^*(R(3,2,3,1,2,4))=$
$\dim H^*(R(3,2,3,2,1,4))=2$；

$\dim H^*(R(2,3,1,3,2,4))=4$；

其他情况的上同调群为 0.

本文讨论的是 R_6 的模 3 系数上同调，即 $H^*(R_6,Z_3)$. 要计算 R_6 的模 3 系数上同调，只需计算它的全部权子复形 $R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$ 的上同调即可. 由性质 1 可知，只需求满足 i_6 为 $i_n(n=0,1,2,3,4,5,6)$ 中的最大值的权子复形的上同调即可.

2　主要结果及其证明

定理 4　$H^*(R_6,Z_3)$ 中的直和项可能不为零的情况如下：

1) $H^*(R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6))$，其中 $(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$ 为下列数组的任意排列 $(1,1,1,4,4,5,5)$，$(1,1,3,3,3,5,5)$，$(1,1,2,4,4,4,5)$，$(1,2,3,3,3,4,5)$，$(1,2,2,4,4,4,4)$，$(2,2,3,3,3,4,4)$；

2) $(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,6)$，其中 $H^*(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5)$ 不为零；

3) $(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,0)$，其中 $H^*(i_0-1,i_1-1,i_2-1,i_3-1,i_4-1,i_5-1)\neq 0$.

证明　权子复形可按 i_6 的不同情况分为以下 3 类：

I) $i_6=6$. 由定理 1 可知权 $(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$ 可约：$H^*(R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,6))\cong H^*(R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5))$，而定理 3 已经给出了 (R_5,d) 的权子复形的上同调.

II) $i_6=5$，有以下 2 种情况：① i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5 中最小为 0，不妨设 $i_0=0$，则权可约，由定理 1 知 $H^*(R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,5))\cong H^*(R(i_1-1,i_2-1,i_3-1,i_4-1,i_5-1,4))$. ② 其余情形如表 1 所示.

表 1　$i_6=5$ 时的权子复形的上同调

$(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5)$ 是下列数组的任意排列	$r(R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6))$ 的值	$r(R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6))$ 与 3 的整除关系	$H^*(R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6))$
(1,1,1,3,5,5)	2	不整除	等于零
(1,1,2,2,5,5)	4	不整除	等于零
(1,1,1,4,4,5)	3	整除	可能不为零
(1,1,2,3,4,5)	5	不整除	等于零
(1,2,2,2,4,5)	7	不整除	等于零
(1,1,3,3,3,5)	6	整除	可能不为零
(1,2,2,3,3,5)	7	不整除	等于零
(2,2,2,2,3,5)	5	不整除	等于零
(1,1,2,4,4,4)	6	整除	可能不为零
(1,1,3,3,4,4)	7	不整除	等于零
(1,2,2,3,4,4)	8	不整除	等于零
(1,1,1,3,5,5)	2	不整除	等于零
(2,2,2,2,4,4)	10	不整除	等于零
(1,2,3,3,3,4)	9	整除	可能不为零
(2,2,2,3,3,4)	10	不整除	等于零
(1,3,3,3,3,3)	10	不整除	等于零
(2,2,3,3,3,3)	11	不整除	等于零

III) $i_6=4$，有以下 2 种情况：① i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5 中最小为 0，不妨设 $i_0=0$，则权可约，由定理 1 知，$H^*(R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,4))\cong H^*(R(i_1-1,i_2-1,i_3-1,i_4-1,i_5-1,3))$. ② 其余情形如表 2 所示.

表 2 $i_6=4$ 时的权子复形的上同调

$(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5)$ 是下列数组的任意排列	$r(R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6))$ 的值	$r(R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6))$ 与 3 的整除关系	$H^*(R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6))$
(1,1,3,4,4,4)	8	不整除	等于零
(1,2,2,4,4,4)	9	整除	可能不为零
(1,2,3,3,4,4)	10	不整除	等于零
(2,2,2,3,4,4)	11	不整除	等于零
(2,2,3,3,3,4)	12	整除	可能不为零
(3,3,3,3,3,3)	10	不整除	等于零

综上,定理 4 所述结论成立.

以下用谱序列的方法求 $H^*(R_6,Z_3)$ 中的一些直和项的上同调.

定理 5 $H^*(R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6))=0$,其中$(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$为(1,1,1,4,4,5,5),(1,2,2,4,4,4)的任意排列.

证明 由定义 1 知,$R(1,1,1,4,4,5,5)$中的所有上三角矩阵满足第 6 列中只有 1 个元素为 1. 令 A_i 为权子复形中由所有满足以下条件的上三角矩阵 $[a_{i,j}]$ 生成的子复形,其中 $[a_{i,j}]$ 满足第 6 列为 1 的元素是 $a_{j,6}$, $j\leqslant i\,(i=1,2,3,4,5,6)$,则 $A_1\subset A_2\subset A_3\subset A_4\subset A_5\subset A_6$ 是 $R(1,1,1,4,4,5,5)$ 的一个滤子. 该滤子确定一个谱序列,其 E_2-项为:

$E_2^{s,*}\cong H^*(A_s/A_{s-1})$, $s\geqslant 2$;

$E_2^{6,*}\cong H^*(A_6/A_5)=H^*(R(0,1,1,4,4,5))=0$;

$E_2^{5,*}\cong H^*(A_5/A_4)=H^*(R(1,0,1,4,4,5))=0$;

$E_2^{4,*}\cong H^*(A_4/A_3)=H^*(R(1,1,0,4,4,5))=0$;

$E_2^{3,*}\cong H^*(A_3/A_2)=H^*(R(1,1,1,3,4,5))=0$;

$E_2^{s,*}\cong H^*(A_2/A_1)=H^*(R(1,1,1,4,3,5))=0$;

$E_2^{s,*}\cong H^*(A_1)=H^*(R(1,1,1,4,4,4))=0$.

由此可知,$H^*(R(1,1,1,4,4,5,5))=0$. 同理,当$(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$为(1,1,1,4,4,5,5),(1,2,2,4,4,4)的任意排列时,$H^*(R(i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6))=0$.

定理 6 $\dim H^*(R(1,1,3,3,3,5,5))=2$.

证明 $R(1,1,3,3,3,5,5)$中的所有上三角矩阵满足第 6 列中只有一个元素为 1. 令 A_i 为权子复形中由所有满足以下条件的上三角矩阵 $[a_{i,j}]$ 生成的子复形,其中 $[a_{i,j}]$ 满足第 6 列为 1 的元素是 $a_{j,6}$, $j\leqslant i\,(i=1,2,3,4,5,6)$,则 $A_1\subset A_2\subset A_3\subset A_4\subset A_5\subset A_6$ 是 $R(1,1,3,3,3,5,5)$ 的一个滤子. 该滤子确定一个谱序列,其 E_2-项为:

$E_2^{s,*}\cong H^*(A_s/A_{s-1})$, $s\geqslant 2$;

$E_2^{6,*}\cong H^*(A_6/A_5)=H^*(R(0,2,3,3,3,4))=0$;

$E_2^{5,*}\cong H^*(A_5/A_4)=H^*(R(1,1,3,3,3,4))=0$;

$E_2^{4,*}\cong H^*(A_4/A_3)=H^*(R(1,2,2,3,3,4))=0$;

$E_2^{3,*}\cong H^*(A_3/A_2)=H^*(R(1,2,3,2,3,4))\cong Z_3\oplus Z_3$;

$E_2^{s,*}\cong H^*(A_2/A_1)=H^*(R(1,2,3,3,2,4))=0$;

$E_2^{s,*}\cong H^*(A_1)=H^*(R(1,2,3,3,3,3))=0$.

以上谱序列由于只有一项不为零,因此满足 $d_2=0$. 由此可知 $E_\infty^{*,*}\cong E_2^{*,*}\cong Z_3\oplus Z_3$,所以

$\dim H^*(R(1,1,3,3,3,5,5))=2$.

(下转第 63 页)

速地访问非结构化数据.在研究中,本文仅对非结构化数据进行了动态访问策略的研究,而对于有实时性要求的场景未能进行研究,因此今后我们将考虑基于时间自动机的实时系统应用的研究.

参考文献:

[1] ITANI W, KAYSSI A, CHEHAB A. Privacy as a Service: Privacy-Aware Data Storage and Processing in Cloud Computing Architectures[C]//The 8th IEEE International Symposium on Dependable, Autonomic and Secure Computing. Washington DC, USA: IEEE Computer Society, 2009:711-716.

[2] CREESE S, HOPKINIS P, PEARSON S. Data Protection-Aware Design for Cloud Services[M]. Germany: Springer Berlin Heidelberg, 2014.

[3] PARAKH A, KAK S. Space efficient secret sharing for implicit data security[J]. Information Science, 2011,181(2):335-341.

[4] CATELANO D. Paillier's Cryptosystem Revisited [C]//In Proceedings of the 8th ACM conference on Computer and Communications Security. Philadelphia, PA, USA: Association for Computing Machinery, 2001:206-214.

[5] BENDLIN R, DAMGARD I. Semi-Homomorphic Encryption and Multiparty Computation [M]. Mrmany: Springer Berlin Heidelberg, 2011: 302-310.

[6] GENTRY C. A Fully Homomorphic Encryption Scheme[D]. Virginia: Standford University, 2009: 120-131.

[7] 王杰,陈志刚,钱漫匀,等.面向云隐私保护的5A问责制协议设计[J].南京邮电大学学报(自然科学版),2018,38(6):68-76.

[8] 刘莎,谭良.Hadoop云平台中基于信任的访问控制模型[J].计算机科学,2014,41(5):155-163.

[9] 张敬伦,张永生,高丽琴.基于内网数据安全防护引擎的安全架构设计[J].通信技术,2017,50(1):158-161.

(上接第 14 页)

参考文献:

[1] ADAMS J F. On the structure and application of the Steenrod algebra[J]. Math Helv, 1958,32:180-247.

[2] ZHENG Qibing. Graphs and the (co)homology of Lie algebras[EB/OL]. (2011-07-01)[2012-12-11]. http:arxiv.org/abs/1107.0235.

[3] MAY J P. The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras[J]. Journal of Algebra, 1966(3):123-145.

[4] 陆俊杰.关于 May 谱序列 E_2 项的若干结果[D].天津:南开大学,2007.

[5] DWYER W G. Homology of integral upper-triangular matrices[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1985,94:523-528.

[6] 高姗.May 谱序列某些直和项上同调的计算[J].南开大学学报(自然科学版),2013,46(5):29-36.